DM n° 1 de mathématiques

à rendre au plus tard le jeudi 17 septembre

Recommandations : portez un soin particulier à la rédaction et la présentation de votre copie, rédigez vos réponses dans un français correct (faites attention à l'orthographe et la grammaire mais aussi à la syntaxe et la sémantique), soyez clairs dans vos raisonnements, répondez précisément aux questions posées, mettez en évidence vos résultats, aérez votre copie, etc.

Dans tout ce DM, n désigne un entier naturel non nul fixé.

Partie 1

Le but de cette partie est de déterminer toutes les relations du type :

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} \tag{R$_1$}$$

où $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ sont des entiers naturels consécutifs rangés dans l'ordre croissant.

1. Trouver trois nombres a_0, a_1, a_2 solutions du problème dans le cas $n = 1$.
2. Soient $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$ des entiers naturels consécutifs rangés dans l'ordre croissant vérifiant (R$_1$).
   (a) Exprimer $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ et $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}$ en fonction de a_0 et n.
   (b) En déduire une expression de a_0 en fonction de n.
3. Résoudre le problème dans les cas $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

Partie 2

Le but de cette partie est de déterminer toutes les relations du type :

$$(b_0)^2 + (b_1)^2 + (b_2)^2 + \cdots + (b_n)^2 = (b_{n+1})^2 + (b_{n+2})^2 + \cdots + (b_{2n})^2 \tag{R$_2$}$$

où $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{2n}$ sont des entiers naturels consécutifs rangés dans l'ordre croissant.

4. Montrer que pour tout entier naturel N on a :
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + N^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$
5. Soient $b_0, b_1, \dots, b_{2n}$ des entiers naturels consécutifs rangés dans l'ordre croissant vérifiant (R$_2$).
   (a) Exprimer $(b_0)^2 + (b_1)^2 + \cdots + (b_n)^2$ et $(b_{n+1})^2 + (b_{n+2})^2 + \cdots + (b_{2n})^2$ en fonction de b_0 et n.
   (b) Montrer que b_0 est solution d'une équation de degré 2 dont les coefficients dépendent de n.
   (c) En déduire une expression de b_0 en fonction de n.
6. Résoudre le problème dans les cas $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

Partie 3

Le but de cette partie est de déterminer toutes les relations du type :

$$(c_0)^3 + (c_1)^3 + (c_2)^3 + \cdots + (c_n)^3 = (c_{n+1})^3 + (c_{n+2})^3 + \cdots + (c_{2n})^3 \tag{R$_3$}$$

où $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{2n}$ sont des entiers naturels consécutifs rangés dans l'ordre croissant.

7. Montrer que pour tout entier naturel N on a :
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + N^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}.$$
8. Soient $c_0, c_1, \dots, c_{2n}$ des entiers naturels consécutifs rangés dans l'ordre croissant vérifiant (R$_3$).
   (a) Exprimer $(c_0)^3 + (c_1)^3 + \cdots + (c_n)^3$ et $(c_{n+1})^3 + (c_{n+2})^3 + \cdots + (c_{2n})^3$ en fonction de c_0 et n.
   (b) Montrer que $P_n(c_0) = 0$ où P_n est la fonction polynomiale suivante :
$$P_n : x \mapsto x^3 - 3n^2x^2 - 3n^2(2n+1)x - \frac{n^2(7n^2+6n+1)}{2}.$$
9. (a) Dresser le tableau des variations de la fonction P_n en précisant les signes des extrema.
   (b) On désigne par k_n l'entier $n(3n+2)$. Déterminer le signe de $P_n(k_n)$ et celui de $P_n(k_n + 1)$.
   (c) Conclure.