

Corrigé du DM n° 1 de mathématiques

Dans tout ce DM, n désigne un entier naturel non nul fixé.

Partie 1

Le but de cette partie est de déterminer toutes les relations du type :

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} \quad (\text{R}_1)$$

où $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ sont des entiers naturels consécutifs rangés dans l'ordre croissant.

1. Trouver trois nombres a_0, a_1, a_2 solutions du problème dans le cas $n = 1$.

► Dans le cas $n = 1$, la relation (R_1) s'écrit : $a_0 + a_1 = a_2$. Par exemple, les nombres $\boxed{a_0 = 1}$, $\boxed{a_1 = 2}$ et $\boxed{a_2 = 3}$ sont bien solutions du problème car $1 + 2 = 3$.

2. Soient a_0, a_1, \dots, a_{2n} des entiers naturels consécutifs rangés dans l'ordre croissant vérifiant (R_1) .

(a) Exprimer $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ et $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}$ en fonction de a_0 et n .

► Puisque les entiers naturels $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ sont consécutifs et rangés dans l'ordre croissant, on reconnaît les termes d'une suite arithmétique de raison 1. D'où :

$$\underbrace{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}_{n+1 \text{ termes}} = (n+1) \frac{a_0 + a_n}{2} = (n+1) \frac{a_0 + a_0 + n}{2} = \boxed{(n+1)a_0 + \frac{n(n+1)}{2}}$$

et $\underbrace{a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}}_{n \text{ termes}} = n \frac{a_{n+1} + a_{2n}}{2} = n \frac{a_0 + n + 1 + a_0 + 2n}{2} = \boxed{na_0 + \frac{n(3n+1)}{2}}$.

(b) En déduire une expression de a_0 en fonction de n .

► En utilisant les résultats de la question précédente dans la relation (R_1) , on obtient :

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}$$
$$(n+1)a_0 + \frac{n(n+1)}{2} = na_0 + \frac{n(3n+1)}{2}$$

donc $a_0 = (n+1)a_0 - na_0 = \frac{n(3n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(2n)}{2} = \boxed{n^2}$.

3. Résoudre le problème dans les cas $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

► D'après le résultat précédent, $\boxed{\text{il y a une seule relation du type } (\text{R}_1) \text{ pour chaque valeur de } n}$:

— pour $n = 1$: $\boxed{1 + 2 = 3}$,

— pour $n = 2$: $\boxed{4 + 5 + 6 = 7 + 8}$,

— et pour $n = 3$: $\boxed{9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15}$.

N'oubliez pas de préciser qu'il existe une seule relation pour chaque valeur de n afin de montrer que vous avez bien compris l'énoncé. Ainsi, dans le cas $n = 1$, la réponse à la question 1 prouve seulement qu'il existe au moins une relation mais non qu'il n'y en a pas d'autres.

Partie 2

Le but de cette partie est de déterminer toutes les relations du type :

$$(b_0)^2 + (b_1)^2 + (b_2)^2 + \cdots + (b_n)^2 = (b_{n+1})^2 + (b_{n+2})^2 + \cdots + (b_{2n})^2 \quad (\text{R}_2)$$

où $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{2n}$ sont des entiers naturels consécutifs rangés dans l'ordre croissant.

4. Montrer que pour tout entier naturel N on a :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + N^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

► On raisonne par récurrence.

Initialisation. On a pour $N = 1$:

$$\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1 = 1^2.$$

Donc le résultat est vrai pour $N = 1$.

On peut aussi initialiser le résultat à $N = 0$, c'est encore plus facile (car la somme ne contient aucun terme) mais pas très intéressant.

Hérédité. On suppose que le résultat est vrai pour un entier naturel N fixé. Montrons que le résultat est vrai au rang $N + 1$. On a :

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (N+1)^2 &= \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + N^2}_{\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}} + (N+1)^2 \\ &= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + (N+1)^2 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{(N+1)}{6}(2N^2 + N + 6N + 6) \\ &= \frac{(N+1)}{6}(2N^2 + 7N + 6). \end{aligned}$$

D'autre part, on a aussi :

$$\frac{(N+1)((N+1)+1)(2(N+1)+1)}{6} = \frac{(N+1)}{6}(N+2)(2N+3) = \frac{(N+1)}{6}(2N^2 + 7N + 6).$$

Par conséquent :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (N+1)^2 = \frac{(N+1)((N+1)+1)(2(N+1)+1)}{6}.$$

Ainsi le résultat est vrai au rang $N + 1$ s'il est vrai au rang N . Et cette implication est vraie pour tout entier naturel N .

Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier naturel N on a :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + N^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

Montrez que vous avez compris la logique des raisonnements par récurrence en les rédigeant précisément.

5. Soient b_0, b_1, \dots, b_{2n} des entiers naturels consécutifs rangés dans l'ordre croissant vérifiant (R_2) .

(a) Exprimer $(b_0)^2 + (b_1)^2 + \dots + (b_n)^2$ et $(b_{n+1})^2 + (b_{n+2})^2 + \dots + (b_{2n})^2$ en fonction de b_0 et n .

► En utilisant le résultat de la question précédente pour $N = b_n$ et $N = b_0 - 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{b_n(b_n+1)(2b_n+1)}{6} &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (b_n)^2 \\ &= \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (b_0 - 1)^2}_{\frac{(b_0-1)((b_0-1)+1)(2(b_0-1)+1)}{6}} + (b_0)^2 + (b_1)^2 + \dots + (b_n)^2 \\ &= \frac{(b_0-1)((b_0-1)+1)(2(b_0-1)+1)}{6} + (b_0)^2 + (b_1)^2 + \dots + (b_n)^2. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
 (b_0)^2 + (b_1)^2 + \dots + (b_n)^2 &= \frac{(b_0 + n)((b_0 + n) + 1)(2(b_0 + n) + 1)}{6} - \frac{(b_0 - 1)b_0(2b_0 - 1)}{6} \\
 &= \frac{1}{6} \left((b_0 + n)[b_0 + (n + 1)][2b_0 + (2n + 1)] - b_0(b_0 - 1)(2b_0 - 1) \right) \\
 &= \frac{1}{6} \left((b_0 + n)[2b_0^2 + (4n + 3)b_0 + (n + 1)(2n + 1)] - b_0(2b_0^2 - 3b_0 + 1) \right) \\
 &= \frac{1}{6} \left(2b_0^3 + (6n + 3)b_0^2 + [4n^2 + 3n + (n + 1)(2n + 1)]b_0 + n(n + 1)(2n + 1) - 2b_0^3 + 3b_0^2 - b_0 \right) \\
 &= \frac{1}{6} \left((6n + 6)b_0^2 + (6n^2 + 6n + 1 - 1)b_0 + n(n + 1)(2n + 1) \right) \\
 &= \boxed{(n + 1)b_0^2 + n(n + 1)b_0 + \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}}.
 \end{aligned}$$

On peut également mener le calcul de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 (b_0)^2 + (b_1)^2 + (b_2)^2 + \dots + (b_n)^2 &= b_0^2 + (b_0 + 1)^2 + (b_0 + 2)^2 + \dots + (b_0 + n)^2 \\
 &= b_0^2 + b_0^2 + 2b_0 + 1 + b_0^2 + 4b_0 + 4 + \dots + b_0^2 + 2nb_0 + n^2 \\
 &= (n + 1)b_0^2 + 2(1 + 2 + \dots + n)b_0 + (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) \\
 &= (n + 1)b_0^2 + 2n \frac{1 + n}{2} b_0 + \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} \\
 &= (n + 1)b_0^2 + n(n + 1)b_0 + \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.
 \end{aligned}$$

De même, en utilisant le résultat de la question précédente pour $N = b_{2n}$ et $N = b_n$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 &(b_{n+1})^2 + (b_{n+2})^2 + \dots + (b_{2n})^2 \\
 &= \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (b_{2n})^2 \right) - \left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (b_n)^2 \right) \\
 &= \frac{b_{2n}(b_{2n} + 1)(2b_{2n} + 1)}{6} - \frac{b_n(b_n + 1)(2b_n + 1)}{6} \\
 &= \frac{1}{6} \left((b_0 + 2n)[b_0 + (2n + 1)][2b_0 + (4n + 1)] \right. \\
 &\quad \left. - (b_0 + n)[b_0 + (n + 1)][2b_0 + (2n + 1)] \right) \\
 &= \frac{1}{6} \left((b_0 + 2n)[2b_0^2 + (8n + 3)b_0 + (2n + 1)(4n + 1)] \right. \\
 &\quad \left. - (b_0 + n)[2b_0^2 + (4n + 3)b_0 + (n + 1)(2n + 1)] \right) \\
 &= \frac{1}{6} \left(2b_0^3 + (12n + 3)b_0^2 + [16n^2 + 6n + (2n + 1)(4n + 1)]b_0 + 2n(2n + 1)(4n + 1) \right. \\
 &\quad \left. - (2b_0^3 + (6n + 3)b_0^2 + [4n^2 + 3n + (n + 1)(2n + 1)]b_0 + n(n + 1)(2n + 1)) \right) \\
 &= \frac{1}{6} \left(6nb_0^2 + (24n^2 + 12n + 1 - 6n^2 - 6n - 1)b_0 + n(2n + 1)[2(4n + 1) - (n + 1)] \right) \\
 &= \frac{1}{6} \left(6nb_0^2 + 6n(3n + 1)b_0 + n(2n + 1)(7n + 1) \right) \\
 &= \boxed{nb_0^2 + n(3n + 1)b_0 + \frac{n(2n + 1)(7n + 1)}{6}}.
 \end{aligned}$$

(b) Montrer que b_0 est solution d'une équation de degré 2 dont les coefficients dépendent de n .

► En utilisant les résultats de la question précédente dans la relation (R₂), on obtient :

$$(b_0)^2 + (b_1)^2 + \dots + (b_n)^2 = (b_{n+1})^2 + (b_{n+2})^2 + \dots + (b_{2n})^2$$

$$(n+1)b_0^2 + n(n+1)b_0 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = nb_0^2 + n(3n+1)b_0 + \frac{n(2n+1)(7n+1)}{6}$$

donc $b_0^2 = (n+1)b_0^2 - nb_0^2 = n[(3n+1) - (n+1)]b_0 + \frac{n(2n+1)}{6}[(7n+1) - (n+1)] = 2n^2b_0 + n^2(2n+1)$

et par conséquent $\boxed{b_0^2 - 2n^2b_0 - n^2(2n+1) = 0}$.

(c) En déduire une expression de b_0 en fonction de n .

► Le discriminant de l'équation de degré 2 obtenue à la question précédente vaut :

$$\Delta = (-2n^2)^2 + 4n^2(2n+1) = 4n^2(n^2 + 2n + 1) = 4n^2(n+1)^2 > 0 \quad \text{car } n \geq 1.$$

Ainsi l'équation admet deux solutions :

$$\frac{2n^2 + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{2n^2 + 2n(n+1)}{2} = n(2n+1) > 0 \quad \text{et} \quad \frac{2n^2 - \sqrt{\Delta}}{2} = -n < 0.$$

Puisque b_0 est un entier naturel solution de cette équation, on en déduit que $\boxed{b_0 = n(2n+1)}$.

6. Résoudre le problème dans les cas $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

► D'après le résultat précédent, $\boxed{\text{il y a une seule relation du type (R}_2\text{) pour chaque valeur de } n}$:

— pour $n = 1$: $\boxed{3^2 + 4^2 = 5^2}$,

— pour $n = 2$: $\boxed{10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2}$,

— et pour $n = 3$: $\boxed{21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2}$.

Partie 3

Le but de cette partie est de déterminer toutes les relations du type :

$$(c_0)^3 + (c_1)^3 + (c_2)^3 + \dots + (c_n)^3 = (c_{n+1})^3 + (c_{n+2})^3 + \dots + (c_{2n})^3 \quad (\text{R}_3)$$

où $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{2n}$ sont des entiers naturels consécutifs rangés dans l'ordre croissant.

7. Montrer que pour tout entier naturel N on a :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + N^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}.$$

► On raisonne par récurrence.

Initialisation. On a pour $N = 1$:

$$\frac{N^2(N+1)^2}{4} = \frac{1 \times 4}{4} = 1 = 1^2.$$

Donc le résultat est vrai pour $N = 1$.

Hérédité. On suppose que le résultat est vrai pour un entier naturel N fixé. Montrons que le résultat est vrai au rang $N + 1$. On a :

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (N+1)^3 &= \underbrace{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + N^3}_{\frac{N^2(N+1)^2}{4}} + (N+1)^3 \\ &= \frac{N^2(N+1)^2}{4} + (N+1)^3 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{(N+1)^2}{4}(N^2 + 4N + 4) \\ &= \frac{(N+1)^2}{4}(N+2)^2 \\ &= \frac{(N+1)^2((N+1)+1)^2}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi le résultat est vrai au rang $N + 1$ s'il est vrai au rang N . Et cette implication est vraie pour tout entier naturel N .

Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier naturel N on a :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + N^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}.$$

8. Soient c_0, c_1, \dots, c_{2n} des entiers naturels consécutifs rangés dans l'ordre croissant vérifiant (R_3) .

(a) Exprimer $(c_0)^3 + (c_1)^3 + \dots + (c_n)^3$ et $(c_{n+1})^3 + (c_{n+2})^3 + \dots + (c_{2n})^3$ en fonction de c_0 et n .

► En utilisant le résultat de la question précédente pour $N = c_n$ et $N = c_0 - 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} & (c_0)^3 + (c_1)^3 + \dots + (c_n)^3 \\ &= \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (c_n)^3\right) - \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (c_0 - 1)^3\right) \\ &= \frac{c_n^2(c_n + 1)^2}{4} - \frac{(c_0 - 1)^2((c_0 - 1) + 1)^2}{4} \\ &= \frac{1}{4} \left((c_0 + n)^2 [c_0 + (n + 1)]^2 - c_0^2 (c_0 - 1)^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left([c_0^2 + 2nc_0 + n^2] [c_0^2 + 2(n + 1)c_0 + (n + 1)^2] - c_0^2 [c_0^2 - 2c_0 + 1] \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(c_0^4 + (4n + 2)c_0^3 + [(n + 1)^2 + 4n(n + 1) + n^2]c_0^2 + [2n(n + 1)^2 + 2n^2(n + 1)]c_0 + n^2(n + 1)^2 \right. \\ &\quad \left. - c_0^4 + 2c_0^3 - c_0^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left((4n + 4)c_0^3 + (6n^2 + 6n + 1 - 1)c_0^2 + (4n^3 + 6n^2 + 2n)c_0 + n^2(n + 1)^2 \right) \\ &= \boxed{(n + 1)c_0^3 + \frac{3n(n + 1)}{2}c_0^2 + \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2}c_0 + \frac{n^2(n + 1)^2}{4}}. \end{aligned}$$

On peut également mener le calcul de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & (c_0)^3 + (c_1)^3 + (c_2)^3 + \dots + (c_n)^3 \\ &= c_0^3 + c_0^3 + 3c_0^2 + 3c_0 + 1 + c_0^3 + 6c_0^2 + 12c_0 + 8 + \dots + c_0^3 + 3nc_0^2 + 3n^2c_0 + n^3 \\ &= (n + 1)c_0^3 + 3(1 + 2 + \dots + n)c_0^2 + 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)c_0 + (1^3 + 2^3 + \dots + n^3) \\ &= (n + 1)c_0^3 + 3n \frac{1 + n}{2} c_0^2 + 3 \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} c_0 + \frac{n^2(n + 1)^2}{4} \\ &= (n + 1)c_0^3 + \frac{3n(n + 1)}{2} c_0^2 + \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2} c_0 + \frac{n^2(n + 1)^2}{4}. \end{aligned}$$

De même, en utilisant le résultat de la question précédente pour $N = c_{2n}$ et $N = c_n$, on obtient :

$$\begin{aligned} & (c_{n+1})^3 + (c_{n+2})^3 + \dots + (c_{2n})^3 \\ &= \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (c_{2n})^3\right) - \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (c_n)^3\right) \\ &= \frac{c_{2n}^2(c_{2n} + 1)^2}{4} - \frac{c_n^2(c_n + 1)^2}{4} \\ &= \frac{1}{4} \left((c_0 + 2n)^2 [c_0 + (2n + 1)]^2 - (c_0 + n)^2 [c_0 + (n + 1)]^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \left([c_0^2 + 4nc_0 + 4n^2] [c_0^2 + 2(2n + 1)c_0 + (2n + 1)^2] \right. \\ &\quad \left. - [c_0^2 + 2nc_0 + n^2] [c_0^2 + 2(n + 1)c_0 + (n + 1)^2] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \left(c_0^4 + (8n+2)c_0^3 + [(2n+1)^2 + 8n(2n+1) + 4n^2]c_0^2 \right. \\
&\quad + [4n(2n+1)^2 + 8n^2(2n+1)]c_0 + 4n^2(2n+1)^2 \\
&\quad - (c_0^4 + (4n+2)c_0^3 + [(n+1)^2 + 4n(n+1) + n^2]c_0^2 \\
&\quad \left. + [2n(n+1)^2 + 2n^2(n+1)]c_0 + n^2(n+1)^2 \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(4nc_0^3 + (24n^2 + 12n + 1 - 6n^2 - 6n - 1)c_0^2 \right. \\
&\quad \left. + (32n^3 + 24n^2 + 4n - 4n^3 - 6n^2 - 2n)c_0 + n^2[4(2n+1)^2 - (n+1)^2] \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(4nc_0^3 + (18n^2 + 6n)c_0^2 + (28n^3 + 18n^2 + 2n)c_0 + n^2(15n^2 + 14n + 3) \right) \\
&= \boxed{nc_0^3 + \frac{3n(3n+1)}{2}c_0^2 + \frac{n(14n^2 + 9n + 1)}{2}c_0 + \frac{n^2(15n^2 + 14n + 3)}{4}}.
\end{aligned}$$

(b) Montrer que $P_n(c_0) = 0$ où P_n est la fonction polynomiale suivante :

$$P_n : x \mapsto x^3 - 3n^2x^2 - 3n^2(2n+1)x - \frac{n^2(7n^2 + 6n + 1)}{2}.$$

► En utilisant les résultats de la question précédente dans la relation (R₃), on obtient :

$$\begin{aligned}
&(n+1)c_0^3 + \frac{3n(n+1)}{2}c_0^2 + \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2}c_0 + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= nc_0^3 + \frac{3n(3n+1)}{2}c_0^2 + \frac{n(14n^2 + 9n + 1)}{2}c_0 + \frac{n^2(15n^2 + 14n + 3)}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{donc } c_0^3 &= (n+1)c_0^3 - nc_0^3 \\
&= \frac{3n}{2}[(3n+1) - (n+1)]c_0^2 + \frac{n}{2}[(14n^2 + 9n + 1) - (2n^2 + 3n + 1)]c_0 \\
&\quad + \frac{n^2}{4}[(15n^2 + 14n + 3) - (n+1)^2] \\
&= 3n^2c_0^2 + n(6n^2 + 3n)c_0 + \frac{n^2}{2}(7n^2 + 6n + 1)
\end{aligned}$$

$$\text{et par conséquent } \boxed{P_n(c_0) = c_0^3 - 3n^2c_0^2 - 3n^2(2n+1)c_0 - \frac{n^2(7n^2 + 6n + 1)}{2} = 0}.$$

9. (a) Dresser le tableau des variations de la fonction P_n en précisant les signes des extrema.

► La fonction P_n polynomiale est continue et dérivable sur \mathbb{R} . Sa dérivée est :

$$P'_n : x \mapsto 3x^2 - 6n^2x - 3n^2(2n+1).$$

On reconnaît une fonction polynomiale de degré 2 donc le discriminant vaut :

$$\Delta = (-6n^2)^2 + 36n^2(2n+1) = 36n^2(n^2 + 2n + 1) = 36n^2(n+1)^2 \quad \text{car } n \geq 1.$$

Ainsi P'_n admet deux racines :

$$\frac{6n^2 + \sqrt{\Delta}}{2 \times 3} = \frac{6n^2 + 6n(n+1)}{6} = n(2n+1) > 0 \quad \text{et} \quad \frac{6n^2 - \sqrt{\Delta}}{2 \times 3} = -n < 0.$$

On en déduit le tableau des variations de la fonction P_n :

x	$-\infty$	$-n$	$n(2n+1)$	$+\infty$			
$P'_n(x)$		+	0	-	0	+	
$P_n(x)$			$P_n(-n)$				$+\infty$
	$-\infty$				$P_n(n(2n+1))$		

On a :

$$\begin{aligned}
 P_n(-n) &= -n^3 - 3n^4 + 3n^3(2n+1) - \frac{n^2(7n^2+6n+1)}{2} \\
 &= \frac{n^2}{2}(-2n - 6n^2 + 12n^2 + 6n - 7n^2 - 6n - 1) \\
 &= \frac{n^2}{2}(-n^2 - 2n - 1) = -\frac{n^2}{2}(n+1)^2.
 \end{aligned}$$

Puisque $n \geq 1$, on en déduit que $P_n(-n) < 0$. Puisque P_n est strictement décroissante sur $[-n, n(2n+1)]$, on a aussi $P_n(n(2n+1)) < 0$.

Ne perdez pas de temps en calculs inutiles. Ici, la lecture du tableau des variations de P_n permet d'éviter le calcul de $P_n(n(2n+1))$.

(b) On désigne par k_n l'entier $n(3n+2)$. Déterminer le signe de $P_n(k_n)$ et celui de $P_n(k_n+1)$.

► On a :

$$\begin{aligned}
 P_n(k_n) &= k_n^3 - 3n^2k_n^2 - 3n^2(2n+1)k_n - \frac{n^2(7n^2+6n+1)}{2} \\
 &= n^3(3n+2)^3 - 3n^4(3n+2)^2 - 3n^3(2n+1)(3n+2) - \frac{n^2(7n^2+6n+1)}{2} \\
 &= \frac{n^2}{2} \left(2n(27n^3 + 54n^2 + 36n + 8) - 6n^2(9n^2 + 12n + 4) \right. \\
 &\quad \left. - 6n(6n^2 + 7n + 2) - (7n^2 + 6n + 1) \right) \\
 &= \frac{n^2}{2}(-n^2 - 2n - 1) = -\frac{n^2}{2}(n+1)^2
 \end{aligned}$$

Puisque $n \geq 1$, on en déduit que $P_n(k_n) < 0$. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
 P_n(k_n+1) &= (k_n+1)^3 - 3n^2(k_n+1)^2 - 3n^2(2n+1)(k_n+1) - \frac{n^2(7n^2+6n+1)}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left(2k_n^3 + 6k_n^2 + 6k_n + 2 - 6n^2(k_n^2 + 2k_n + 1) \right. \\
 &\quad \left. - 6n^2(2n+1)(3n^2 + 2n + 1) - n^2(7n^2 + 6n + 1) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(2n^3(27n^3 + 54n^2 + 36n + 8) + 6n^2(9n^2 + 12n + 4) + 6n(3n+2) + 2 \right. \\
 &\quad \left. - 6n^2(9n^4 + 12n^3 + 10n^2 + 4n + 1) \right. \\
 &\quad \left. - 6n^2(6n^3 + 7n^2 + 4n + 1) - n^2(7n^2 + 6n + 1) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(17n^4 + 34n^3 + 29n^2 + 12n + 2 \right).
 \end{aligned}$$

Puisque $n \geq 1$, on en déduit que $P_n(k_n+1) > 0$.

(c) Conclure.

► D'après les résultats de la question 9(a) et le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $P_n(x) = 0$ admet une unique solution réelle qui appartient à l'intervalle $]n(2n + 1), +\infty[$.

x	$n(2n + 1)$	k_n	$k_n + 1$	$+\infty$
$P_n(x)$		< 0	0	> 0

D'après les résultats de la question précédente et le théorème des valeurs intermédiaires, cette solution appartient à l'intervalle $]k_n, k_n + 1[$. Or cet intervalle ne contient aucun entier (car ses bornes sont deux entiers consécutifs), donc il n'existe aucun entier naturel c_0 tel que $P_n(c_0) = 0$. On en déduit qu'il n'existe aucune relation du type (R_3) pour chaque valeur de n .