Corrigé du DM n° 1 de mathématiques

Dans tout ce DM, n désigne un entier naturel non nul fixé.

Partie 1

Le but de cette partie est de déterminer toutes les relations du type :

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n} \tag{R$_1$}$$

où $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ sont des entiers naturels consécutifs rangés dans l'ordre croissant.

1. Trouver trois nombres a_0, a_1, a_2 solutions du problème dans le cas $n = 1$.

   ▶ Dans le cas $n = 1$, la relation (R$_1$) s'écrit : $a_0 + a_1 = a_2$. Par exemple, les nombres $\boxed{a_0 = 1}$, $\boxed{a_1 = 2}$ et $\boxed{a_2 = 3}$ sont bien solutions du problème car $1 + 2 = 3$.

2. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ des entiers naturels consécutifs rangés dans l'ordre croissant vérifiant (R$_1$).

   (a) Exprimer $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ et $a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}$ en fonction de a_0 et n.

   ▶ Puisque les entiers naturels $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ sont consécutifs et rangés dans l'ordre croissant, on reconnait les termes d'une suite arithmétique de raison 1. D'où :

$$\underbrace{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}_{n+1 \text{ termes}} = (n+1)\frac{a_0 + a_n}{2} = (n+1)\frac{a_0 + a_0 + n}{2} = \boxed{(n+1)a_0 + \frac{n(n+1)}{2}}$$

$$\text{et} \quad \underbrace{a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}}_{n \text{ termes}} = n\frac{a_{n+1} + a_{2n}}{2} = n\frac{a_0 + n + 1 + a_0 + 2n}{2} = \boxed{na_0 + \frac{n(3n+1)}{2}}.$$

   (b) En déduire une expression de a_0 en fonction de n.

   ▶ En utilisant les résultats de la question précédente dans la relation (R$_1$), on obtient :

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{2n}$$
$$(n+1)a_0 + \frac{n(n+1)}{2} = na_0 + \frac{n(3n+1)}{2}$$
$$\text{donc} \quad a_0 = (n+1)a_0 - na_0 = \frac{n(3n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(2n)}{2} = \boxed{n^2}.$$

3. Résoudre le problème dans les cas $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

   ▶ D'après le résultat précédent, $\boxed{\text{il y a une seule relation du type (R}_1\text{) pour chaque valeur de } n}$:
   — pour $n = 1$: $\boxed{1 + 2 = 3}$,
   — pour $n = 2$: $\boxed{4 + 5 + 6 = 7 + 8}$,
   — et pour $n = 3$: $\boxed{9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15}$.

N'oubliez pas de préciser qu'il existe une seule relation pour chaque valeur de n afin de montrer que vous avez bien compris l'énoncé. Ainsi, dans le cas $n = 1$, la réponse à la question 1 prouve seulement qu'il existe au moins une relation mais non qu'il n'y en a pas d'autres.

Partie 2

Le but de cette partie est de déterminer toutes les relations du type :

$$(b_0)^2 + (b_1)^2 + (b_2)^2 + \cdots + (b_n)^2 = (b_{n+1})^2 + (b_{n+2})^2 + \cdots + (b_{2n})^2 \tag{R$_2$}$$

où $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{2n}$ sont des entiers naturels consécutifs rangés dans l'ordre croissant.

4. Montrer que pour tout entier naturel N on a :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + N^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

► On raisonne par récurrence.
Initialisation. On a pour $N = 1$:

$$\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1 = 1^2.$$

Donc le résultat est vrai pour $N = 1$.

On peut aussi initialiser le résultat à $N = 0$, c'est encore plus facile (car la somme ne contient aucun terme) mais pas très intéressant.

Hérédité. On suppose que le résultat est vrai pour un entier naturel N fixé. Montrons que le résultat est vrai au rang $N + 1$. On a :

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (N+1)^2 &= \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + N^2} + (N+1)^2 \\ &= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + (N+1)^2 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{(N+1)}{6}(2N^2 + N + 6N + 6) \\ &= \frac{(N+1)}{6}(2N^2 + 7N + 6). \end{aligned}$$

D'autre part, on a aussi :

$$\frac{(N+1)((N+1)+1)(2(N+1)+1)}{6} = \frac{(N+1)}{6}(N+2)(2N+3) = \frac{(N+1)}{6}(2N^2 + 7N + 6).$$

Par conséquent :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (N+1)^2 = \frac{(N+1)((N+1)+1)(2(N+1)+1)}{6}.$$

Ainsi le résultat est vrai au rang $N + 1$ s'il est vrai au rang N. Et cette implication est vraie pour tout entier naturel N.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier naturel N on a :

$$\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + N^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}}.$$

Montrez que vous avez compris la logique des raisonnements par récurrence en les rédigeant précisément.

5. Soient $b_0, b_1, \ldots, b_{2n}$ des entiers naturels consécutifs rangés dans l'ordre croissant vérifiant (R_2).
   (a) Exprimer $(b_0)^2 + (b_1)^2 + \cdots + (b_n)^2$ et $(b_{n+1})^2 + (b_{n+2})^2 + \cdots + (b_{2n})^2$ en fonction de b_0 et n.
   ► En utilisant le résultat de la question précédente pour $N = b_n$ et $N = b_0 - 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{b_n(b_n+1)(2b_n+1)}{6} &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (b_n)^2 \\ &= \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (b_0-1)^2} + (b_0)^2 + (b_1)^2 + \cdots + (b_n)^2 \\ &= \frac{(b_0-1)((b_0-1)+1)(2(b_0-1)+1)}{6} + (b_0)^2 + (b_1)^2 + \cdots + (b_n)^2. \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
(b_0)^2+(b_1)^2+\cdots+(b_n)^2 &= \frac{(b_0+n)((b_0+n)+1)(2(b_0+n)+1)}{6}-\frac{(b_0-1)b_0(2b_0-1)}{6}\\
&= \frac{1}{6}\Big((b_0+n)[b_0+(n+1)][2b_0+(2n+1)]-b_0(b_0-1)(2b_0-1)\Big)\\
&= \frac{1}{6}\Big((b_0+n)[2b_0^2+(4n+3)b_0+(n+1)(2n+1)]-b_0(2b_0^2-3b_0+1)\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6}\Big(2b_0^3+(6n+3)b_0^2+[4n^2+3n+(n+1)(2n+1)]b_0+n(n+1)(2n+1)-2b_0^3+3b_0^2-b_0\Big)\\
&= \frac{1}{6}\Big((6n+6)b_0^2+(6n^2+6n+1-1)b_0+n(n+1)(2n+1)\Big)\\
&= \boxed{(n+1)b_0^2+n(n+1)b_0+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}.
\end{aligned}$$

On peut également mener le calcul de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
(b_0)^2+(b_1)^2+(b_2)^2+\cdots+(b_n)^2 &= b_0^2+(b_0+1)^2+(b_0+2)^2+\cdots+(b_0+n)^2\\
&= b_0^2+b_0^2+2b_0+1+b_0^2+4b_0+4+\cdots+b_0^2+2nb_0+n^2\\
&= (n+1)b_0^2+2(1+2+\cdots+n)b_0+(1^2+2^2+\cdots+n^2)\\
&= (n+1)b_0^2+2n\frac{1+n}{2}b_0+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\
&= (n+1)b_0^2+n(n+1)b_0+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

De même, en utilisant le résultat de la question précédente pour $N=b_{2n}$ et $N=b_n$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&(b_{n+1})^2+(b_{n+2})^2+\cdots+(b_{2n})^2\\
=&\Big(1^2+2^2+3^2+\cdots+(b_{2n})^2\Big)-\Big(1^2+2^2+3^2+\cdots+(b_n)^2\Big)\\
=&\frac{b_{2n}(b_{2n}+1)(2b_{2n}+1)}{6}-\frac{b_n(b_n+1)(2b_n+1)}{6}\\
=&\frac{1}{6}\Big((b_0+2n)[b_0+(2n+1)][2b_0+(4n+1)]\\
&\qquad -(b_0+n)[b_0+(n+1)][2b_0+(2n+1)]\Big)\\
=&\frac{1}{6}\Big((b_0+2n)[2b_0^2+(8n+3)b_0+(2n+1)(4n+1)]\\
&\qquad -(b_0+n)[2b_0^2+(4n+3)b_0+(n+1)(2n+1)]\Big)\\
=&\frac{1}{6}\Big(2b_0^3+(12n+3)b_0^2+[16n^2+6n+(2n+1)(4n+1)]b_0+2n(2n+1)(4n+1)\\
&\qquad -(2b_0^3+(6n+3)b_0^2+[4n^2+3n+(n+1)(2n+1)]b_0+n(n+1)(2n+))\Big)\\
=&\frac{1}{6}\Big(6nb_0^2+(24n^2+12n+1-6n^2-6n-1)b_0+n(2n+1)[2(4n+1)-(n+1)]\Big)\\
=&\frac{1}{6}\Big(6nb_0^2+6n(3n+1)b_0+n(2n+1)(7n+1)\Big)\\
=&\boxed{nb_0^2+n(3n+1)b_0+\frac{n(2n+1)(7n+1)}{6}}.
\end{aligned}$$

(b) Montrer que b_0 est solution d'une équation de degré 2 dont les coefficients dépendent de n.

▶ En utilisant les résultats de la question précédente dans la relation (R_2), on obtient :

$$(b_0)^2+(b_1)^2+\cdots+(b_n)^2=(b_{n+1})^2+(b_{n+2})^2+\cdots+(b_{2n})^2$$
$$(n+1)b_0^2+n(n+1)b_0+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=nb_0^2+n(3n+1)b_0+\frac{n(2n+1)(7n+1)}{6}$$

donc $\quad b_0^2=(n+1)b_0^2-nb_0^2=n[(3n+1)-(n+1)]b_0+\dfrac{n(2n+1)}{6}[(7n+1)-(n+1)]=2n^2b_0+n^2(2n+1)$

et par conséquent $\boxed{b_0^2-2n^2b_0-n^2(2n+1)=0}$.

(c) En déduire une expression de b_0 en fonction de n.

▶ Le discriminant de l'équation de degré 2 obtenue à la question précédente vaut :

$$\Delta=\left(-2n^2\right)^2+4n^2(2n+1)=4n^2(n^2+2n+1)=4n^2(n+1)^2>0\quad\text{car } n\geqslant 1.$$

Ainsi l'équation admet deux solutions :

$$\frac{2n^2+\sqrt{\Delta}}{2}=\frac{2n^2+2n(n+1)}{2}=n(2n+1)>0\quad\text{et}\quad\frac{2n^2-\sqrt{\Delta}}{2}=-n<0.$$

Puisque b_0 est un entier naturel solution de cette équation, on en déduit que $\boxed{b_0=n(2n+1)}$.

6. Résoudre le problème dans les cas $n=1$, $n=2$ et $n=3$.

▶ D'après le résultat précédent, $\boxed{\text{il y a une seule relation du type } (\mathrm{R}_2) \text{ pour chaque valeur de } n}$:

— pour $n=1$: $\boxed{3^2+4^2=5^2}$,

— pour $n=2$: $\boxed{10^2+11^2+12^2=13^2+14^2}$,

— et pour $n=3$: $\boxed{21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2}$.

Partie 3

Le but de cette partie est de déterminer toutes les relations du type :

$$(c_0)^3+(c_1)^3+(c_2)^3+\cdots+(c_n)^3=(c_{n+1})^3+(c_{n+2})^3+\cdots+(c_{2n})^3\qquad(\mathrm{R}_3)$$

où $c_0,c_1,c_2,\ldots,c_{2n}$ sont des entiers naturels consécutifs rangés dans l'ordre croissant.

7. Montrer que pour tout entier naturel N on a :

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+N^3=\frac{N^2(N+1)^2}{4}.$$

▶ On raisonne par récurrence.

Initialisation. On a pour $N=1$:

$$\frac{N^2(N+1)^2}{4}=\frac{1\times 4}{4}=1=1^2.$$

Donc le résultat est vrai pour $N=1$.

Hérédité. On suppose que le résultat est vrai pour un entier naturel N fixé. Montrons que le résultat est vrai au rang $N+1$. On a :

$$\begin{aligned}1^3+2^3+3^3+\cdots+(N+1)^3&=\underbrace{1^3+2^3+3^3+\cdots+N^3}+(N+1)^3\\&=\frac{N^2(N+1)^2}{4}+(N+1)^3\quad\text{par hypothèse de récurrence}\\&=\frac{(N+1)^2}{4}(N^2+4N+4)\\&=\frac{(N+1)^2}{4}(N+2)^2\\&=\frac{(N+1)^2((N+1)+1)^2}{4}.\end{aligned}$$

Ainsi le résultat est vrai au rang $N+1$ s'il est vrai au rang N. Et cette implication est vraie pour tout entier naturel N.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier naturel N on a :

$$\boxed{1^3+2^3+3^3+\cdots+N^3=\frac{N^2(N+1)^2}{4}}.$$

8. Soient $c_0, c_1, \ldots, c_{2n}$ des entiers naturels consécutifs rangés dans l'ordre croissant vérifiant (R_3).
   (a) Exprimer $(c_0)^3+(c_1)^3+\cdots+(c_n)^3$ et $(c_{n+1})^3+(c_{n+2})^3+\cdots+(c_{2n})^3$ en fonction de c_0 et n.
   ▶ En utilisant le résultat de la question précédente pour $N=c_n$ et $N=c_0-1$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&(c_0)^3+(c_1)^3+\cdots+(c_n)^3\\
=&\left(1^3+2^3+3^3+\cdots+(c_n)^3\right)-\left(1^3+2^3+3^3+\cdots+(c_0-1)^3\right)\\
=&\frac{c_n^2(c_n+1)^2}{4}-\frac{(c_0-1)^2((c_0-1)+1)^2}{4}\\
=&\frac{1}{4}\left((c_0+n)^2[c_0+(n+1)]^2-c_0^2(c_0-1)^2\right)\\
=&\frac{1}{4}\left([c_0^2+2nc_0+n^2][c_0^2+2(n+1)c_0+(n+1)^2]-c_0^2[c_0^2-2c_0+1]\right)\\
=&\frac{1}{4}\Big(c_0^4+(4n+2)c_0^3+[(n+1)^2+4n(n+1)+n^2]c_0^2+[2n(n+1)^2+2n^2(n+1)]c_0+n^2(n+1)^2\\
&\qquad -c_0^4+2c_0^3-c_0^2\Big)\\
=&\frac{1}{4}\left((4n+4)c_0^3+(6n^2+6n+1-1)c_0^2+(4n^3+6n^2+2n)c_0+n^2(n+1)^2\right)\\
=&\boxed{(n+1)c_0^3+\frac{3n(n+1)}{2}c_0^2+\frac{n(2n^2+3n+1)}{2}c_0+\frac{n^2(n+1)^2}{4}}.
\end{aligned}$$

On peut également mener le calcul de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&(c_0)^3+(c_1)^3+(c_2)^3+\cdots+(c_n)^3 c_0^3+(c_0+1)^3+(c_0+2)^3+\cdots+(c_0+n)^3\\
=&c_0^3+c_0^3+3c_0^2+3c_0+1+c_0^3+6c_0^2+12c_0+8+\cdots+c_0^3+3nc_0^2+3n^2c_0+n^3\\
=&(n+1)c_0^3+3(1+2+\cdots+n)c_0^2+3(1^2+2^2+\cdots+n^2)c_0+(1^3+2^3+\cdots+n^3)\\
=&(n+1)c_0^3+3n\frac{1+n}{2}c_0^2+3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}c_0+\frac{n^2(n+1)^2}{4}\\
=&(n+1)c_0^3+\frac{3n(n+1)}{2}c_0^2+\frac{n(2n^2+3n+1)}{2}c_0+\frac{n^2(n+1)^2}{4}.
\end{aligned}$$

De même, en utilisant le résultat de la question précédente pour $N=c_{2n}$ et $N=c_n$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&(c_{n+1})^3+(c_{n+2})^3+\cdots+(c_{2n})^3\\
=&\left(1^3+2^3+3^3+\cdots+(c_{2n})^3\right)-\left(1^3+2^3+3^3+\cdots+(c_n)^3\right)\\
=&\frac{c_{2n}^2(c_{2n}+1)^2}{4}-\frac{c_n^2(c_n+1)^2}{4}\\
=&\frac{1}{4}\left((c_0+2n)^2[c_0+(2n+1)]^2-(c_0+n)^2[c_0+(n+1)]^2\right)\\
=&\frac{1}{4}\Big([c_0^2+4nc_0+4n^2][c_0^2+2(2n+1)c_0+(2n+1)^2]\\
&\qquad -[c_0^2+2nc_0+n^2][c_0^2+2(n+1)c_0+(n+1)^2]\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{4}\Big(c_0^4+(8n+2)c_0^3+[(2n+1)^2+8n(2n+1)+4n^2]c_0^2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +[4n(2n+1)^2+8n^2(2n+1)]c_0+4n^2(2n+1)^2 \\
&\qquad\qquad -(c_0^4+(4n+2)c_0^3+[(n+1)^2+4n(n+1)+n^2]c_0^2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +[2n(n+1)^2+2n^2(n+1)]c_0+n^2(n+1)^2)\Big) \\
&=\frac{1}{4}\Big(4nc_0^3+(24n^2+12n+1-6n^2-6n-1)c_0^2 \\
&\qquad\qquad +(32n^3+24n^2+4n-4n^3-6n^2-2n)c_0+n^2[4(2n+1)^2-(n+1)^2]\Big) \\
&=\frac{1}{4}\Big(4nc_0^3+(18n^2+6n)c_0^2+(28n^3+18n^2+2n)c_0+n^2(15n^2+14n+3)\Big) \\
&=\boxed{nc_0^3+\frac{3n(3n+1)}{2}c_0^2+\frac{n(14n^2+9n+1)}{2}c_0+\frac{n^2(15n^2+14n+3)}{4}}.
\end{aligned}
$$

(b) Montrer que $P_n(c_0)=0$ où P_n est la fonction polynomiale suivante :

$$P_n : x \mapsto x^3-3n^2x^2-3n^2(2n+1)x-\frac{n^2(7n^2+6n+1)}{2}.$$

▶ En utilisant les résultats de la question précédente dans la relation (R_3), on obtient :

$$
\begin{aligned}
&(n+1)c_0^3+\frac{3n(n+1)}{2}c_0^2+\frac{n(2n^2+3n+1)}{2}c_0+\frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
=&nc_0^3+\frac{3n(3n+1)}{2}c_0^2+\frac{n(14n^2+9n+1)}{2}c_0+\frac{n^2(15n^2+14n+3)}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{donc}\quad c_0^3 &= (n+1)c_0^3-nc_0^3 \\
&=\frac{3n}{2}[(3n+1)-(n+1)]c_0^2+\frac{n}{2}[(14n^2+9n+1)-(2n^2+3n+1)]c_0 \\
&\qquad\qquad +\frac{n^2}{4}[(15n^2+14n+3)-(n+1)^2] \\
&=3n^2c_0^2+n(6n^2+3n)c_0+\frac{n^2}{2}(7n^2+6n+1)
\end{aligned}
$$

et par conséquent $\boxed{P_n(c_0)=c_0^3-3n^2c_0^2-3n^2(2n+1)c_0-\frac{n^2(7n^2+6n+1)}{2}=0}$.

9. (a) Dresser le tableau des variations de la fonction P_n en précisant les signes des extrema.

▶ La fonction P_n polynomiale est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est :

$$P_n' : x \mapsto 3x^2-6n^2x-3n^2(2n+1).$$

On reconnaît une fonction polynomiale de degré 2 donc le discriminant vaut :

$$\Delta=\left(-6n^2\right)^2+36n^2(2n+1)=36n^2(n^2+2n+1)=36n^2(n+1)^2 \quad \text{car } n\geqslant 1.$$

Ainsi P_n' admet deux racines :

$$\frac{6n^2+\sqrt{\Delta}}{2\times 3}=\frac{6n^2+6n(n+1)}{6}=n(2n+1)>0 \quad\text{et}\quad \frac{6n^2-\sqrt{\Delta}}{2\times 3}=-n<0.$$

On en déduit le tableau des variations de la fonction P_n :

x	$-\infty$		$-n$		$n(2n+1)$		$+\infty$
$P_n'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$P_n(-n)$	$\searrow$	$P_n(n(2n+1))$	$\nearrow$	$+\infty$

On a :

$$\begin{aligned}P_n(-n) &= -n^3 - 3n^4 + 3n^3(2n+1) - \frac{n^2(7n^2+6n+1)}{2} \\ &= \frac{n^2}{2}\left(-2n - 6n^2 + 12n^2 + 6n - 7n^2 - 6n - 1\right) \\ &= \frac{n^2}{2}\left(-n^2 - 2n - 1\right) = -\frac{n^2}{2}(n+1)^2 .\end{aligned}$$

Puisque $n \geqslant 1$, on en déduit que $\boxed{P_n(-n) < 0}$. Puisque P_n est strictement décroissante sur $[-n, n(2n+1)]$, on a aussi $\boxed{P_n(n(2n+1)) < 0}$.

Ne perdez pas de temps en calculs inutiles. Ici, la lecture du tableau des variations de P_n permet d'obtenir directement le signe de $P_n(n(2n+1))$ à l'aide de celui de $P_n(-n)$. Le calcul aurait donné :

$$P_n(n(2n+1)) = -\frac{n^2}{2}\left(8n^4 + 24n^3 + 25n^2 + 10n + 1\right) < 0.$$

(b) On désigne par k_n l'entier $n(3n+2)$. Déterminer le signe de $P_n(k_n)$ et celui de $P_n(k_n+1)$.

▶ On a :

$$\begin{aligned}P_n(k_n) &= k_n^3 - 3n^2k_n^2 - 3n^2(2n+1)k_n - \frac{n^2(7n^2+6n+1)}{2} \\ &= n^3(3n+2)^3 - 3n^4(3n+2)^2 - 3n^3(2n+1)(3n+2) - \frac{n^2(7n^2+6n+1)}{2} \\ &= \frac{n^2}{2}\Big(2n(27n^3 + 54n^2 + 36n + 8) - 6n^2(9n^2 + 12n + 4) \\ &\qquad - 6n(6n^2 + 7n + 2) - (7n^2 + 6n + 1)\Big) \\ &= \frac{n^2}{2}\left(-n^2 - 2n - 1\right) = -\frac{n^2}{2}(n+1)^2\end{aligned}$$

Puisque $n \geqslant 1$, on en déduit que $\boxed{P_n(k_n) < 0}$. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}P_n(k_n+1) &= (k_n+1)^3 - 3n^2(k_n+1)^2 - 3n^2(2n+1)(k_n+1) - \frac{n^2(7n^2+6n+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}\Big(2k_n^3 + 6k_n^2 + 6k_n + 2 - 6n^2(k_n^2 + 2k_n + 1) \\ &\qquad - 6n^2(2n+1)(3n^2+2n+1) - n^2(7n^2+6n+1)\Big)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\Big(2n^3(27n^3+54n^2+36n+8)+6n^2(9n^2+12n+4)+6n(3n+2)+2 - 6n^2(9n^4+12n^3+10n^2+4n+1) - 6n^2(6n^3+7n^2+4n+1)-n^2(7n^2+6n+1)\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\Big(17n^4+34n^3+29n^2+12n+2\Big).$$

Puisque $n \geqslant 1$, on en déduit que $\boxed{P_n(k_n+1)>0}$.

(c) Conclure.

▶ D'après les résultats de la question 9(a) et le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $P_n(x)=0$ admet une unique solution réelle qui appartient à l'intervalle $]n(2n+1),+\infty[$.

x	$n(2n+1)$	k_n		k_n+1	$+\infty$
$P_n(x)$	<0	<0	0	>0	$+\infty$

D'après les résultats de la question précédente et le théorème des valeurs intermédiaires, cette solution appartient à l'intervalle $]k_n,k_n+1[$. Or cet intervalle ne contient aucun entier (car ses bornes sont deux entiers consécutifs), donc il n'existe aucun entier naturel c_0 tel que $P_n(c_0)=0$. On en déduit qu'$\boxed{\text{il n'existe aucune relation du type } (\mathrm{R}_3) \text{ pour chaque valeur de } n}$.