

DM n° 2 de mathématiques

à rendre au plus tard le jeudi 10 novembre

Recommandations : portez un soin particulier à la rédaction et la présentation de votre copie, rédigez vos réponses dans un français correct (faites attention à l'orthographe et la grammaire mais aussi à la syntaxe et la sémantique), soyez clairs dans vos raisonnements, répondez précisément aux questions posées, mettez en évidence vos résultats, aérez votre copie, etc.

Partie 1

Dans cette partie, on fixe un nombre complexe w et on cherche, sous forme algébrique, ses racines deuxièmes complexes, c'est-à-dire les solutions de l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 = w \quad (\text{E}_1)$$

1. Dans cette question, on suppose que $\text{Im}(w) = 0$. Déterminer les racines deuxièmes complexes de w sous forme algébrique en fonction de w (on distinguera plusieurs cas en fonction de w).
2. On suppose désormais que $\text{Im}(w) \neq 0$.
 - (a) Démontrer que $z = x + iy \in \mathbb{C}$ est solution de (E₁) si et seulement si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est solution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \text{Re}(w) \\ 2xy = \text{Im}(w) \\ x^2 + y^2 = |w| \end{cases} \quad (\text{S})$$

- (b) Justifier que les expressions $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(|w| + \text{Re}(w))}$ et $\beta = \sqrt{\frac{1}{2}(|w| - \text{Re}(w))}$ sont bien définies.
- (c) Résoudre le système d'équations suivant d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \text{Re}(w) \\ x^2 + y^2 = |w| \end{cases} \quad (\text{S}')$$

en exprimant les solutions en fonction de α et β .

- (d) Parmi les solutions de (S'), déterminer celles qui sont aussi solutions de (S) (on distinguera plusieurs cas en fonction de w).
 - (e) Conclure en exprimant les racines deuxièmes complexes de w sous forme algébrique en fonction de α et β (on distinguera plusieurs cas en fonction de w).
3. Déterminer les racines deuxièmes complexes de $1, -1, i, j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et \bar{j} .

Partie 2

Le but de cette partie est de présenter une méthode de résolution des équations du second degré à coefficients complexes. On fixe donc trois nombres complexes $a \neq 0, b$ et c et on considère l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (\text{E}_2)$$

4. Écrire l'équation (E₂) sous la forme :

$$(z - u)^2 = w$$

où u et w sont deux nombres complexes à exprimer en fonction de a, b et c .

5. En déduire les solutions de (E₂) à l'aide des résultats de la partie 1 (on distinguera plusieurs cas en fonction de w).
6. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
 - (a) $z^2 - (1 + 2i)z - 1 + i = 0$
 - (b) $2z^2 + 3(2 - i)z + 3 - 4i = 0$
 - (c) $(1 - i)z^2 - 4(1 - 2i)z + 1 - 21i = 0$
 - (d) $(5 + 3i)z^2 + 4(2 - 9i)z - 12(4 - i) = 0$
 - (e) $z^2 - z + i = 0$