DM n° 2 de mathématiques

à rendre au plus tard le jeudi 5 novembre

Ce DM propose d'étudier la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathcal{F}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1-k}{k}.$$

1. (a) Construire les dix premières lignes du triangle de Pascal.
   (b) Dans le triangle de Pascal précédent, pour chaque valeur de l'entier n de 1 à 10, regrouper, en les entourant, tous les coefficients binomiaux qui apparaissent dans la somme $\mathcal{F}_n$.
   (c) En déduire les valeurs des dix premiers termes de la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ puis conjecturer une relation de récurrence linéaire d'ordre deux vérifiée par les termes de la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$.
2. *Info.* On écrira les fonctions demandées en Python.
   (a) Écrire une fonction `fact` qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}$ et qui renvoie sa factorielle $n!$.
   (b) Écrire une fonction `coeffbi` qui prend en argument deux entiers $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ et qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.
   (c) Écrire une fonction `suiteF` qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie $\mathcal{F}_n$.
   (d) Vérifier la relation de récurrence conjecturée à la question 1 au rang $n = 42$.
3. Démontrer la relation de récurrence conjecturée à la question 1.
4. Dans un ouvrage publié en 1202 (l'un des premiers à recommander l'usage des chiffres arabes au lieu des chiffres romains), le mathématicien italien Leonardo $\mathcal{F}$ibonacci a posé le problème suivant :

   > «En partant d'un couple de lapins engendré au début du premier mois, combien de couples de lapins obtient-on au bout d'une année si chaque couple engendre après deux mois d'existence un nouveau couple par mois ?»

   Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note c_n le nombre de couples de lapins à la fin du n-ième mois.
   (a) Calculer les valeurs des six premiers termes de la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ et comparer avec celles des premiers termes de la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$. Quelle conjecture peut-on formuler ?
   (b) Expliquer pourquoi la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la même relation de récurrence que la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$.
   (c) En déduire la réponse au problème de $\mathcal{F}$ibonacci.
   (d) À l'aide du résultat de la question 4(b), prouver la conjecture de la question 4(a).
5. (a) *Info.* Écrire une fonction `sommeF` qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie la somme des n premiers termes de la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$.
   (b) *Info.* Tester la fonction précédente pour chaque valeur de l'entier n de 1 à 10. Quelle conjecture peut-on formuler ? Vérifier cette conjecture au rang $n = 42$.
   (c) À l'aide du résultat de la question 3, démontrer la conjecture précédente.

6. (a) Exprimer le terme général $\mathcal{F}_n$ en fonction de l'entier $n \geqslant 1$ et prouver que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathcal{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi^n - (-1/\varphi)^n\Big)$$

où $\varphi > 1$ est une constante à déterminer.

(b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathcal{F}_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 5^k.$$

7. On s'intéresse maintenant à la suite $(\tau_n = \mathcal{F}_{n+1}/\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ des taux de croissance mensuels du nombre de couples de lapins dans le problème originel de $\mathcal{F}$ibonacci.
   (a) *Info.* Écrire une fonction `tauxF` qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie τ_n.
   (b) Déterminer une fonction réelle $f : x \mapsto f(x)$ telle que $\tau_{n+1} = f(\tau_n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
   (c) Étudier les variations de f ainsi que la position relative de sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.
   (d) Sur un même graphique, représenter la courbe $\mathscr{C}_f$, la droite $\mathscr{D}$ et les premiers termes de $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$.
   (e) Prouver que la suite $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée. Que peut-on dire à propos de sa monotonie ?
   (f) Conjecturer le comportement asymptotique de la suite $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$ (c'est-à-dire le comportement de τ_n quand n tend vers $+\infty$) et démontrer cette conjecture à l'aide du résultat de la question 6(a).
   (g) *Info.* Vérifier le résultat précédent à l'aide de la fonction `tauxF`.