DM n$^{\text{o}}$ 2 de mathématiques

à rendre au plus tard le jeudi 4 octobre

Recommandations : portez un soin particulier à la rédaction et la présentation de votre copie, rédigez vos réponses dans un français correct (faites attention à l'orthographe et la grammaire mais aussi à la syntaxe et la sémantique), soyez clairs dans vos raisonnements, répondez précisément aux questions posées, mettez en évidence vos résultats, aérez votre copie, etc.

Partie 1

Dans cette partie, on fixe un nombre complexe w et on cherche, sous forme algébrique, ses racines deuxièmes complexes, c'est-à-dire les solutions de l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 = w \tag{E$_1$}$$

1. Dans cette question, on suppose que $\mathrm{Im}(w) = 0$. Déterminer les racines deuxièmes complexes de w sous forme algébrique en fonction de w (on distinguera plusieurs cas en fonction de w).
2. On suppose désormais que $\mathrm{Im}(w) \neq 0$.
   (a) Démontrer que $z = x + iy \in \mathbb{C}$ est solution de (E$_1$) si et seulement si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est solution du systèmes d'équations suivant :
   $$\begin{cases} x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(w) \\ 2xy = \mathrm{Im}(w) \\ x^2 + y^2 = |w| \end{cases} \tag{S}$$
   (b) Justifier que les expressions $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(|w| + \mathrm{Re}(w))}$ et $\beta = \sqrt{\frac{1}{2}(|w| - \mathrm{Re}(w))}$ sont bien définies.
   (c) Résoudre le système d'équations suivant d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
   $$\begin{cases} x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(w) \\ x^2 + y^2 = |w| \end{cases} \tag{S'}$$
   en exprimant les solutions en fonction de α et β.
   (d) Parmi les solutions de (S'), déterminer celles qui sont aussi solutions de (S) (on distinguera plusieurs cas en fonction de w).
   (e) Conclure en exprimant les racines deuxièmes complexes de w sous forme algébrique en fonction de α et β (on distinguera plusieurs cas en fonction de w).
3. Déterminer les racines deuxièmes complexes de 1, -1, i, $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{j}$.

Partie 2

Le but de cette partie est de présenter une méthode de résolution des équations du second degré à coefficients complexes. On fixe donc trois nombres complexes $a \neq 0$, b et c et on considère l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{E$_2$}$$

4. Écrire l'équation (E$_2$) sous la forme :
   $$(z - u)^2 = w$$
   où u et w sont deux nombres complexes à exprimer en fonction de a, b et c.
5. En déduire les solutions de (E$_2$) à l'aide des résultats de la partie 1 (on distinguera plusieurs cas en fonction de w).
6. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
   (a) $z^2 - (1 + 2i)z - 1 + i = 0$
   (b) $2z^2 + 3(2 - i)z + 3 - 4i = 0$
   (c) $(1 - i)z^2 - 4(1 - 2i)z + 1 - 21i = 0$
   (d) $(5 + 3i)z^2 + 4(2 - 9i)z - 12(4 - i) = 0$
   (e) $z^2 - z + i = 0$