Corrigé du DM n° 2 de mathématiques

Partie 1

Dans cette partie, on fixe un nombre complexe w et on cherche, sous forme algébrique, ses racines deuxièmes complexes, c'est-à-dire les solutions de l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 = w \tag{E_1}$$

1. Dans cette question, on suppose que $\mathrm{Im}(w) = 0$. Déterminer les racines deuxièmes complexes de w sous forme algébrique en fonction de w (on distinguera plusieurs cas en fonction de w).

   ► Puisque $\mathrm{Im}(w) = 0$, w est un nombre réel et (E_1) est une équation du second degré à coefficients réels :

   $$(\mathrm{E}_1) \iff z^2 - w = 0 \iff 1 \times z^2 + 0 \times z + (-w) = 0$$

   Son discriminant vaut $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times (-w) = 4w$ et il est donc du signe de w.
   — Si $\Delta > 0$ alors (E_1) admet deux solutions réelles distinctes : $\frac{-0+\sqrt{4w}}{2\times 1} = \sqrt{w}$ et $\frac{-0-\sqrt{4w}}{2\times 1} = -\sqrt{w}$.
   — Si $\Delta = 0$ alors (E_1) admet une seule solution réelle : $\frac{-0}{2\times 1} = 0$.
   — Si $\Delta < 0$ alors (E_1) admet deux solutions complexes conjuguées : $\frac{-0+i\sqrt{|4w|}}{2\times 1} = i\sqrt{|w|}$ et $-i\sqrt{|w|}$.
   On en déduit que les racines deuxièmes complexes de w sont :

   $$\boxed{\begin{cases} \sqrt{w} \quad \text{et} \quad -\sqrt{w} & \text{si } w > 0 \\ \qquad 0 & \text{si } w = 0 \\ i\sqrt{-w} \quad \text{et} \quad -i\sqrt{-w} & \text{si } w < 0 \end{cases}}$$

2. On suppose désormais que $\mathrm{Im}(w) \neq 0$.

   (a) Démontrer que $z = x + iy \in \mathbb{C}$ est solution de (E_1) si et seulement si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est solution du systèmes d'équations suivant :

   $$\begin{cases} x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(w) \\ 2xy = \mathrm{Im}(w) \\ x^2 + y^2 = |w| \end{cases} \tag{S}$$

   ► On raisonne par double implication.
   Sens direct. On suppose que $z = x + iy$ est une solution de (E_1), donc que $z^2 = w$. Alors :

   $$w = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$$

   Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient $\mathrm{Re}(w) = x^2 - y^2$ et $\mathrm{Im}(w) = 2xy$. De plus $|w| = |z^2| = |z|^2 = x^2 + y^2$. Par conséquent, (x, y) est bien une solution de (S).
   Sens réciproque. On suppose que (x, y) est une solution de (S). Alors :

   $$z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy) = \mathrm{Re}(w) + i\mathrm{Im}(w) = w$$

   Par conséquent, $z = x + iy$ est bien une solution de (E_1).
   Conclusion. Par double implications, on en déduit que $\boxed{z = x + iy \in \mathbb{C} \text{ est solution de } (\mathrm{E}_1) \text{ si et seulement si } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ est solution de (S)}}$.

   (b) Justifier que les expressions $\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(|w| + \mathrm{Re}(w))}$ et $\beta = \sqrt{\frac{1}{2}(|w| - \mathrm{Re}(w))}$ sont bien définies.

   ► Pour justifier que les expressions α et β sont bien définies, il suffit de prouver que les quantités $|w| + \mathrm{Re}(w)$ et $|w| - \mathrm{Re}(w)$ sous les racines sont positives. Or on a :

   $$|\mathrm{Re}(w)| = \sqrt{\mathrm{Re}(w)^2} \leqslant \sqrt{\mathrm{Re}(w)^2 + \mathrm{Im}(w)^2} = |w| \quad \text{car } t \mapsto \sqrt{t} \text{ est croissante.}$$

Soyez précis : n'oubliez pas l'argument de la croissance de la fonction racine !

On en déduit que $\mathrm{Re}(w) \leqslant |\mathrm{Re}(w)| \leqslant |w|$ donc $|w| - \mathrm{Re}(w) \geqslant 0$ ce qui prouve que $\boxed{\beta \text{ est bien définie}}$. De même, $-\mathrm{Re}(w) \leqslant |\mathrm{Re}(w)| \leqslant |w|$ donc $|w| + \mathrm{Re}(w) \geqslant 0$ ce qui prouve que $\boxed{\alpha \text{ est bien définie}}$.

(c) Résoudre le système d'équations suivant d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(w) \\ x^2 + y^2 = |w| \end{cases} \qquad \text{(S')}$$

en exprimant les solutions en fonction de α et β.

▶ En sommant et en soustrayant les deux équations de (S'), on obtient :

$$\text{(S')} \iff \begin{cases} 2x^2 = |w| + \mathrm{Re}(w) \\ 2y^2 = |w| - \mathrm{Re}(w) \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}(|w| + \mathrm{Re}(w)) \\ y^2 = \frac{1}{2}(|w| - \mathrm{Re}(w)) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \alpha \text{ ou } x = -\alpha \\ y = \beta \text{ ou } y = -\beta \end{cases}$$

Par conséquent, (S') admet quatre couples solutions : $\boxed{(\alpha, \beta)}$, $\boxed{(\alpha, -\beta)}$, $\boxed{(-\alpha, \beta)}$ et $\boxed{(-\alpha, -\beta)}$.

(d) Parmi les solutions de (S'), déterminer celles qui sont aussi solutions de (S) (on distinguera plusieurs cas en fonction de w).

▶ Une solution $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de (S') est aussi une solution de (S) si et seulement si $2xy = \mathrm{Im}(w)$. Il suffit donc de vérifier cette égalité pour chacune des solutions obtenues à la question précédente. Or on a :

$$2\alpha\beta = 2\sqrt{\tfrac{1}{2}(|w| + \mathrm{Re}(w))}\sqrt{\tfrac{1}{2}(|w| - \mathrm{Re}(w))} = \sqrt{(|w|^2 - \mathrm{Re}(w)^2)} = \sqrt{\mathrm{Im}(w)^2} = |\mathrm{Im}(w)|$$

Puisque $|\mathrm{Im}(w)| = \mathrm{Im}(w)$ si $\mathrm{Im}(w) > 0$ et $|\mathrm{Im}(w)| = -\mathrm{Im}(w)$ si $\mathrm{Im}(w) < 0$, on en déduit que les solutions de (S') qui sont aussi solutions de (S) sont :

$$\boxed{\begin{cases} (\alpha, \beta) \quad \text{et} \quad (-\alpha, -\beta) & \text{si } \mathrm{Im}(w) > 0 \\ (\alpha, -\beta) \quad \text{et} \quad (-\alpha, \beta) & \text{si } \mathrm{Im}(w) < 0 \end{cases}}$$

Il est inutile (et faux) de considérer le cas $\mathrm{Im}(w) = 0$ ici car il a été écarté par l'énoncé au début de la question 2.

(e) Conclure en exprimant les racines deuxièmes complexes de w sous forme algébrique en fonction de α et β (on distinguera plusieurs cas en fonction de w).

▶ D'après les résultats des questions précédentes, on en déduit que les racines deuxièmes complexes de w sont :

$$\boxed{\begin{cases} \alpha + i\beta \quad \text{et} \quad -\alpha - i\beta & \text{si } \mathrm{Im}(w) > 0 \\ \alpha - i\beta \quad \text{et} \quad -\alpha + i\beta & \text{si } \mathrm{Im}(w) < 0 \end{cases}}$$

3. Déterminer les racines deuxièmes complexes de 1, -1, i, $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{j}$.

▶ Il suffit d'appliquer les résultats des questions précédentes.

— Si $w = 1$ alors $\mathrm{Im}(w) = 0$ et $w > 0$. D'après le résultat de la question 1, on en déduit que les racines deuxièmes complexes de 1 sont $\boxed{1}$ et $\boxed{-1}$.

— Si $w = -1$ alors $\mathrm{Im}(w) = 0$ et $w < 0$. D'après le résultat de la question 1, on en déduit que les racines deuxièmes complexes de -1 sont $\boxed{i}$ et $\boxed{-i}$.

— Si $w = i$ alors $\mathrm{Im}(w) = 1 > 0$. De plus, on a :

$$\alpha = \sqrt{\tfrac{1}{2}(|w| + \mathrm{Re}(w))} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt{\tfrac{1}{2}(|w| - \mathrm{Re}(w))} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'après le résultat de la question 2, on en déduit que les racines deuxièmes complexes de i sont $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}$ et $\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

— Si $w = j$ alors $\mathrm{Im}(w) = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$. De plus, on a :

$$|w| = \sqrt{\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4} = 1$$

donc :

$$\alpha = \sqrt{\tfrac{1}{2}(|w| + \mathrm{Re}(w))} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \tfrac{1}{2})} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt{\tfrac{1}{2}(|w| - \mathrm{Re}(w))} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

D'après le résultat de la question 2, on en déduit que les racines deuxièmes complexes de j sont $\boxed{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ et $\boxed{-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \overline{j}}$.

— Si $w = \overline{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ alors $\mathrm{Im}(w) = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$. De plus, $|w| = |\overline{j}| = |j|$ et $\mathrm{Re}(w) = \mathrm{Re}(\overline{j}) = \mathrm{Re}(j)$ donc $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ en reprenant les calculs de l'exemple précédent. D'après le résultat de la question 2, on en déduit que les racines deuxièmes complexes de $\overline{j}$ sont $\boxed{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ et $\boxed{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j}$.

Partie 2

Le but de cette partie est de présenter une méthode de résolution des équations du second degré à coefficients complexes. On fixe donc trois nombres complexes $a \neq 0$, b et c et on considère l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{E$_2$}$$

4. Écrire l'équation (E_2) sous la forme :

$$(z - u)^2 = w$$

où u et w sont deux nombres complexes à exprimer en fonction de a, b et c.

► On a :

$$\begin{aligned}
(\mathrm{E}_2) &\iff az^2 + bz + c = 0 \\
&\iff z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0 \quad \text{car } a \neq 0 \\
&\iff \underbrace{z^2 + 2z\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0 \\
&\iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \\
&\iff \left(z - \underbrace{\left(-\frac{b}{2a}\right)}_{=u}\right)^2 = \underbrace{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}_{=w}
\end{aligned}$$

D'où le résultat en posant $\boxed{u = -\frac{b}{2a}}$ et $\boxed{w = \frac{b^2-4ac}{4a^2}}$.

Attention à la logique de votre démonstration : il est nécessaire de raisonner par équivalences ici pour pouvoir conclure. On peut également opter pour une rédaction par analyse-synthèse afin de trouver u et w, mais il ne faut surtout pas oublier la synthèse !

5. En déduire les solutions de (E_2) à l'aide des résultats de la partie 1 (on distinguera plusieurs cas en fonction de w).

► D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que $z \in \mathbb{C}$ est une solution de (E_2) si et seulement si $z - u$ est une racine deuxième complexe de w. À l'aide des résultats de la partie 1, on obtient que les solutions de (E_2) sont par conséquent :

$$\boxed{\begin{cases} u+\sqrt{w} & \text{et} \quad u-\sqrt{w} & \text{si } \mathrm{Im}(w)=0 \text{ et } w>0 \\ & u & \text{si } w=0 \\ u+i\sqrt{-w} & \text{et} \quad u-i\sqrt{-w} & \text{si } \mathrm{Im}(w)=0 \text{ et } w<0 \\ u+\alpha+i\beta & \text{et} \quad u-\alpha-i\beta & \text{si } \mathrm{Im}(w)>0 \\ u+\alpha-i\beta & \text{et} \quad u-\alpha+i\beta & \text{si } \mathrm{Im}(w)<0 \end{cases}}$$

6. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

(a) $z^2-(1+2i)z-1+i=0$

▶ Dans cet exemple, on a $a=1$, $b=-(1+2i)$ et $c=-1+i$, donc :

$$u=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}+i$$
$$\text{et} \quad w=\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{(1+2i)^2-4(-1+i)}{4}=\frac{1+4i-4+4-4i}{4}=\frac{1}{4}.$$

Ainsi $\mathrm{Im}(w)=0$ et $w>0$. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que les solutions sont :

$$u+\sqrt{w}=\frac{1}{2}+i+\frac{1}{2}=\boxed{1+i} \quad \text{et} \quad u-\sqrt{w}=\boxed{i}.$$

(b) $2z^2+3(2-i)z+3-4i=0$

▶ Dans cet exemple, on a $a=2$, $b=3(2-i)$ et $c=3-4i$, donc :

$$u=-\frac{b}{2a}=-\frac{3}{2}+\frac{3i}{4}$$
$$\text{et} \quad w=\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{9(2-i)^2-8(3-4i)}{16}=\frac{36-36i-9-24+32i}{16}=\frac{3}{16}-\frac{i}{4}.$$

Ainsi $\mathrm{Im}(w)=-\frac{1}{4}<0$. De plus, on a :

$$|w|=\sqrt{\left(\frac{3}{16}\right)^2+\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{(16)^2}\left(9+4^2\right)}=\frac{1}{16}\sqrt{25}=\frac{5}{16}$$

donc :

$$\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}(|w|+\mathrm{Re}(w))}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{16}+\frac{3}{16}\right)}=\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta=\sqrt{\frac{1}{2}(|w|-\mathrm{Re}(w))}=\frac{1}{4}.$$

D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que les solutions sont :

$$u+\alpha-i\beta=-\frac{3}{2}+\frac{3i}{4}+\frac{1}{2}-\frac{i}{4}=\boxed{-1+\frac{i}{2}} \quad \text{et} \quad u-\alpha+i\beta=\boxed{-2+i}.$$

(c) $(1-i)z^2-4(1-2i)z+1-21i=0$

▶ Dans cet exemple, on a $a=1-i$, $b=-4(1-2i)$ et $c=1-21i$, donc :

$$u=-\frac{b}{2a}=2\frac{(1-2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=2\frac{1-2i+i+2}{2}=3-i$$
$$\text{et} \quad w=\frac{b^2-4ac}{4a^2}=\frac{16(1-2i)^2-4(1-i)(1-21i)}{4(1-i)^2}=\frac{4-16i-16-(1-i-21i-21)}{1-2i-1}$$
$$=\frac{8+6i}{-2i}=\frac{(4+3i)i}{-i\times i}=-3+4i.$$

Ainsi $\mathrm{Im}(w) = 4 > 0$. De plus, on a :

$$|w| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

donc :

$$\alpha = \sqrt{\tfrac{1}{2}(|w| + \mathrm{Re}(w))} = 1 \quad \text{et} \quad \beta = \sqrt{\tfrac{1}{2}(|w| - \mathrm{Re}(w))} = 2.$$

D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que les solutions sont :

$$u + \alpha + i\beta = 3 - i + 1 + 2i = \boxed{4 + i} \quad \text{et} \quad u - \alpha - i\beta = \boxed{2 - 3i}.$$

(d) $(5 + 3i)z^2 + 4(2 - 9i)z - 12(4 - i) = 0$

▶ Dans cet exemple, on a $a = 5 + 3i$, $b = 4(2 - 9i)$ et $c = -12(4 - i)$, donc :

$$u = -\frac{b}{2a} = -2\frac{(2-9i)(5-3i)}{(5+3i)(5-3i)} = -2\frac{10 - 45i - 6i - 27}{34} = -2\frac{-17 - 51i}{2 \times 17} = 1 + 3i$$

$$\text{et} \quad w = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{16(2-9i)^2 + 48(5+3i)(4-i)}{4(5+3i)^2} = 4\frac{4 - 36i - 81 + 3(20 + 12i - 5i + 3)}{25 + 30i - 9}$$

$$= 2\frac{-8 - 15i}{8 + 15i} = -2.$$

Ainsi $\mathrm{Im}(w) = 0$ et $w < 0$. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que les solutions sont :

$$u + i\sqrt{-w} = 1 + 3i + i\sqrt{2} = \boxed{1 + \left(3 + \sqrt{2}\right) i} \quad \text{et} \quad u - i\sqrt{-w} = \boxed{1 + \left(3 - \sqrt{2}\right) i}.$$

(e) $z^2 - z + i = 0$

▶ Dans cet exemple, on a $a = 1$, $b = -1$ et $c = i$, donc :

$$u = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\text{et} \quad w = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{1 - 4i}{4} = \frac{1}{4} - i.$$

Ainsi $\mathrm{Im}(w) = -1 < 0$. De plus, on a :

$$|w| = \sqrt{\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{\tfrac{1}{(4)^2}\left(1 + 4^2\right)} = \frac{\sqrt{17}}{4}$$

donc :

$$\alpha = \sqrt{\tfrac{1}{2}(|w| + \mathrm{Re}(w))} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\sqrt{17}}{4} + \tfrac{1}{4}\right)} = \sqrt{\tfrac{2}{4^2}\left(\sqrt{17} + 1\right)} = \frac{\sqrt{2\sqrt{17} + 2}}{4}$$

$$\text{et} \quad \beta = \sqrt{\tfrac{1}{2}(|w| - \mathrm{Re}(w))} = \frac{\sqrt{2\sqrt{17} - 2}}{4}.$$

D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que les solutions sont :

$$u + \alpha - i\beta = \boxed{\frac{2 + \sqrt{2\sqrt{17} + 2}}{4} - \frac{\sqrt{2\sqrt{17} - 2}}{4} i} \quad \text{et} \quad u - \alpha + i\beta = \boxed{\frac{2 - \sqrt{2\sqrt{17} + 2}}{4} + \frac{\sqrt{2\sqrt{17} - 2}}{4} i}.$$

Attention à la lisibilité de votre copie avec ce type de réponse piégeuse : pensez à simplifier vos calculs (on se débarrasse des racines aux dénominateurs et on simplifie les fractions) et soignez votre écriture (on trace jusqu'au bout les traits de fractions et les barres de racines) .