DM n$^{\text{o}}$ 3 de mathématiques

à rendre au plus tard le jeudi 8 novembre

Ce DM propose d'étudier la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathcal{F}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1-k}{k}.$$

1. (a) Construire les dix premières lignes du triangle de Pascal.
   (b) Dans le triangle de Pascal précédent, pour chaque valeur de l'entier n de 1 à 10, regrouper, en les entourant, tous les coefficients binomiaux qui apparaissent dans la somme $\mathcal{F}_n$.
   (c) En déduire les valeurs des dix premiers termes de la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ puis conjecturer une relation de récurrence linéaire d'ordre deux vérifiée par les termes de la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$.
2. Démontrer la relation de récurrence conjecturée à la question précédente.
3. Dans un ouvrage publié en 1202 (l'un des premiers à recommander l'usage des chiffres arabes au lieu des chiffres romains), le mathématicien italien Leonardo $\mathcal{F}$ibonacci a posé le problème suivant :

   > «En partant d'un couple de lapins nouvellement engendré, combien de couples de lapins obtient-on au bout d'une année si chaque couple engendre après deux mois d'existence un nouveau couple par mois ?»

   Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note c_n le nombre de couples de lapins au bout de n mois.
   (a) Calculer les valeurs des six premiers termes de la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ et comparer avec celles des premiers termes de la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$. Quelle conjecture peut-on formuler ?
   (b) Expliquer pourquoi la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la même relation de récurrence que la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$.
   (c) En déduire la réponse au problème de $\mathcal{F}$ibonacci.
   (d) À l'aide du résultat de la question 3(b), prouver la conjecture de la question 3(a).
4. Cette question propose de démontrer quelques propriétés de la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$.
   (a) À l'aide du résultat de la question 2, montrer que :
   $$\forall N \geqslant 1, \quad \sum_{n=1}^{N} \mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{N+2} - 1.$$
   (b) Exprimer le terme général $\mathcal{F}_n$ en fonction de l'entier $n \geqslant 1$ et prouver que :
   $$\forall n \geqslant 1, \quad \mathcal{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi^n - (-1/\varphi)^n\Big)$$
   où $\varphi > 1$ est une constante à déterminer.
   (c) À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire que :
   $$\forall n \geqslant 1, \quad \mathcal{F}_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\ell=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2\ell+1} 5^{\ell}.$$
5. On s'intéresse maintenant à la suite $(\tau_n = \mathcal{F}_{n+1}/\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ des taux de croissance mensuels du nombre de couples de lapins dans le problème originel de $\mathcal{F}$ibonacci.
   (a) Déterminer une fonction réelle f telle que $\tau_{n+1} = f(\tau_n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
   (b) Étudier les variations de f ainsi que la position relative de sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.
   (c) Sur un même graphique, représenter la courbe $\mathscr{C}_f$, la droite $\mathscr{D}$ et les premiers termes de $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$.
   (d) Prouver que la suite $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée. Que peut-on dire à propos de sa monotonie ?
   (e) Conjecturer le comportement asymptotique de la suite $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$ (c'est-à-dire le comportement de τ_n quand n tend vers $+\infty$) et démontrer cette conjecture à l'aide du résultat de la question 4(b).