Corrigé du DM n° 3 de mathématiques

Ce DM propose d'étudier la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

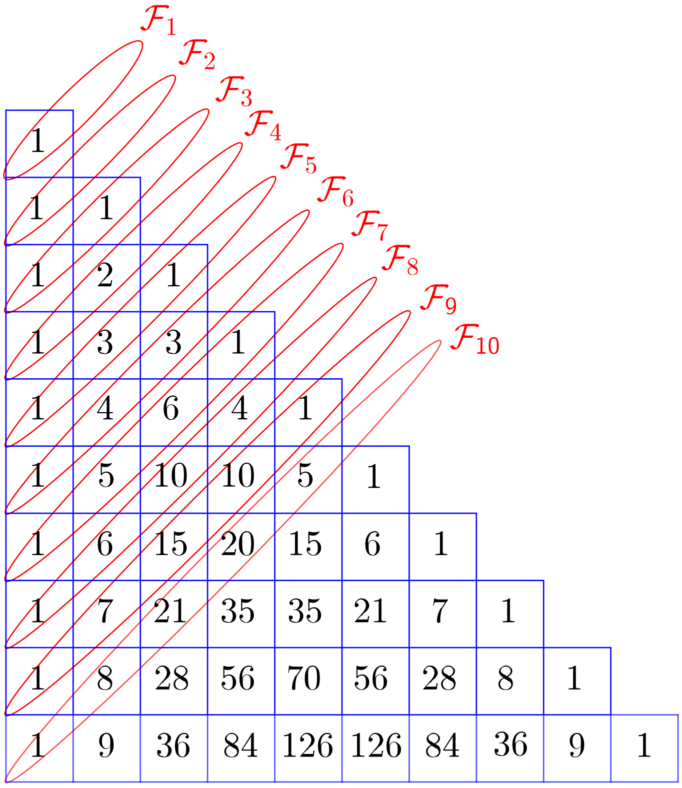
$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathcal{F}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1-k}{k}.$$

1. (a) Construire les dix premières lignes du triangle de Pascal.

▶ Voir la réponse à la question suivante.

(b) Dans le triangle de Pascal précédent, pour chaque valeur de l'entier n de 1 à 10, regrouper, en les entourant, tous les coefficients binomiaux qui apparaissent dans la somme $\mathcal{F}_n$.

▶



On remarque que chaque terme de la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ correspond à la somme des coefficients binomiaux situés sur une diagonale du triangle de Pascal.

(c) En déduire les valeurs des dix premiers termes de la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ puis conjecturer une relation de récurrence linéaire d'ordre deux vérifiée par les termes de la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$.

▶ D'après le triangle de Pascal de la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 &= \boxed{1}, \\
\mathcal{F}_2 &= \boxed{1}, \\
\mathcal{F}_3 = 1+1 &= \boxed{2} = 1+1 = \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_1, \\
\mathcal{F}_4 = 1+2 &= \boxed{3} = 2+1 = \mathcal{F}_3 + \mathcal{F}_2, \\
\mathcal{F}_5 = 1+3+1 &= \boxed{5} = 3+2 = \mathcal{F}_4 + \mathcal{F}_3, \\
\mathcal{F}_6 = 1+4+3 &= \boxed{8} = 5+3 = \mathcal{F}_5 + \mathcal{F}_4, \\
\mathcal{F}_7 = 1+5+6+1 &= \boxed{13} = 8+5 = \mathcal{F}_6 + \mathcal{F}_5, \\
\mathcal{F}_8 = 1+6+10+4 &= \boxed{21} = 13+8 = \mathcal{F}_7 + \mathcal{F}_6, \\
\mathcal{F}_9 = 1+7+15+10+1 &= \boxed{34} = 21+13 = \mathcal{F}_8 + \mathcal{F}_7, \\
\mathcal{F}_{10} = 1+8+21+20+5 &= \boxed{55} = 34+21 = \mathcal{F}_9 + \mathcal{F}_8.
\end{aligned}$$

On conjecture donc la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 suivante :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{\mathcal{F}_{n+2} = \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n}.$$

2. *Informatique. On écrira les fonctions demandées en Python.*

(a) *Écrire une fonction* `fact` *qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}$ et qui renvoie sa factorielle $n!$.*

▶ Par exemple :

```
def fact(n):
    P=1
    for k in range(1,n+1):
        P=P*k
    return P
```

(b) *Écrire une fonction* `coeffbi` *qui prend en argument deux entiers $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ et qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.*

▶ Par exemple :

```
def coeffbi(k,n):
    if k<0 or k>n:
        return 0
    else:
        return fact(n)/(fact(k)*fact(n-k))
```

(c) *Écrire une fonction* `suiteF` *qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie $\mathcal{F}_n$.*

▶ Par exemple :

```
def suiteF(n):
    S=0
    for k in range(n):
        S=S+coeffbi(k,n-1-k)
    return S
```

(d) *Vérifier la relation de récurrence conjecturée à la question 1 au rang $n = 42$.*

▶ La relation de récurrence conjecturée à la question 1 s'écrit pour $n = 42$:

$$\mathcal{F}_{44} = \mathcal{F}_{43} + \mathcal{F}_{42}.$$

On peut vérifier cette conjecture en calculant $\mathcal{F}_{42}$, $\mathcal{F}_{43}$ et $\mathcal{F}_{44}$ à l'aide de la fonction de la question précédente. On obtient avec Python :

```
>>> suiteF(42)
267914296.0

>>> suiteF(43)
433494437.0

>>> suiteF(44)
701408733.0

>>> suiteF(42)+suiteF(43)
701408733.0
```

Donc, $\boxed{\text{la relation de récurrence conjecturée à la question 1 est vraie au rang } n = 42}$.

3. Démontrer la relation de récurrence conjecturée à la question 1.

▶ Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n &= \sum_{k=0}^{(n+1)-1} \binom{(n+1)-1-k}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1-k}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-(1+k)}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} + \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n-\ell}{\ell-1} \quad \text{en posant } \ell = 1+k \iff k = \ell - 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k-1} - \underbrace{\binom{n-0}{0-1}}_{=0} \quad \text{en posant } k = \ell \\
&= \sum_{k=0}^{n} \Bigg(\underbrace{\binom{n-k}{k} + \binom{n-k}{k-1}}_{=\binom{n-k+1}{k}} \Bigg) \quad \text{par linéarité} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+1}{k} \quad \text{d'après la formule de Pascal} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} - \underbrace{\binom{n+1-(n+1)}{n+1}}_{=0} \\
&= \sum_{k=0}^{(n+2)-1} \binom{(n+2)-1-k}{k} = \mathcal{F}_{n+2}.
\end{aligned}$$

On a donc bien démontré la relation de récurrence conjecturée à la question 1 :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{\mathcal{F}_{n+2} = \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n}.$$

4. Dans un ouvrage publié en 1202 (l'un des premiers à recommander l'usage des chiffres arabes au lieu des chiffres romains), le mathématicien italien Leonardo $\mathcal{F}$ibonacci a posé le problème suivant :

> *«En partant d'un couple de lapins engendré au début du premier mois, combien de couples de lapins obtient-on au bout d'une année si chaque couple engendre après deux mois d'existence un nouveau couple par mois ?»*

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note c_n le nombre de couples de lapins à la fin du n-ième mois.

(a) Calculer les valeurs des six premiers termes de la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ et comparer avec celles des premiers termes de la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$. Quelle conjecture peut-on formuler ?

▶

— À la fin du 1$^{\text{er}}$ mois, le couple de lapins de départ n'a pas encore engendré, donc $\boxed{c_1 = 1 = \mathcal{F}_1}$.

— À la fin du 2$^{\text{e}}$ mois, le couple de lapins de départ n'a toujours pas engendré car il n'a pas encore atteint deux mois complets d'existence, donc $\boxed{c_2 = 1 = \mathcal{F}_2}$.

— Au début du 3$^{\text{e}}$ mois, le couple de lapins de départ a engendré un nouveau couple de lapins. À la fin du 3$^{\text{e}}$ mois, ce nouveau couple de lapins n'a pas encore engendré, donc $\boxed{c_3 = 1 + 1 = 2 = \mathcal{F}_3}$.

— Au début du 4$^{\text{e}}$ mois, le couple de lapins de départ a engendré un nouveau couple de lapins. À la fin du 4$^{\text{e}}$ mois, ce nouveau couple de lapins n'a pas encore engendré et le couple de lapins engendré le 3$^{\text{e}}$ mois n'a toujours pas engendré, donc $\boxed{c_4 = 2 + 1 = 3 = \mathcal{F}_4}$.

— Au début du 5$^{\text{e}}$ mois, le couple de lapins de départ et le couple de lapins engendré le 3$^{\text{e}}$ mois ont engendré chacun un nouveau couple de lapins. À la fin du 5$^{\text{e}}$ mois, ces deux nouveaux couples de lapins n'ont pas encore engendré et le couple de lapins engendré le 4$^{\text{e}}$ mois n'a toujours pas engendré, donc $\boxed{c_5 = 3 + 2 = 5 = \mathcal{F}_5}$.

— Au début du 6$^{\text{e}}$ mois, le couple de lapins de départ et les couples de lapins engendrés le 3$^{\text{e}}$ et le 4$^{\text{e}}$ mois ont engendré chacun un nouveau couple de lapins. À la fin du 6$^{\text{e}}$ mois, ces trois nouveaux couples de lapins n'ont pas encore engendré et les deux couples de lapins engendrés le 5$^{\text{e}}$ mois n'ont pas toujours pas engendré, donc $\boxed{c_6 = 5 + 3 = 8 = \mathcal{F}_6}$.

On conjecture donc que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{c_n = \mathcal{F}_n}.$$

N'hésitez pas à vous aider d'un schéma pour ce type de raisonnement.

(b) *Expliquer pourquoi la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la même relation de récurrence que la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$.*

▶ Soit $n \geqslant 1$. Le nombre de couples de lapins à la fin du $(n+2)$-ième mois (c'est-à-dire c_{n+2}) est égal à la somme du nombre de couples de lapins existant déjà à la fin du $(n+1)$-ième mois (donc c_{n+1}) et du nombre de couples de lapins engendrés lors du $(n+2)$-ième mois. Ce dernier nombre est égal au nombre de couples de lapins ayant au moins deux mois d'existence à la fin du $(n+2)$-ième mois, donc au nombre de couples de lapins existant déjà à la fin du n-ième mois (donc c_n). Par conséquent :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{c_{n+2} = c_{n+1} + c_n}.$$

Ainsi $\boxed{(c_n)_{n\geqslant 1} \text{ vérifie la même relation de récurrence que } (\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}}$.

(c) *En déduire la réponse au problème de $\mathcal{F}$ibonacci.*

▶ La réponse au problème de $\mathcal{F}$ibonacci est c_{12}. Or on a d'après les résultats précédents :

$$\begin{aligned}
c_7 &= c_6 + c_5 = 8 + 5 = 13 \\
c_8 &= c_7 + c_6 = 13 + 8 = 21 \\
c_9 &= c_8 + c_7 = 21 + 13 = 34 \\
c_{10} &= c_9 + c_8 = 34 + 21 = 55 \\
c_{11} &= c_{10} + c_9 = 55 + 34 = 89 \\
c_{12} &= c_{11} + c_{10} = 89 + 55 = \boxed{144}.
\end{aligned}$$

(d) *À l'aide du résultat de la question 4(b), prouver la conjecture de la question 4(a).*

▶ On raisonne par récurrence double pour montrer que $c_n = \mathcal{F}_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Initialisation. On a montré que $c_1 = \mathcal{F}_1$ et $c_2 = \mathcal{F}_2$ à la question 4(a), donc la conjecture est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$.

Hérédité. On suppose que $c_n = \mathcal{F}_n$ et $c_{n+1} = \mathcal{F}_{n+1}$ pour un entier $n \geqslant 1$ fixé. Alors :

$$\begin{aligned}
c_{n+2} &= c_{n+1} + c_n \quad \text{d'après la relation de récurrence prouvée à la question 4(b)} \\
&= \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n \quad \text{par hypothèses de récurrence} \\
&= \mathcal{F}_{n+2} \quad \text{d'après la relation de récurrence prouvée à la question 3.}
\end{aligned}$$

On vient donc de montrer que :

$$(c_n = \mathcal{F}_n \text{ et } c_{n+1} = \mathcal{F}_{n+1}) \implies (c_{n+2} = \mathcal{F}_{n+2})$$

et cette implication est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence double, on en déduit bien que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{c_n = \mathcal{F}_n}.$$

5. (a) *Informatique. Écrire une fonction* `sommeF` *qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie la somme des n premiers termes de la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$.*

▶ Par exemple :

```
def sommeF(n):
    S=0
    for k in range(1,n+1):
        S=S+suiteF(k)
    return S
```

(b) *Informatique. Tester la fonction précédente pour chaque valeur de l'entier n de 1 à 10. Quelle conjecture peut-on formuler ? Vérifier cette conjecture au rang $n = 42$.*

▶ On obtient :

```
>>> sommeF(1)
1.0

>>> sommeF(2)
2.0

>>> sommeF(3)
4.0

>>> sommeF(4)
7.0

>>> sommeF(5)
12.0
```

```
>>> sommeF(6)
20.0

>>> sommeF(7)
33.0

>>> sommeF(8)
54.0

>>> sommeF(9)
88.0

>>> sommeF(10)
143.0
```

Or on a déjà vu que :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_3 = 2 \\ \mathcal{F}_4 = 3 \\ \mathcal{F}_5 = 5 \\ \mathcal{F}_6 = 8 \\ \mathcal{F}_7 = 13 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{F}_8 = 21 \\ \mathcal{F}_9 = 34 \\ \mathcal{F}_{10} = 55 \\ \mathcal{F}_{11} = 55 + 34 = 89 \\ \mathcal{F}_{12} = 89 + 55 = 144. \end{cases}$$

On conjecture donc que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{\sum_{k=1}^{n} \mathcal{F}_k = \mathcal{F}_{n+2} - 1}.$$

Pour $n = 42$, on obtient avec Python :

```
>>> sommeF(42)
701408732.0

>>> suiteF(44)
701408733.0
```

Donc $\boxed{\text{la conjecture est vraie pour } n = 42}$.

(c) *À l'aide du résultat de la question 3, démontrer la conjecture précédente.*

▶ Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \mathcal{F}_k &= \sum_{k=1}^{n} \Big(\mathcal{F}_{k+2} - \mathcal{F}_{k+1} \Big) \quad \text{d'après le résultat de la question 3} \\ &= \mathcal{F}_{n+2} - \mathcal{F}_2 \quad \text{en reconnaissant une somme télescopique.}\end{aligned}$$

Or $\mathcal{F}_2 = 1$, donc :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{\sum_{k=1}^{n} \mathcal{F}_k = \mathcal{F}_{n+2} - 1}.$$

On peut aussi démontrer le résultat par récurrence, mais c'est plus long.

6. (a) *Exprimer le terme général $\mathcal{F}_n$ en fonction de l'entier $n \geqslant 1$ et prouver que :*

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathcal{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi^n - (-1/\varphi)^n \Big)$$

où $\varphi > 1$ est une constante à déterminer.

▶ D'après le résultat de la question 3, la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ est récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique d'inconnue $q \in \mathbb{C}$ est :

$$q^2 = q + 1 \iff q^2 - q - 1 = 0.$$

On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$ donc elle admet deux solutions réelles distinctes : $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Ainsi, on sait qu'il existe deux constantes $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathcal{F}_n = \lambda_1 q_1^{n-1} + \lambda_2 q_2^{n-1}.$$

Or on a pour $n = 1$ et $n = 2$:

$$\begin{cases} 1 = \mathcal{F}_1 = \lambda_1 q_1^{1-1} + \lambda_2 q_2^{1-1} = \lambda_1 + \lambda_2 & (L_1) \\ 1 = \mathcal{F}_2 = \lambda_1 q_1^{2-1} + \lambda_2 q_2^{2-1} = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 & (L_2) \end{cases}.$$

En effectuant l'opération $q_2(L_1) - (L_2)$, on obtient :

$$\begin{aligned} q_2 - 1 &= q_2(\lambda_1 + \lambda_2) - (\lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2) \\ &= (q_2 - q_1)\lambda_1 \quad \text{donc} \quad \lambda_1 = \frac{q_2 - 1}{q_2 - q_1} = \frac{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{-2\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{q_1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

En injectant dans (L_1), on obtient :

$$\lambda_2 = 1 - \lambda_1 = 1 - \frac{q_1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{-q_2}{\sqrt{5}}.$$

Par conséquent :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathcal{F}_n = \frac{q_1}{\sqrt{5}} q_1^{n-1} + \frac{-q_2}{\sqrt{5}} q_2^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(q_1^n - q_2^n \Big).$$

D'autre part, $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$ car la fonction racine carrée est strictement croissante, donc $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{3}{2} > 1$ et $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < -\frac{1}{2}$. De plus, $q_1 + q_2 = 1$ et $q_1 q_2 = -1$ car q_1 et q_2 sont les deux solutions de l'équation $q^2 - q - 1 = 0$.

Pensez à utiliser les relations entre coefficients et racines d'un polynôme de second degré afin d'éviter les calculs inutiles et de gagner du temps.

En particulier $q_2 = -1/q_1$ car $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \neq 0$. Finalement, on a bien :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{\mathcal{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi^n - (-1/\varphi)^n\Big)} \quad \text{en posant } \boxed{\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1}.$$

(b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathcal{F}_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} 5^k.$$

▶ Soit $n \geqslant 1$. On a d'après la formule du binôme de Newton :

$$\varphi^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}\left(\sqrt{5}+1\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\sqrt{5}\right)^k 1^{n-k} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}5^{k/2}$$

$$\text{et} \quad (-1/\varphi)^n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 5^{k/2}.$$

Puis en séparant les indices pairs et impairs :

$$\varphi^n = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\binom{n}{2\ell}5^\ell + \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}\binom{n}{2\ell+1}5^{\ell+1/2}\right)$$

$$\text{et} \quad (-1/\varphi)^n = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\binom{n}{2\ell}5^\ell - \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}\binom{n}{2\ell+1}5^{\ell+1/2}\right).$$

On en déduit d'après le résultat de la question précédente que :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi^n - (-1/\varphi)^n\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2^n}\left(0 + 2\sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}\binom{n}{2\ell+1}5^{\ell+1/2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{5^{1/2}} \times \frac{2}{2^n}\sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}\binom{n}{2\ell+1}5^\ell \times 5^{1/2} \\
&= \boxed{\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}\binom{n}{2k+1}5^k}.
\end{aligned}$$

7. *On s'intéresse maintenant à la suite $(\tau_n = \mathcal{F}_{n+1}/\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ des taux de croissance mensuels du nombre de couples de lapins dans le problème originel de Fibonacci.*

(a) Informatique. Écrire une fonction `tauxF` *qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie τ_n.*

▶ Par exemple :

```
def tauxF(n):
    return suiteF(n+1)/suiteF(n)
```

(b) Déterminer une fonction réelle $f : x \mapsto f(x)$ telle que $\tau_{n+1} = f(\tau_n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

▶ Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned}
\tau_{n+1} &= \frac{\mathcal{F}_{n+2}}{\mathcal{F}_{n+1}} = \frac{\mathcal{F}_{n+1}+\mathcal{F}_n}{\mathcal{F}_{n+1}} \quad \text{d'après la relation de récurrence prouvée à la question 3} \\
&= 1 + \frac{\mathcal{F}_n}{\mathcal{F}_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\mathcal{F}_{n+1}/\mathcal{F}_n} = f(\tau_n) \quad \text{en posant } \boxed{f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}}.
\end{aligned}$$

(c) Étudier les variations de f ainsi que la position relative de sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.

▶ La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^\star$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty, 0[\text{ et sur }]0, +\infty[}$.

Attention : f n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}^\star$!! Lorsqu'on étudie le signe de la dérivée, on peut en déduire la monotonie de f seulement sur les intervalles où le signe de f' est constant (principe de Lagrange).

Pour étudier la position relative de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$, on étudie le signe de la fonction suivante :

$$g : x \mapsto f(x) - x = 1 + \frac{1}{x} - x = \frac{x + 1 - x^2}{x} = \frac{-(x^2 - x - 1)}{x}.$$

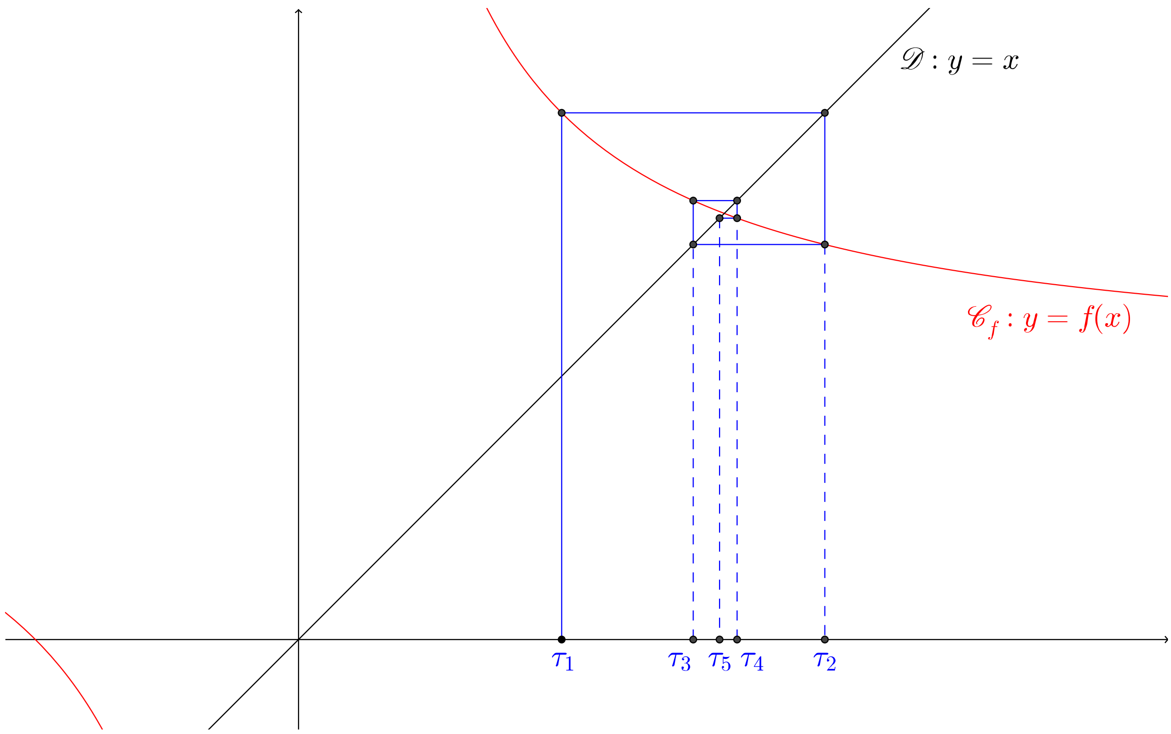
On reconnaît le polynôme du second degré étudié à la question 4(b). Ses racines sont $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $-1/\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On en déduit le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		$-1/\varphi$		0		φ		$+\infty$
$x^2 - x - 1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$-(x^2 - x - 1)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Ainsi, $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au-dessus } \mathscr{D} \text{ sur }]-\infty, -1/\varphi] \cup]0, \varphi] \text{ et au dessous sur } [-1/\varphi, 0[\cup [\varphi, +\infty[}$.

(d) Sur un même graphique, représenter la courbe $\mathscr{C}_f$, la droite $\mathscr{D}$ et les premiers termes de $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$.

▶



(e) *Prouver que la suite $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée. Que peut-on dire à propos de sa monotonie ?*

▶ Montrons par récurrence que $\tau_n \in [\tau_1, \tau_2]$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
<u>Initialisation</u>. On a $\tau_1 \in [\tau_1, \tau_2]$ donc l'assertion est vraie pour $n = 1$.
<u>Hérédité</u>. On suppose que $\tau_n \in [\tau_1, \tau_2]$ pour un entier $n \geqslant 1$ fixé. Donc :

$$1 = \mathcal{F}_2/\mathcal{F}_1 = \tau_1 \leqslant \tau_n \leqslant \tau_2 = \mathcal{F}_3/\mathcal{F}_2 = 2.$$

Puisque la fonction f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ d'après le tableau des variations de la question 7(b), on en déduit que :

$$2 = \tau_2 = f(\tau_1) \geqslant f(\tau_n) = \tau_{n+1} \geqslant f(\tau_2) = \tau_3 = \mathcal{F}_4/\mathcal{F}_3 = 3/2.$$

Donc $\tau_{n+1} \in [3/2, 2] \subset [1, 2] = [\tau_1, \tau_2]$. Ainsi, $\tau_n \in [\tau_1, \tau_2]$ implique que $\tau_{n+1} \in [\tau_1, \tau_2]$ et cette implication est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.
<u>Conclusion</u>. D'après le principe de récurrence, on en déduit que $\tau_n \in [\tau_1, \tau_2]$ pour tout entier $n \geqslant 1$. En particulier, on a bien prouvé que $\boxed{\text{la suite } (\tau_n)_{n\geqslant 1} \text{ est bornée}}$.

Par contre, $\boxed{\text{la suite } (\tau_n)_{n\geqslant 1} \text{ n'est ni croissante, ni décroissante}}$ car :

$$1 = \tau_1 \leqslant \tau_2 = 2 \quad \text{et} \quad 3/2 = \tau_3 \leqslant \tau_2 = 2.$$

(f) *Conjecturer le comportement asymptotique de la suite $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$ (c'est-à-dire le comportement de τ_n quand n tend vers $+\infty$) et démontrer cette conjecture à l'aide du résultat de la question 6(a).*

▶ D'après le graphique de la question 7(d), on conjecture que $\boxed{\text{la suite } (\tau_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge vers } \varphi}$ car sa limite semble être l'abscisse du point d'intersection placé à droite de l'axe des ordonnées entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ (donc la solution positive de l'équation $f(x) = x \iff g(x) = 0$ qu'on a résolue à la question 7(c)).
Soit $n \geqslant 1$. On a d'après le résultat de la question 6(a) :

$$\tau_n = \frac{\mathcal{F}_{n+1}}{\mathcal{F}_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi^{n+1} - (-1/\varphi)^{n+1}\Big)}{\frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi^{n} - (-1/\varphi)^{n}\Big)} = \varphi\left(\frac{\varphi^n - \dfrac{(-1)^{n+1}}{\varphi^{n+2}}}{\varphi^n - \dfrac{(-1)^n}{\varphi^n}}\right) = \varphi\left(\frac{1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\varphi^{2n+2}}}{1 - \dfrac{(-1)^n}{\varphi^{2n}}}\right).$$

Or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ d'après ce qu'on a vu à la question 6(a) donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi^{2n+2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \varphi^{2n} = +\infty$$

d'où par opérations sur les limites usuelles :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \tau_n = \varphi}.$$

(g) *Informatique. Vérifier le résultat précédent à l'aide de la fonction* `tauxF`.

▶ En Python, on obtient par exemple pour $n = 42$:

```
>>> tauF(42)
1.618033988749895

>>> import math

>>> (1+math.sqrt(5))/2
1.618033988749895
```

Donc $\boxed{\tau_{42} \text{ et } \varphi \text{ sont égaux à } 10^{-15} \text{ près}}$.