Corrigé du DM n° 3 de mathématiques

Ce DM propose d'étudier la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

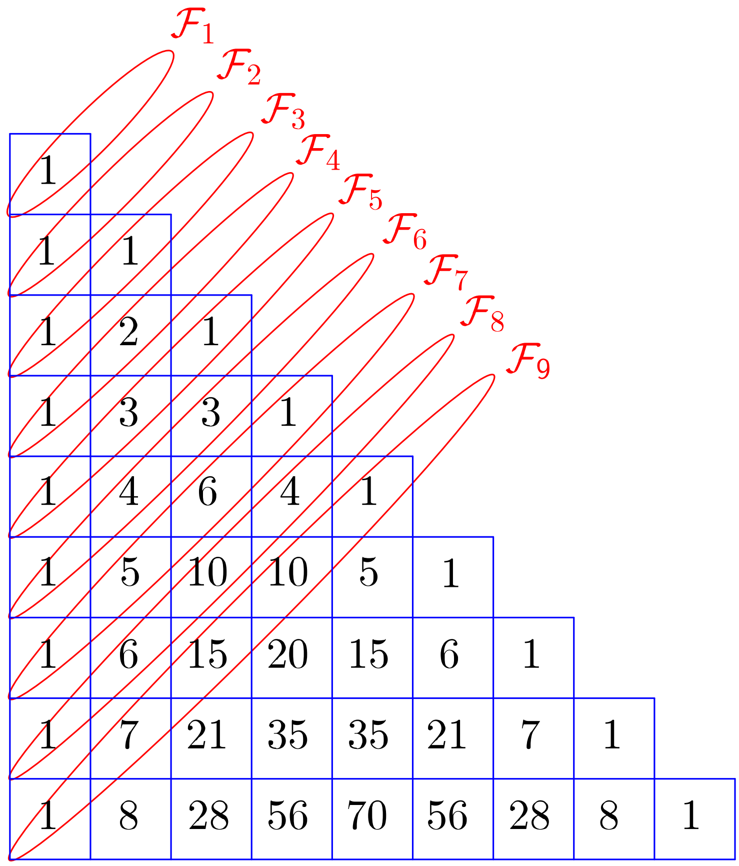
$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathcal{F}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1-k}{k}.$$

1. (a) *Construire les dix premières lignes du triangle de Pascal.*

   ▶ Voir la réponse à la question suivante.

   (b) *Dans le triangle de Pascal précédent, pour chaque valeur de l'entier n de 1 à 10, regrouper, en les entourant, tous les coefficients binomiaux qui apparaissent dans la somme $\mathcal{F}_n$.*

   ▶



   (c) *En déduire les valeurs des dix premiers termes de la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ puis conjecturer une relation de récurrence linéaire d'ordre deux vérifiée par les termes de la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$.*

▶ D'après le triangle de Pascal de la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_1 &= \boxed{1},\\
\mathcal{F}_2 &= \boxed{1},\\
\mathcal{F}_3 = 1+1 &= \boxed{2} = 1+1 = \mathcal{F}_2+\mathcal{F}_1,\\
\mathcal{F}_4 = 1+2 &= \boxed{3} = 2+1 = \mathcal{F}_3+\mathcal{F}_2,\\
\mathcal{F}_5 = 1+3+1 &= \boxed{5} = 3+2 = \mathcal{F}_4+\mathcal{F}_3,\\
\mathcal{F}_6 = 1+4+3 &= \boxed{8} = 5+3 = \mathcal{F}_5+\mathcal{F}_4,\\
\mathcal{F}_7 = 1+5+6+1 &= \boxed{13} = 8+5 = \mathcal{F}_6+\mathcal{F}_5,\\
\mathcal{F}_8 = 1+6+10+4 &= \boxed{21} = 13+8 = \mathcal{F}_7+\mathcal{F}_6,\\
\mathcal{F}_9 = 1+7+15+10+1 &= \boxed{34} = 21+13 = \mathcal{F}_8+\mathcal{F}_7.
\end{aligned}$$

On conjecture donc la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 suivante :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{\mathcal{F}_{n+2} = \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n}.$$

2. *Démontrer la relation de récurrence conjecturée à la question précédente.*

▶ Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{n+1}+\mathcal{F}_n &= \sum_{k=0}^{(n+1)-1}\binom{(n+1)-1-k}{k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1-k}{k}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-(1+k)}{k}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k} + \sum_{\ell=1}^{n}\binom{n-\ell}{\ell-1} \quad \text{en posant } \ell = 1+k \iff k=\ell-1\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k-1} - \underbrace{\binom{n-0}{0-1}}_{=0} \quad \text{en posant } k=\ell\\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\underbrace{\binom{n-k}{k}+\binom{n-k}{k-1}}_{=\binom{n-k+1}{k}}\right) \quad \text{par linéarité}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n-k+1}{k} \quad \text{d'après la formule de Pascal}\\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1-k}{k} - \underbrace{\binom{n+1-(n+1)}{n+1}}_{=0}\\
&= \sum_{k=0}^{(n+2)-1}\binom{(n+2)-1-k}{k} = \mathcal{F}_{n+2}.
\end{aligned}$$

On a donc bien démontré la relation de récurrence conjecturée à la question précédente :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{\mathcal{F}_{n+2} = \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n}.$$

3. *Dans un ouvrage publié en 1202 (l'un des premiers à recommander l'usage des chiffres arabes au lieu des chiffres romains), le mathématicien italien Leonardo $\mathcal{F}$ibonacci a posé le problème suivant :*

«En partant d'un couple de lapins nouvellement engendré, combien de couples de lapins obtient-on au bout d'une année si chaque couple engendre après deux mois d'existence un nouveau couple par mois ?»

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note c_n le nombre de couples de lapins au bout de n mois.

(a) *Calculer les valeurs des six premiers termes de la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ et comparer avec celles des premiers termes de la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$. Quelle conjecture peut-on formuler ?*

▶

— Au bout du premier mois, le couple de lapins de départ n'a pas encore engendré, donc $\boxed{c_1 = 1 = \mathcal{F}_1}$.

— Au bout du deuxième mois, le couple de lapins de départ n'a toujours pas engendré, donc $\boxed{c_2 = 1 = \mathcal{F}_2}$.

— Au bout du troisième mois, le couple de lapins de départ a engendré un nouveau couple de lapins qui n'a pas encore engendré, donc $\boxed{c_3 = 1 + 1 = 2 = \mathcal{F}_3}$.

— Au bout du quatrième mois, le couple de lapins de départ a engendré un nouveau couple de lapins qui n'a pas encore engendré et le couple de lapins engendré lors du troisième mois n'a toujours pas engendré, donc $\boxed{c_4 = 1 + 1 + 1 = 3 = \mathcal{F}_4}$.

— Au bout du cinquième mois, le couple de lapins de départ et le couple de lapins engendré lors du troisième mois ont engendré deux nouveaux couples de lapins qui n'ont pas encore engendré et le couple de lapins engendré lors du quatrième mois n'a toujours pas engendré, donc $\boxed{c_5 = 2 + 2 + 1 = 5 = \mathcal{F}_5}$.

— Au bout du sixième mois, le couple de lapins de départ, le couple de lapins engendré lors du troisième mois et le couple de lapins engendré lors du quatrième mois ont engendré trois nouveaux couples de lapins qui n'ont pas encore engendré et les deux couples de lapins engendrés lors du cinquième mois n'ont toujours pas engendré, donc $\boxed{c_6 = 3 + 3 + 2 = 8 = \mathcal{F}_6}$.

On conjecture donc que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{c_n = \mathcal{F}_n}.$$

(b) *Expliquer pourquoi la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la même relation de récurrence que la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$.*

▶ Soit $n \geqslant 1$. Le nombre de couples de lapins au bout de $n+2$ mois (c'est-à-dire c_{n+2}) est égal à la somme du nombre de couples de lapins existant déjà au bout de $n+1$ mois (donc c_{n+1}) et du nombre de couples de lapins engendrés lors du $(n+2)$-ième mois. Ce dernier nombre est égal au nombre de couples de lapins ayant au moins deux mois d'existence au bout de $n+2$ mois, donc au nombre de couples de lapins existant déjà au bout de n mois (donc c_n). Par conséquent :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{c_{n+2} = c_{n+1} + c_n}.$$

Ainsi $\boxed{(c_n)_{n\geqslant 1} \text{ vérifie la même relation de récurrence que } (\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}}$.

(c) *En déduire la réponse au problème de $\mathcal{F}$ibonacci.*

▶ La réponse au problème de $\mathcal{F}$ibonacci est c_{12}. Or on a d'après les résultats précédents :

$$\begin{aligned}
c_7 &= c_6 + c_5 = 8 + 5 = 13 \\
c_8 &= c_7 + c_6 = 13 + 8 = 21 \\
c_9 &= c_8 + c_7 = 21 + 13 = 34 \\
c_{10} &= c_9 + c_8 = 34 + 21 = 55 \\
c_{11} &= c_{10} + c_9 = 55 + 34 = 89 \\
c_{12} &= c_{11} + c_{10} = 89 + 55 = \boxed{144}.
\end{aligned}$$

(d) *À l'aide du résultat de la question 3(b), prouver la conjecture de la question 3(a).*

▶ Pour prouver la conjecture de la question 3(a), on raisonne par récurrence double.

Initialisation. On a montré que $c_1 = \mathcal{F}_1$ et $c_2 = \mathcal{F}_2$ à la question 3(a), donc la conjecture est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$.
Hérédité. On suppose que $c_n = \mathcal{F}_n$ et $c_{n+1} = \mathcal{F}_{n+1}$ pour un entier $n \geqslant 1$ fixé. Alors :

$$\begin{aligned} c_{n+2} &= c_{n+1} + c_n \quad \text{d'après la relation de récurrence prouvée à la question 3(b)} \\ &= \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n \quad \text{par hypothèses de récurrence} \\ &= \mathcal{F}_{n+2} \quad \text{d'après la relation de récurrence prouvée à la question 2.} \end{aligned}$$

Ainsi, $(c_n = \mathcal{F}_n \text{ et } c_{n+1} = \mathcal{F}_{n+1}) \Longrightarrow c_{n+2} = \mathcal{F}_{n+2}$ et ceci est vrai pour tout entier $n \geqslant 1$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence double, on en déduit bien que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{c_n = \mathcal{F}_n}.$$

4. Cette question propose de démontrer quelques propriétés de la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$.

(a) À l'aide du résultat de la question 2, montrer que :

$$\forall N \geqslant 1, \quad \sum_{n=1}^{N} \mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{N+2} - 1.$$

► Soit $N \geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N} \mathcal{F}_n &= \sum_{n=1}^{N} \Big(\mathcal{F}_{n+2} - \mathcal{F}_{n+1}\Big) \quad \text{d'après le résultat de la question 2} \\ &= \mathcal{F}_{N+2} - \mathcal{F}_2 \quad \text{en reconnaissant une somme télescopique.} \end{aligned}$$

Or $\mathcal{F}_2 = 1$ d'après le résultat de la question 1c), donc :

$$\forall N \geqslant 1, \quad \boxed{\sum_{n=1}^{N} \mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{N+2} - 1}.$$

On peut aussi démontrer le résultat par récurrence, mais c'est plus long.

(b) Exprimer le terme général $\mathcal{F}_n$ en fonction de l'entier $n \geqslant 1$ et prouver que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathcal{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi^n - (-1/\varphi)^n\Big)$$

où $\varphi > 1$ est une constante à déterminer.

► D'après le résultat de la question 2, la suite $(\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ est récurrente linéaire d'ordre 2. Son équation caractéristique d'inconnue $q \in \mathbb{C}$ est :

$$q^2 = q + 1 \iff q^2 - q - 1 = 0.$$

On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$ donc elle admet deux solutions réelles distinctes : $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Ainsi, on sait qu'il existe deux constantes $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathcal{F}_n = \lambda_1 q_1^{n-1} + \lambda_2 q_2^{n-1}.$$

Or on a pour $n = 1$ et $n = 2$:

$$\begin{cases} 1 = \mathcal{F}_1 = \lambda_1 q_1^{1-1} + \lambda_2 q_2^{1-1} = \lambda_1 + \lambda_2 & (L_1) \\ 1 = \mathcal{F}_2 = \lambda_1 q_1^{2-1} + \lambda_2 q_2^{2-1} = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 & (L_2) \end{cases}.$$

En effectuant l'opération $q_2(L_1)-(L_2)$, on obtient :

$$q_2-1=q_2(\lambda_1+\lambda_2)-(\lambda_1 q_1+\lambda_2 q_2)=(q_2-q_1)\lambda_1 \quad \text{donc} \quad \lambda_1=\frac{q_2-1}{q_2-q_1}=\frac{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{-2\sqrt{5}}{2}}=\frac{q_1}{\sqrt{5}}.$$

En injectant dans (L_1), on obtient :

$$\lambda_2=1-\lambda_1=1-\frac{q_1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{-q_2}{\sqrt{5}}.$$

Par conséquent :

$$\forall n\geqslant 1,\quad \mathcal{F}_n=\frac{q_1}{\sqrt{5}}q_1^{n-1}+\frac{-q_2}{\sqrt{5}}q_2^{n-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\Big(q_1^n-q_2^n\Big).$$

De plus, $q_1+q_2=1$ et $q_1q_2=-1$ car q_1 et q_2 sont les deux solutions de l'équation $q^2-q-1=0$.

Pensez à utiliser les relations entre coefficients et racines d'un polynôme de second degré afin d'éviter les calculs inutiles et de gagner du temps.

En particulier $q_2=-1/q_1$ car $q_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\neq 0$. Finalement, on a bien :

$$\forall n\geqslant 1,\quad \boxed{\mathcal{F}_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi^n-(-1/\varphi)^n\Big)} \quad \text{en posant} \quad \boxed{\varphi=q_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

(c) À l'aide de la formule du binôme de Newton, en déduire que :

$$\forall n\geqslant 1,\quad \mathcal{F}_n=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{\ell=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2\ell+1}5^\ell.$$

► Soit $n\geqslant 1$. On a d'après la formule du binôme de Newton :

$$\varphi^n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}\left(\sqrt{5}+1\right)^n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\sqrt{5}\right)^k1^{n-k}=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}5^{k/2}$$

$$\text{et}\quad (-1/\varphi)^n=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k5^{k/2}.$$

Puis en séparant les indices pairs et impairs :

$$\varphi^n=\frac{1}{2^n}\left(\sum_{\ell=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2\ell}5^\ell+\sum_{\ell=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2\ell+1}5^{\ell+1/2}\right)$$

$$\text{et}\quad (-1/\varphi)^n=\frac{1}{2^n}\left(\sum_{\ell=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2\ell}5^\ell-\sum_{\ell=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2\ell+1}5^{\ell+1/2}\right).$$

On en déduit d'après le résultat de la question précédente que :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\varphi^n - (-1/\varphi)^n\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{2^n}\left(0 + 2\sum_{\ell=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2\ell+1}5^{\ell+1/2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{5^{1/2}} \times \frac{2}{2^n}\sum_{\ell=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2\ell+1}5^{\ell} \times 5^{1/2} \\
&= \boxed{\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{\ell=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}\binom{n}{2\ell+1}5^{\ell}}.
\end{aligned}$$

5. *On s'intéresse maintenant à la suite $(\tau_n = \mathcal{F}_{n+1}/\mathcal{F}_n)_{n\geqslant 1}$ qui peut s'interpréter comme le taux de croissance mensuel du nombre de couples de lapins dans le problème originel de $\mathcal{F}$ibonacci.*

   (a) *Déterminer une fonction réelle f telle que $\tau_{n+1} = f(\tau_n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$.*

   ▶ Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned}
\tau_{n+1} &= \frac{\mathcal{F}_{n+2}}{\mathcal{F}_{n+1}} = \frac{\mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n}{\mathcal{F}_{n+1}} \quad \text{d'après la relation de récurrence prouvé à la question 2} \\
&= 1 + \frac{\mathcal{F}_n}{\mathcal{F}_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\mathcal{F}_{n+1}/\mathcal{F}_n} = f(\tau_n) \quad \text{en posant } \boxed{f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}}.
\end{aligned}$$

   (b) *Étudier les variations de f ainsi que la position relative de sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$.*

   ▶ La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^\star$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

Donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty, 0[\text{ et sur }]0, +\infty[}$.

Attention : f n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}^\star$!! Lorsqu'on étudie le signe de la dérivée, on peut en déduire la monotonie de f seulement sur les intervalles où le signe de f' est constant (principe de Lagrange).

Pour étudier la position relative de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$, on étudie le signe de la fonction suivante :

$$g : x \mapsto f(x) - x = 1 + \frac{1}{x} - x = \frac{x + 1 - x^2}{x} = \frac{-(x^2 - x - 1)}{x}.$$

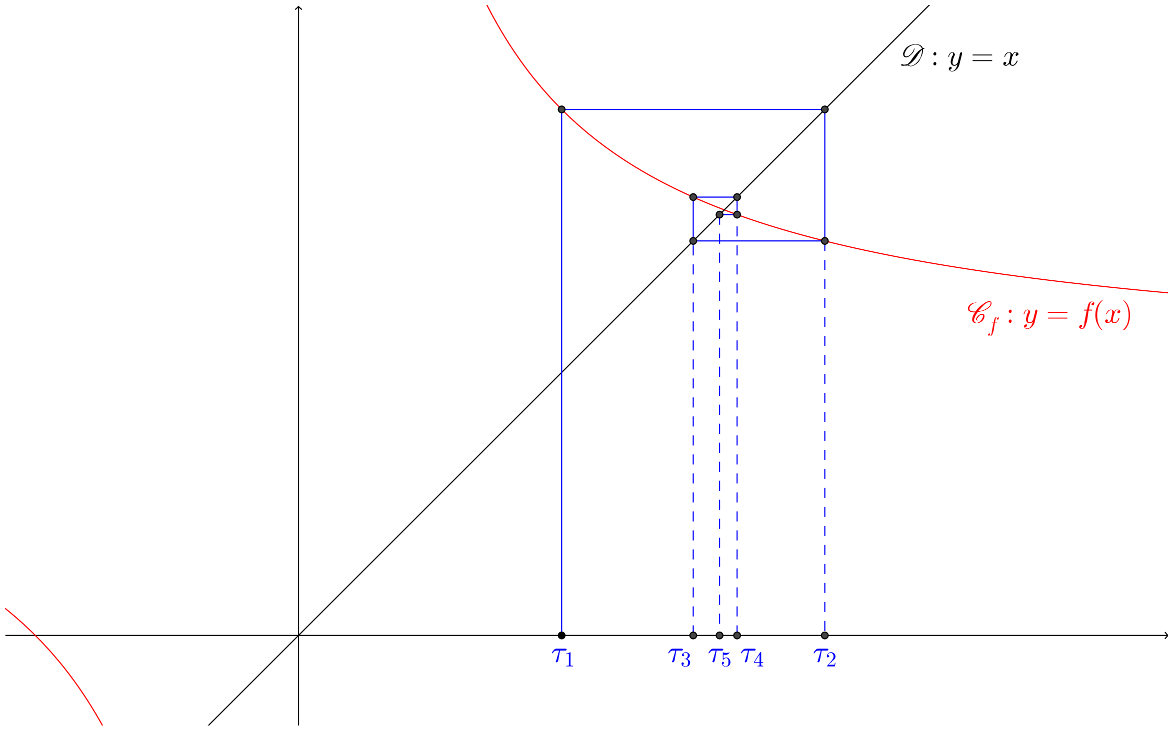
On reconnaît le polynôme du second degré étudié à la question 4(b). Ses racines sont $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $-1/\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On en déduit le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		$-1/\varphi$		0		φ		$+\infty$
$x^2 - x - 1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$-(x^2 - x - 1)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

Ainsi, $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est au-dessus } \mathscr{D} \text{ sur }]-\infty, -1/\varphi] \cup]0, \varphi] \text{ et au dessous sur } [-1/\varphi, 0[\cup [\varphi, +\infty[}$.

(c) Sur un même graphique, représenter la courbe $\mathscr{C}_f$, la droite $\mathscr{D}$ et les premiers termes de $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$.

▶



(d) Prouver que la suite $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée. Que peut-on dire à propos de sa monotonie ?

▶ Montrons par récurrence que $\tau_n \in [\tau_1, \tau_2]$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
Initialisation. On a $\tau_1 \in [\tau_1, \tau_2]$ donc l'assertion est vraie pour $n = 1$.
Hérédité. On suppose que $\tau_n \in [\tau_1, \tau_2]$ pour un entier $n \geqslant 1$ fixé. Donc :

$$1 = \mathcal{F}_2/\mathcal{F}_1 = \tau_1 \leqslant \tau_n \leqslant \tau_2 = \mathcal{F}_3/\mathcal{F}_2 = 2.$$

Puisque la fonction f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ d'après ce qu'on a vu dans la question 5(b), on en déduit que :

$$2 = \tau_2 = f(\tau_1) \geqslant f(\tau_n) = \tau_{n+1} \geqslant f(\tau_2) = \tau_3 = \mathcal{F}_4/\mathcal{F}_3 = 3/2.$$

Donc $\tau_{n+1} \in [3/2, 2] \subset [1, 2] = [\tau_1, \tau_2]$. Ainsi, $\tau_n \in [\tau_1, \tau_2]$ implique que $\tau_{n+1} \in [\tau_1, \tau_2]$ et cette implication est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que $\tau_n \in [\tau_1, \tau_2]$ pour tout entier $n \geqslant 1$. En particulier, on a bien prouvé que $\boxed{\text{la suite } (\tau_n)_{n\geqslant 1} \text{ est bornée}}$.

Par contre, $\boxed{\text{la suite } (\tau_n)_{n\geqslant 1} \text{ n'est ni croissante, ni décroissante}}$ car :

$$1 = \tau_1 \leqslant \tau_2 = 2 \quad \text{et} \quad 3/2 = \tau_3 \leqslant \tau_2 = 2.$$

(e) Conjecturer le comportement asymptotique de la suite $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$ (c'est-à-dire le comportement de τ_n quand n tend vers $+\infty$) et démontrer cette conjecture à l'aide du résultat de la question 4(b).

▶ D'après le graphique de la question 5(c), on conjecture que $\boxed{\text{la suite } (\tau_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge}}$. De plus, sa limite semble être la solution de l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in]0, +\infty[$, c'est-à-dire le réel φ d'après ce qu'on a vu dans la question 5(b).
Soit $n \geqslant 1$. On a d'après le résultat de la question 4(b) :

$$\tau_n = \frac{\mathcal{F}_{n+1}}{\mathcal{F}_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - (-1/\varphi)^{n+1}\right)}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - (-1/\varphi)^n\right)} = \varphi\left(\frac{\varphi^n - \dfrac{(-1)^{n+1}}{\varphi^{n+2}}}{\varphi^n - \dfrac{(-1)^n}{\varphi^n}}\right) = \varphi\left(\frac{1 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{\varphi^{2n+2}}}{1 - \dfrac{(-1)^n}{\varphi^{2n}}}\right).$$

Or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ d'après ce qu'on a vu à la question 4(b) donc $\varphi > 1$ (car $\sqrt{5} > 2$ puisque la fonction racine carrée est strictement croissante). On en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi^{2n+2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \varphi^{2n} = +\infty$$

d'où par opérations sur les limites usuelles :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \tau_n = \varphi}.$$