DM n$^{\text{o}}$ 4 de mathématiques

à rendre au plus tard le jeudi 29 novembre

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on note $D_{n,k}$ le nombre de permutations de l'ensemble $[\![1, n]\!] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ayant exactement k points fixes, c'est-à-dire le nombre d'applications bijectives $\varphi : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ telles que :

$$\operatorname{card}\Big\{i \in [\![1, n]\!] \mid \varphi(i) = i\Big\} = k.$$

En particulier, si $k = 0$, les permutations de $[\![1, n]\!]$ sans point fixe sont appelées les dérangements de $[\![1, n]\!]$ et on note $d_n = D_{n,0}$ leur nombre.

A) Premiers résultats

1. La liste des permutations de $[\![1, 3]\!]$ est :

$$x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x = 1 \\ 2 \text{ si } x = 2 \\ 3 \text{ si } x = 3 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x = 1 \\ 3 \text{ si } x = 2 \\ 2 \text{ si } x = 3 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 2 \text{ si } x = 1 \\ 1 \text{ si } x = 2 \\ 3 \text{ si } x = 3 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 2 \text{ si } x = 1 \\ 3 \text{ si } x = 2 \\ 1 \text{ si } x = 3 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 3 \text{ si } x = 1 \\ 1 \text{ si } x = 2 \\ 2 \text{ si } x = 3 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 3 \text{ si } x = 1 \\ 2 \text{ si } x = 2 \\ 1 \text{ si } x = 3 \end{cases}.$$

   En déduire les valeurs de $D_{3,0}$, $D_{3,1}$, $D_{3,2}$ et $D_{3,3}$.
2. En dressant la liste des permutations de $[\![1, 4]\!]$, déterminer les valeurs de $(D_{4,k})_{0 \leqslant k \leqslant 4}$.
3. Déterminer les valeurs de $D_{1,0}$, $D_{1,1}$, $D_{2,0}$, $D_{2,1}$ et $D_{2,2}$.
4. Que vaut la somme $\sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$ pour tout entier $n \geqslant 1$? Justifier précisément votre réponse.
5. Déterminer les valeurs de $D_{n,n-1}$ et $D_{n,n}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

B) Calcul de $D_{n,n-k}$ en fonction de d_k

6. Dresser la liste des permutations de $[\![1, 5]\!]$ ayant exactement 3 points fixes.
7. Montrer que $D_{n,n-2} = \binom{n}{2}$ pour tout entier $n \geqslant 2$.
8. Déterminer une expression similaire pour $D_{n,n-3}$ pour tout entier $n \geqslant 3$.
9. Plus généralement, montrer que pour tout couple d'entiers (n, k) tels que $1 \leqslant k \leqslant n$ on a :

$$\boxed{D_{n,n-k} = \binom{n}{k} d_k}.$$

10. *Application numérique.*
    (a) En déduire les valeurs de $(D_{5,k})_{1 \leqslant k \leqslant 4}$, puis déterminer celles de $D_{5,5}$ et $D_{5,0}$ à l'aide de résultats précédents.
    (b) Construire les sept premières lignes du triangle des valeurs de $D_{n,k}$, c'est-à-dire pour les couples d'entiers (n, k) tels que $1 \leqslant n \leqslant 7$ et $0 \leqslant k \leqslant n$.
11. *Informatique.*
    (a) Écrire en Python une fonction `fact` qui prend en argument un entier $k \in \mathbb{N}$ et qui renvoie la valeur de $k!$.
    (b) Écrire en Python une fonction `binom` qui prend en arguments deux entiers $n \geqslant 1$ et $k \in \mathbb{Z}$, et qui renvoie la valeur du coefficient binomial $\binom{n}{k}$.
    (c) Dans cette question, on suppose avoir déjà écrit une fonction `d(n)` qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie le nombre de dérangements de $[\![1, n]\!]$. En utilisant l'instruction `if`, écrire une fonction `D(n,k)` qui prend en arguments deux entiers $n \geqslant 1$ et k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, et qui renvoie le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ ayant exactement k points fixes.

C) Une formule de récurrence pour d_n

Dans cette partie, on fixe un entier $n \geqslant 3$ et on désigne par $\mathscr{D}$ l'ensemble des dérangements de $[\![1, n]\!]$. On exprimera les réponses aux questions 12(b) et 13(b) en fonction de n, d_{n-1} et d_{n-2}.

12. (a) Soit $\varphi \in \mathscr{D}$. On pose $\alpha = \varphi(1)$ et on suppose que $\varphi(\alpha) = 1$. Justifier que l'application suivante est bijective et n'a pas de point fixe :

$$\psi_1 : [\![1, n]\!] \setminus \{1, \alpha\} \to [\![1, n]\!] \setminus \{1, \alpha\}, x \mapsto \varphi(x).$$

    (b) En déduire le cardinal de l'ensemble $\mathscr{D}_1 = \{\varphi \in \mathscr{D} \mid \varphi(\varphi(1)) = 1\}$.

13. (a) Soit $\varphi \in \mathscr{D}$. On pose $\alpha = \varphi(1)$ et on suppose que $\varphi(\alpha) \neq 1$. Justifier que l'application suivante est bijective et n'a pas de point fixe :

$$\psi_2 : [\![1, n]\!] \setminus \{\alpha\} \to [\![1, n]\!] \setminus \{\alpha\}, x \mapsto \begin{cases} \varphi(\alpha) \text{ si } x = 1 \\ \varphi(x) \text{ si } x \neq 1 \end{cases}.$$

    (b) En déduire le cardinal de l'ensemble $\mathscr{D}_2 = \{\varphi \in \mathscr{D} \mid \varphi(\varphi(1)) \neq 1\}$.

14. Montrer que :

$$\boxed{d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})}.$$

15. *Application numérique.* En déduire les valeurs de d_8, d_9 et d_{10}.
16. *Informatique.* En utilisant les instructions `if` et `for`, écrire une fonction `d(n)` qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie le nombre de dérangements de $[\![1, n]\!]$.

D) Une formule générale pour d_n et $D_{n,k}$

Dans cette partie, on fixe un entier $n \geqslant 1$.

17. À l'aide de résultats précédents, montrer que $\ell! - 1 = \sum_{k=1}^{\ell} \binom{\ell}{k} d_k$ pour tout entier $\ell \geqslant 1$.
18. On pose $\delta_k = \sum_{\ell=k}^{n} \binom{n}{\ell}\binom{\ell}{k}(-1)^\ell$ pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.
    (a) Montrer que $\binom{n}{\ell}\binom{\ell}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell-k}$ pour tout couple d'entiers (k, ℓ) tels que $1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n$.
    (b) En déduire que $\delta_k = 0$ si $k \neq n$.
    (c) Que vaut δ_k si $k = n$?
19. Déduire des résultats précédents que $\sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell}(\ell! - 1)(-1)^\ell = (-1)^n d_n$.
20. En déduire que :

$$\boxed{d_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}}, \quad \text{puis que :} \quad \boxed{D_{n,k} = \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}} \quad \text{pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leqslant k \leqslant n.$$

21. *Informatique.* À l'aide des résultats de la question précédente, proposer une manière plus simple d'écrire les fonctions `d(n)` et `D(n,k)` en définissant deux nouvelles fonctions `d2(n)` et `D2(n,k)`.

E) Application numérique : Secret Santa

Pour l'arrivée des vacances de Noël, une classe de BCPST1 constituée de 46 étudiants et 5 enseignants décide d'organiser un événement du type «Secret Santa» : les noms de tous les participants sont placés dans un chapeau et chacun tire au hasard et secrètement le nom de quelqu'un à qui il offrira un petit cadeau. On souhaite déterminer la probabilité qu'aucun participant ne tire au hasard son propre nom.

22. Exprimer le nombre total de tirages possibles.
23. Exprimer le nombre total des tirages au cours desquels aucun participant ne tire son propre nom.
24. À l'aide des fonctions écrites en Python dans ce DM, déterminer une approximation de la probabilité recherchée (à exprimer en pourcentage).
25. Construire le diagramme en bâtons des probabilités du nombre de participants qui tirent leur propre nom.