Corrigé du DM n° 4 de mathématiques

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on note $D_{n,k}$ le nombre de permutations de l'ensemble $[\![1,n]\!] = \{1,2,3,\dots,n\}$ ayant exactement k points fixes, c'est-à-dire le nombre d'applications bijectives $\varphi : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ telles que :

$$\text{card}\Big\{i \in [\![1,n]\!] \mid \varphi(i) = i\Big\} = k.$$

En particulier, si $k = 0$, les permutations de $[\![1,n]\!]$ sans point fixe sont appelées les dérangements de $[\![1,n]\!]$ et on note $d_n = D_{n,0}$ leur nombre.

A) Premiers résultats

1. *La liste des permutations de $[\![1,3]\!]$ est :*

$$x \mapsto \begin{cases} 1 \ si\ x=1 \\ 2 \ si\ x=2 \\ 3 \ si\ x=3 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 1 \ si\ x=1 \\ 3 \ si\ x=2 \\ 2 \ si\ x=3 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 2 \ si\ x=1 \\ 1 \ si\ x=2 \\ 3 \ si\ x=3 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 2 \ si\ x=1 \\ 3 \ si\ x=2 \\ 1 \ si\ x=3 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 3 \ si\ x=1 \\ 1 \ si\ x=2 \\ 2 \ si\ x=3 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 3 \ si\ x=1 \\ 2 \ si\ x=2 \\ 1 \ si\ x=3 \end{cases}.$$

En déduire les valeurs de $D_{3,0}$, $D_{3,1}$, $D_{3,2}$ et $D_{3,3}$.

▶ On compte le nombre de points fixes pour chaque permutation de $[\![1,3]\!]$.

— La permutation $x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x=1 \\ 2 \text{ si } x=2 \\ 3 \text{ si } x=3 \end{cases}$ a trois points fixes : 1, 2 et 3.

— La permutation $x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x=1 \\ 3 \text{ si } x=2 \\ 2 \text{ si } x=3 \end{cases}$ a un seul point fixe : 1.

— La permutation $x \mapsto \begin{cases} 2 \text{ si } x=1 \\ 1 \text{ si } x=2 \\ 3 \text{ si } x=3 \end{cases}$ a un seul point fixe : 3.

— La permutation $x \mapsto \begin{cases} 2 \text{ si } x=1 \\ 3 \text{ si } x=2 \\ 1 \text{ si } x=3 \end{cases}$ n'a pas de point fixe.

— La permutation $x \mapsto \begin{cases} 3 \text{ si } x=1 \\ 1 \text{ si } x=2 \\ 2 \text{ si } x=3 \end{cases}$ n'a pas de point fixe.

— La permutation $x \mapsto \begin{cases} 3 \text{ si } x=1 \\ 2 \text{ si } x=2 \\ 1 \text{ si } x=3 \end{cases}$ a un seul point fixe : 2.

On obtient donc $\boxed{D_{3,0} = 2}$ permutations sans point fixe, $\boxed{D_{3,1} = 3}$ permutations avec un seul point fixe, $\boxed{D_{3,2} = 0}$ permutation avec deux points fixes et $\boxed{D_{3,3} = 1}$ permutation avec trois points fixes.

2. *En dressant la liste des permutations de $[\![1,4]\!]$, déterminer les valeurs de $(D_{4,k})_{0 \leqslant k \leqslant 4}$.*

▶ La liste des permutations de $[\![1,4]\!]$ est :

$$x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x=1 \\ 2 \text{ si } x=2 \\ 3 \text{ si } x=3 \\ 4 \text{ si } x=4 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x=1 \\ 2 \text{ si } x=2 \\ 4 \text{ si } x=3 \\ 3 \text{ si } x=4 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x=1 \\ 3 \text{ si } x=2 \\ 2 \text{ si } x=3 \\ 4 \text{ si } x=4 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x=1 \\ 3 \text{ si } x=2 \\ 4 \text{ si } x=3 \\ 2 \text{ si } x=4 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x=1 \\ 4 \text{ si } x=2 \\ 2 \text{ si } x=3 \\ 3 \text{ si } x=4 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x=1 \\ 4 \text{ si } x=2 \\ 3 \text{ si } x=3 \\ 2 \text{ si } x=4 \end{cases},$$

$$x \mapsto \begin{cases} 2 \text{ si } x=1 \\ 1 \text{ si } x=2 \\ 3 \text{ si } x=3 \\ 4 \text{ si } x=4 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 2 \text{ si } x=1 \\ 1 \text{ si } x=2 \\ 4 \text{ si } x=3 \\ 3 \text{ si } x=4 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 2 \text{ si } x=1 \\ 3 \text{ si } x=2 \\ 1 \text{ si } x=3 \\ 4 \text{ si } x=4 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 2 \text{ si } x=1 \\ 3 \text{ si } x=2 \\ 4 \text{ si } x=3 \\ 1 \text{ si } x=4 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 2 \text{ si } x=1 \\ 4 \text{ si } x=2 \\ 2 \text{ si } x=3 \\ 3 \text{ si } x=4 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 2 \text{ si } x=1 \\ 4 \text{ si } x=2 \\ 3 \text{ si } x=3 \\ 1 \text{ si } x=4 \end{cases},$$

$$x \mapsto \begin{cases} 3 \text{ si } x=1 \\ 1 \text{ si } x=2 \\ 2 \text{ si } x=3 \\ 4 \text{ si } x=4 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 3 \text{ si } x=1 \\ 1 \text{ si } x=2 \\ 4 \text{ si } x=3 \\ 2 \text{ si } x=4 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 3 \text{ si } x=1 \\ 2 \text{ si } x=2 \\ 1 \text{ si } x=3 \\ 4 \text{ si } x=4 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 3 \text{ si } x=1 \\ 2 \text{ si } x=2 \\ 4 \text{ si } x=3 \\ 1 \text{ si } x=4 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 3 \text{ si } x=1 \\ 4 \text{ si } x=2 \\ 1 \text{ si } x=3 \\ 2 \text{ si } x=4 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 3 \text{ si } x=1 \\ 4 \text{ si } x=2 \\ 2 \text{ si } x=3 \\ 1 \text{ si } x=4 \end{cases},$$

$$x \mapsto \begin{cases} 4 \text{ si } x=1 \\ 1 \text{ si } x=2 \\ 2 \text{ si } x=3 \\ 3 \text{ si } x=4 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 4 \text{ si } x=1 \\ 1 \text{ si } x=2 \\ 3 \text{ si } x=3 \\ 2 \text{ si } x=4 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 4 \text{ si } x=1 \\ 2 \text{ si } x=2 \\ 1 \text{ si } x=3 \\ 3 \text{ si } x=4 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 4 \text{ si } x=1 \\ 2 \text{ si } x=2 \\ 3 \text{ si } x=3 \\ 1 \text{ si } x=4 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 4 \text{ si } x=1 \\ 3 \text{ si } x=2 \\ 1 \text{ si } x=3 \\ 2 \text{ si } x=4 \end{cases},\ x \mapsto \begin{cases} 4 \text{ si } x=1 \\ 3 \text{ si } x=2 \\ 2 \text{ si } x=3 \\ 1 \text{ si } x=4 \end{cases}.$$

En comptant le nombre de points fixes de chaque permutation comme à la question précédente, on obtient $\boxed{D_{4,0} = 9}$ permutations sans point fixe, $\boxed{D_{4,1} = 8}$ permutations avec un seul point fixe, $\boxed{D_{4,2} = 6}$ permutations avec deux points fixes, $\boxed{D_{4,3} = 0}$ permutation avec trois points fixes et $\boxed{D_{4,4} = 1}$ permutation avec quatre points fixes.

3. *Déterminer les valeurs de $D_{1,0}$, $D_{1,1}$, $D_{2,0}$, $D_{2,1}$ et $D_{2,2}$.*

▶ La seule permutation de $[\![1,1]\!] = \{1\}$ est $x \mapsto 1$. qui a un seul point fixe. Donc $\boxed{D_{1,0} = 0}$ et $\boxed{D_{1,1} = 1}$. D'autre part, il y a deux permutations de $[\![1,2]\!]$:

— la permutation $x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x = 1 \\ 2 \text{ si } x = 2 \end{cases}$ qui a deux points fixes,

— la permutation $x \mapsto \begin{cases} 2 \text{ si } x = 1 \\ 1 \text{ si } x = 2 \end{cases}$ qui n'a pas de point fixe.

Donc $\boxed{D_{2,0} = 1}$, $\boxed{D_{2,1} = 0}$ et $\boxed{D_{2,2} = 1}$.

4. *Que vaut la somme $\sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$ pour tout entier $n \geqslant 1$?*

▶ Soit $n \geqslant 1$. Une permutation de $[\![1,n]\!]$ a 0 point fixe, ou bien 1 point fixe, ou bien 2 points fixes, ou bien 3 points fixes, etc., ou bien n points fixes. Par conséquent, la somme $\sum_{k=0}^{n} D_{n,k}$ est égale au nombre total de permutations de $[\![1,n]\!]$. Or on peut modéliser une permutation de $[\![1,n]\!]$, c'est-à-dire une bijection $\varphi : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$, par la n-liste sans répétition de ses images $(\varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n))$. Il y a donc $n!$ permutations de $[\![1,n]\!]$. Finalement, on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} D_{n,k} = n!}.$$

5. *Déterminer les valeurs de $D_{n,n-1}$ et $D_{n,n}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.*

▶ Soit $n \geqslant 1$. Par l'absurde, on suppose qu'il existe une permutation de $[\![1,n]\!]$ ayant exactement $n-1$ points fixes, c'est-à-dire une bijection $\varphi : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ telle que $\varphi(i) = i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ sauf pour une valeur. On note $j \in [\![1,n]\!]$ cette valeur, donc $\varphi(j) \neq j$. Puisque $\varphi(j) \neq j$, $\varphi(j)$ est un point fixe de φ, donc $\varphi(\varphi(j)) = \varphi(j)$. Par conséquent, j et $\varphi(j)$ sont deux antécédents de $\varphi(j)$. On en déduit que $j = \varphi(j)$ car φ est injective, ce qui est absurde. Par conséquent, il n'existe pas de permutation de $[\![1,n]\!]$ ayant exactement $n-1$ points fixes. On en déduit que $\boxed{D_{n,n-1} = 0}$. D'autre part, la seule permutation de $[\![1,n]\!]$ ayant exactement n points fixes est l'application $x \mapsto x$ (c'est-à-dire l'application identité de $[\![1,n]\!]$), donc $\boxed{D_{n,n} = 1}$.

B) Calcul de $D_{n,n-k}$ en fonction de d_k

6. *Dresser la liste des permutations de $[\![1,5]\!]$ ayant exactement 3 points fixes.*

▶ La liste des permutations de $[\![1,5]\!]$ ayant exactement trois points fixes est :

$$x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x = 1 \\ 2 \text{ si } x = 2 \\ 3 \text{ si } x = 3 \\ 5 \text{ si } x = 4 \\ 4 \text{ si } x = 5 \end{cases}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x = 1 \\ 2 \text{ si } x = 2 \\ 5 \text{ si } x = 3 \\ 4 \text{ si } x = 4 \\ 3 \text{ si } x = 5 \end{cases}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x = 1 \\ 2 \text{ si } x = 2 \\ 4 \text{ si } x = 3 \\ 3 \text{ si } x = 4 \\ 5 \text{ si } x = 5 \end{cases}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x = 1 \\ 5 \text{ si } x = 2 \\ 3 \text{ si } x = 3 \\ 4 \text{ si } x = 4 \\ 2 \text{ si } x = 5 \end{cases}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x = 1 \\ 4 \text{ si } x = 2 \\ 3 \text{ si } x = 3 \\ 2 \text{ si } x = 4 \\ 5 \text{ si } x = 5 \end{cases},$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x = 1 \\ 3 \text{ si } x = 2 \\ 2 \text{ si } x = 3 \\ 4 \text{ si } x = 4 \\ 5 \text{ si } x = 5 \end{cases}, \quad x \mapsto \begin{cases} 5 \text{ si } x = 1 \\ 2 \text{ si } x = 2 \\ 3 \text{ si } x = 3 \\ 4 \text{ si } x = 4 \\ 1 \text{ si } x = 5 \end{cases}, \quad x \mapsto \begin{cases} 4 \text{ si } x = 1 \\ 2 \text{ si } x = 2 \\ 3 \text{ si } x = 3 \\ 1 \text{ si } x = 4 \\ 5 \text{ si } x = 5 \end{cases}, \quad x \mapsto \begin{cases} 3 \text{ si } x = 1 \\ 2 \text{ si } x = 2 \\ 1 \text{ si } x = 3 \\ 4 \text{ si } x = 4 \\ 5 \text{ si } x = 5 \end{cases}, \quad x \mapsto \begin{cases} 2 \text{ si } x = 1 \\ 1 \text{ si } x = 2 \\ 3 \text{ si } x = 3 \\ 4 \text{ si } x = 4 \\ 5 \text{ si } x = 5 \end{cases}.$$

On en déduit que $\boxed{D_{5,3} = 10}$.

7. *Montrer que $D_{n,n-2} = \binom{n}{2}$ pour tout entier $n \geqslant 2$.*

▶ Soit $n \geqslant 2$. Si une permutation de $[\![1,n]\!]$ a exactement $n-2$ points fixes, alors les deux valeurs restantes de $[\![1,n]\!]$ sont échangées entre elles (sinon la permutation aurait 2 points fixes de plus). Autrement dit, on peut modéliser le choix d'une permutation de $[\![1,n]\!]$ ayant exactement $n-2$ points fixes par le choix de deux éléments parmi $[\![1,n]\!]$ à échanger alors que les $n-2$ autres éléments sont fixés. On en déduit que $\boxed{D_{n,n-2} = \binom{n}{2}}$.

8. *Déterminer une expression similaire pour $D_{n,n-3}$ pour tout entier $n \geqslant 3$.*

▶ Soit $n \geqslant 3$. Si une permutation de $[\![1,n]\!]$ a exactement $n-3$ points fixes, alors les trois valeurs restantes de $[\![1,n]\!]$ sont permutées entre elles sans créer de nouveau point fixe. Puisque $d_3 = D_{3,0} = 2$ d'après le résultat de la question 1, il y a 2 façons de permuter ces trois valeurs sans créer de nouveau point fixe. Autrement dit, on peut modéliser le choix d'une permutation de $[\![1,n]\!]$ ayant exactement $n-3$ points fixes par le choix de trois éléments parmi $[\![1,n]\!]$ et puis le choix d'une des deux façons de permuter ces trois éléments sans créer de point fixe alors que les $n-3$ autres éléments sont fixés. On en déduit que $\boxed{D_{n,n-3} = \binom{n}{3}2}$.

9. *Plus généralement, montrer que pour tout couple d'entiers (n,k) tels que $1 \leqslant k \leqslant n$ on a :*

$$\boxed{D_{n,n-k} = \binom{n}{k} d_k}.$$

▶ Soient $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tels que $1 \leqslant k \leqslant n$. En raisonnant comme à la question précédente, on peut modéliser le choix d'une permutation de $[\![1,n]\!]$ ayant exactement $n-k$ points fixes par le choix de k éléments parmi $[\![1,n]\!]$ et puis le choix d'une façon de permuter ces k éléments sans créer de point fixe alors que les $n-k$ autres éléments sont fixés. Puisque $d_k = D_{k,0}$ est le nombre de permutations de k éléments sans point fixe, on en déduit que :

$$\boxed{D_{n,n-k} = \binom{n}{k} d_k}.$$

10. Application numérique.

(a) *En déduire les valeurs de $(D_{5,k})_{1\leqslant k\leqslant 4}$, puis déterminer celles de $D_{5,5}$ et $D_{5,0}$ à l'aide de résultats précédents.*

▶ En reprenant les valeurs obtenues aux questions 1,2 et 3, on obtient d'après le résultat de la question précédente :

$$D_{5,1} = D_{5,5-4} = \binom{5}{4} d_4 = \frac{5!}{4!(5-4)!} D_{4,0} = 5 \times 9 = \boxed{45},$$
$$D_{5,2} = D_{5,5-3} = \binom{5}{3} d_3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} D_{3,0} = 10 \times 2 = \boxed{20},$$
$$D_{5,3} = D_{5,5-2} = \binom{5}{2} d_2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} D_{2,0} = 10 \times 1 = \boxed{10},$$
$$D_{5,4} = D_{5,5-1} = \binom{5}{1} d_1 = \frac{5!}{1!(5-1)!} D_{1,0} = 5 \times 0 = \boxed{0}.$$

De plus, on a d'après le résultat de la question 5 : $\boxed{D_{5,5} = 1}$. Enfin, on a d'après le résultat de la question 4 :

$$D_{5,0} + D_{5,1} + D_{5,2} + D_{5,3} + D_{5,4} + D_{5,5} = \sum_{k=0}^{5} D_{5,k} = 5! = 120.$$

On en déduit d'après les résultats précédents que :

$$D_{5,0} = 120 - D_{5,1} - D_{5,2} - D_{5,3} - D_{5,4} - D_{5,5} = 120 - 45 - 20 - 10 - 0 - 1 = \boxed{44}.$$

(b) *Construire les sept premières lignes du triangle des valeurs de $D_{n,k}$, c'est-à-dire pour les couples d'entiers (n,k) tels que $1 \leqslant n \leqslant 7$ et $0 \leqslant k \leqslant n$.*

▶ On raisonne comme à la question précédentes pour calculer les valeurs de $(D_{6,k})_{0\leqslant k\leqslant 6}$ et $(D_{7,k})_{0\leqslant k\leqslant 7}$. On obtient :

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$n=1$	0	1						
$n=2$	1	0	1					
$n=3$	2	3	0	1				
$n=4$	9	8	6	0	1			
$n=5$	44	45	20	10	0	1		
$n=6$	265	264	135	40	15	0	1	
$n=7$	1854	1855	924	315	70	21	0	1

11. Informatique.

(a) *Écrire en Python une fonction* `fact` *qui prend en argument un entier $k \in \mathbb{N}$ et qui renvoie la valeur de $k!$.*

▶ Par exemple :

```
def fact(k):
    p=1
    for i in range(1,k+1):
        p=p*i
    return p
```

On peut aussi écrire la fonction `fact` *de manière récursive :*

```
def fact(k):
    if k==0:
        return 1
    else:
        return fact(k-1)
```

(b) *Écrire en Python une fonction* `binom` *qui prend en arguments deux entiers $n \geqslant 1$ et $k \in \mathbb{Z}$, et qui renvoie la valeur du coefficient binomial $\binom{n}{k}$.*

▶ Par exemple :

```
def binom(n,k):
    if k<0 or k>n:
        return 0
    else:
        return fact(n)/(fact(k)*fact(n-k))
```

(c) *Dans cette question, on suppose avoir déjà écrit une fonction* `d(n)` *qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie le nombre de dérangements de $[\![1,n]\!]$. En utilisant l'instruction* `if`, *écrire une fonction* `D(n,k)` *qui prend en arguments deux entiers $n \geqslant 1$ et k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, et qui renvoie le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ ayant exactement k points fixes.*

▶ Par exemple :

```
def D(n,k):
    if k==n:
        return 1
    else:
        return binom(n,n-k)*d(n-k)
```

Attention : l'expression $D_{n,k} = D_{n,n-(n-k)} = \binom{n}{n-k} d_{n-k}$ obtenue à l'aide du résultat de la question 9 n'est pas valable pour $n-k=0 \iff k=n$, d'où la nécessité de distinguer ce cas à l'aide de l'instruction `if`. *Par symétrie des coefficients binomiaux, on peut aussi remplacer l'instruction* `binom(n,n-k)` *par l'instruction* `binom(n,k)`.

C) Une formule de récurrence pour d_n

Dans cette partie, on fixe un entier $n \geqslant 3$ et on désigne par $\mathscr{D}$ l'ensemble des dérangements de $[\![1,n]\!]$. On exprimera les réponses aux questions 12(b) et 13(b) en fonction de n, d_{n-1} et d_{n-2}.

12. (a) *Soit $\varphi \in \mathscr{D}$. On pose $\alpha = \varphi(1)$ et on suppose que $\varphi(\alpha) = 1$. Justifier que l'application suivante est bijective et n'a pas de point fixe :*

$$\psi_1 : [\![1,n]\!] \setminus \{1,\alpha\} \to [\![1,n]\!] \setminus \{1,\alpha\}, x \mapsto \varphi(x).$$

► Soit $y \in [\![1,n]\!] \setminus \{1,\alpha\}$. On étudie l'équation $\psi_1(x) = y$ d'inconnue $x \in [\![1,n]\!] \setminus \{1,\alpha\}$. Par définition de ψ_1, on a $\psi_1(x) = \varphi(x)$ donc :

$$\psi_1(x) = y \iff \varphi(x) = y.$$

Or $\varphi \in \mathscr{D}$ donc $\varphi : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ est bijective par définition des dérangements. Par conséquent, l'équation $\varphi(x) = y$ admet une unique solution dans $[\![1,n]\!]$.

Attention : il est nécessaire de prouver que cette solution appartient à l'ensemble $[\![1,n]\!] \setminus \{1,\alpha\}$ pour pouvoir conclure que ψ_1 est bijective.

On note x cette solution. On suppose par l'absurde que $x = 1$, alors $y = \varphi(x) = \varphi(1) = \alpha$ ce qui est absurde car $y \in [\![1,n]\!] \setminus \{1,\alpha\}$. De même, on suppose par l'absurde que $x = \alpha$, alors $y = \varphi(x) = \varphi(\alpha) = 1$ ce qui est absurde car $y \in [\![1,n]\!] \setminus \{1,\alpha\}$. On en déduit que $x \in [\![1,n]\!] \setminus \{1,\alpha\}$. Ainsi, on a montré que l'équation $\psi_1(x) = y$ admet une unique solution dans $[\![1,n]\!] \setminus \{1,\alpha\}$. Puisque ceci est vrai pour tout $y \in [\![1,n]\!] \setminus \{1,\alpha\}$, on en déduit que $\boxed{\psi_1 \text{ est bijective}}$.

On peut aussi vérifier que ψ_1 est injective et surjective à l'aide des définitions de l'injectivité et la surjectivité.

Par l'absurde, on suppose que ψ_1 admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $i \in [\![1,n]\!] \setminus \{1,\alpha\}$ tel que $\psi_1(i) = i$. Par définition de ψ_1, on a $\psi_1(i) = \varphi(i)$ donc $\varphi(i) = i$. Ainsi i est aussi un point fixe de φ, ce qui est absurde car φ n'a pas de point fixe par définition des dérangements. Par conséquent, $\boxed{\psi_1 \text{ n'a pas de point fixe}}$.

(b) *En déduire le cardinal de l'ensemble $\mathscr{D}_1 = \{\varphi \in \mathscr{D} \mid \varphi(\varphi(1)) = 1\}$.*

► D'après le résultat de la question précédente, on peut modéliser le choix d'une application $\varphi \in \mathscr{D}_1$ par le choix de $\alpha = \varphi(1)$ et puis le choix d'une bijection $\psi_1 : [\![1,n]\!]\setminus\{1,\alpha\} \to [\![1,n]\!]\setminus\{1,\alpha\}$ sans point fixe. Puisque $\varphi : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ n'a pas de point fixe par définition des dérangements, on a $\alpha = \varphi(1) \in [\![2,n]\!]$, ce qui fait $n-1$ choix possibles pour $\alpha = \varphi(1)$. De plus, puisque ψ_1 est une permutation sans point fixe de $[\![1,n]\!] \setminus \{1,\alpha\}$ et que $\text{card}([\![1,n]\!] \setminus \{1,\alpha\}) = n-2$, il y a $D_{n-2,0} = d_{n-2}$ choix possibles pour ψ_1. Finalement, on obtient que :

$$\boxed{\text{card}(\mathscr{D}_1) = (n-1)d_{n-2}}.$$

13. (a) *Soit $\varphi \in \mathscr{D}$. On pose $\alpha = \varphi(1)$ et on suppose que $\varphi(\alpha) \neq 1$. Justifier que l'application suivante est bijective et n'a pas de point fixe :*

$$\psi_2 : [\![1,n]\!] \setminus \{\alpha\} \to [\![1,n]\!] \setminus \{\alpha\}, x \mapsto \begin{cases} \varphi(\alpha) & \textit{si } x = 1 \\ \varphi(x) & \textit{si } x \neq 1 \end{cases}.$$

► Soit $y \in [\![1,n]\!] \setminus \{\alpha\}$. On étudie l'équation $\psi_2(x) = y$ d'inconnue $x \in [\![1,n]\!] \setminus \{\alpha\}$.
<u>1er cas</u> : $y = \varphi(\alpha)$. On a $\psi_2(1) = \varphi(\alpha) = y$ par définition de ψ_2 donc $x = 1$ est solution de l'équation $\psi_2(x) = y$. De plus, si $x \in [\![1,n]\!] \setminus \{\alpha\}$ et $x \neq 1$, alors $\psi_2(x) = \varphi(x)$ par définition de ψ_2 et $\varphi(x) \neq \varphi(\alpha)$ car $x \neq \alpha$ et φ est injective par définition des dérangements, donc $\psi_2(x) \neq \varphi(\alpha) = y$. Ainsi, on a montré que dans le cas où $y = \varphi(\alpha)$, l'équation $\psi_2(x) = y$ admet une unique solution dans $[\![1,n]\!] \setminus \{\alpha\}$ (qui est $x = 1$).

2$^{\text{e}}$ cas : $y \neq \varphi(\alpha)$. On a $\psi_2(1) = \varphi(\alpha) \neq y$ par définition de ψ_2 donc $x = 1$ n'est pas solution de l'équation $\psi_2(x) = y$. De plus, si $x \in [\![1,n]\!] \setminus \{\alpha\}$ et $x \neq 1$, alors $\psi_2(x) = \varphi(x)$ par définition de ψ_2 donc :

$$\psi_2(x) = y \iff \varphi(x) = y.$$

Or $\varphi \in \mathscr{D}$ donc $\varphi : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ est bijective par définition des dérangements. Par conséquent, l'équation $\varphi(x) = y$ admet une unique solution dans $[\![1,n]\!]$. On note x cette solution. On suppose par l'absurde que $x = \alpha$, alors $y = \varphi(x) = \varphi(\alpha)$ ce qui est absurde car $y \neq \varphi(\alpha)$. On en déduit que $x \in [\![1,n]\!] \setminus \{\alpha\}$. Ainsi, on a montré que dans le cas où $y \neq \varphi(\alpha)$, l'équation $\psi_2(x) = y$ admet une unique solution dans $[\![1,n]\!] \setminus \{\alpha\}$.
Conclusion. Dans tous les cas, l'équation $\psi_2(x) = y$ admet une unique solution dans $[\![1,n]\!] \setminus \{\alpha\}$ et ceci est vrai pour tout $y \in [\![1,n]\!] \setminus \{\alpha\}$. On en déduit que $\boxed{\psi_2 \text{ est bijective}}$.

On peut aussi vérifier que ψ_2 est injective et surjective à l'aide des définitions de l'injectivité et la surjectivité.

Par l'absurde, on suppose que ψ_2 admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $i \in [\![1,n]\!] \setminus \{\alpha\}$ tel que $\psi_2(i) = i$. Puisque $\psi_2(1) = \varphi(\alpha) \neq 1$ d'après l'énoncé, 1 n'est pas un point fixe de ψ_2 donc $i \neq 1$. Par définition de ψ_2, on a $\psi_2(i) = \varphi(i)$ donc $\varphi(i) = i$. Ainsi i est aussi un point fixe de φ, ce qui est absurde car φ n'a pas de point fixe par définition des dérangements. Par conséquent, $\boxed{\psi_2 \text{ n'a pas de point fixe}}$.

(b) *En déduire le cardinal de l'ensemble $\mathscr{D}_2 = \{\varphi \in \mathscr{D} \mid \varphi(\varphi(1)) \neq 1\}$.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, on peut modéliser le choix d'une application $\varphi \in \mathscr{D}_2$ par le choix de $\alpha = \varphi(1)$ et puis le choix d'une bijection $\psi_2 : [\![1,n]\!] \setminus \{\alpha\} \to [\![1,n]\!] \setminus \{\alpha\}$ sans point fixe. Puisque $\varphi : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ n'a pas de point fixe par définition des dérangements, on a $\alpha = \varphi(1) \in [\![2,n]\!]$, ce qui fait $n-1$ choix possibles pour $\alpha = \varphi(1)$. De plus, puisque ψ_2 est une permutation sans point fixe de $[\![1,n]\!] \setminus \{\alpha\}$ et que $\text{card}([\![1,n]\!] \setminus \{\alpha\}) = n-1$, il y a $D_{n-1,0} = d_{n-1}$ choix possibles pour ψ_2. Finalement, on obtient que :

$$\boxed{\text{card}(\mathscr{D}_2) = (n-1)d_{n-1}}.$$

14. *Montrer que :*

$$\boxed{d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})}.$$

▶ Si $\varphi \in \mathscr{D}$ alors on a $\varphi(\varphi(1)) = 1$ ou bien $\varphi(\varphi(1)) \neq 1$. Autrement dit, $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 = \emptyset$ et $\mathscr{D}_1 \cup \mathscr{D}_2 = \mathscr{D}$. On en déduit d'après les résultats des questions 12(b) et 13(b) que :

$$d_n = \text{card}(\mathscr{D}) = \text{card}(\mathscr{D}_1) + \text{card}(\mathscr{D}_2) = (n-1)d_{n-2} + (n-1)d_{n-1} = \boxed{(n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})}.$$

15. Application numérique. *En déduire les valeurs de d_8, d_9 et d_{10}.*

▶ En reprenant les valeurs obtenues à la question 10(b), on obtient d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned} d_8 &= (8-2)(d_7 + d_6) = 6 \times (1854 + 265) = \boxed{14833}, \\ d_9 &= (9-2)(d_8 + d_7) = 7 \times (14833 + 1854) = \boxed{133496}, \\ d_{10} &= (10-2)(d_9 + d_8) = 8 \times (133496 + 14833) = \boxed{1334961}. \end{aligned}$$

16. Informatique. *En utilisant les instructions `if` et `for`, écrire une fonction `d(n)` qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie le nombre de dérangements de $[\![1,n]\!]$.*

▶ Par exemple :

```
def d(n):
    if n==1:
        return 0
    elif n==2:
        return 1
    else:
        a=0
        b=1
        for i in range(3,n+1):
            c=(i-1)*(b+a)
            a=b
            b=c
        return c
```

D) Une formule générale pour d_n et $D_{n,k}$

Dans cette partie, on fixe un entier $n \geqslant 1$.

17. *À l'aide de résultats précédents, montrer que $\ell! - 1 = \sum_{k=1}^{\ell} \binom{\ell}{k} d_k$ pour tout entier $\ell \geqslant 1$.*

▶ Soit $\ell \geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned}
\ell! &= \sum_{k=0}^{\ell} D_{\ell,k} \quad \text{d'après le résultat de la question 4} \\
&= \sum_{j=0}^{\ell} D_{\ell,\ell-j} \quad \text{par inversion l'ordre de sommation en posant } j = \ell - k \iff k = \ell - j \\
&= D_{\ell,\ell-0} + \sum_{j=1}^{\ell} D_{\ell,\ell-j} = D_{\ell,\ell} + \sum_{k=1}^{\ell} D_{\ell,\ell-k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\ell} \binom{\ell}{k} d_k \quad \text{d'après les résultats des questions 5 et 9.}
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\ell! - 1 = \sum_{k=1}^{\ell} \binom{\ell}{k} d_k}$.

Attention : il est nécessaire de sortir le terme $D_{\ell,\ell}$ de la somme car le résultat de la question 9 est vrai seulement pour $1 \leqslant k \leqslant n$

.

18. *On pose $\delta_k = \sum_{\ell=k}^{n} \binom{n}{\ell}\binom{\ell}{k}(-1)^{\ell}$ pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$.*

(a) *Montrer que $\binom{n}{\ell}\binom{\ell}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell-k}$ pour tout couple d'entiers (k, ℓ) tels que $1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n$.*

▶ Soient $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n$. On a par définition des coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{\ell}\binom{\ell}{k} = \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} \times \frac{\ell!}{k!(\ell-k)!} = \frac{n!}{(n-\ell)!k!(\ell-k)!}$$

$$\text{et} \quad \binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(\ell-k)!((n-k)-(\ell-k))!} = \frac{n!}{k!(\ell-k)!(n-\ell)!}.$$

Par conséquent, $\boxed{\binom{n}{\ell}\binom{\ell}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell-k}}$.

(b) *En déduire que $\delta_k = 0$ si $k \neq n$.*

▶ On supppose que $k \neq n$. Alors on a :

$$\begin{aligned}
\delta_k &= \sum_{\ell=k}^{n} \binom{n}{\ell}\binom{\ell}{k}(-1)^\ell \\
&= \sum_{\ell=k}^{n} \binom{n}{k}\binom{n-k}{\ell-k}(-1)^\ell \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= \binom{n}{k}\sum_{\ell=k}^{n} \binom{n-k}{\ell-k}(-1)^\ell \quad \text{par linéarité} \\
&= \binom{n}{k}\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j}(-1)^{j+k} \quad \text{par décalage d'indice en posant } j=\ell-k \iff \ell=j+k \\
&= \binom{n}{k}(-1)^k\sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j}(-1)^{j}1^{n-k-j} \quad \text{par linéarité} \\
&= \binom{n}{k}(-1)^k(-1+1)^{n-k} \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton} \\
&= \boxed{0} \quad \text{car } n-k \geqslant 1 \text{ puisque } k \neq n.
\end{aligned}$$

Attention : il est nécessaire d'utiliser l'hypothèse $k \neq n$ pour conclure afin de préciser que $n-k \neq 0$ car 0^0 n'est pas défini.

(c) Que vaut δ_k si $k=n$?

▶ On a :

$$\delta_n = \sum_{\ell=n}^{n} \binom{n}{\ell}\binom{\ell}{n}(-1)^\ell = \binom{n}{n}\binom{n}{n}(-1)^n = \boxed{(-1)^n}.$$

19. Déduire des résultats précédents que $\sum_{\ell=1}^{n}\binom{n}{\ell}(\ell!-1)(-1)^\ell = (-1)^n d_n$.

▶ On a :

$$\begin{aligned}
&\sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell}(\ell!-1)(-1)^\ell \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell}\left(\sum_{k=1}^{\ell}\binom{\ell}{k}d_k\right)(-1)^\ell \quad \text{d'après le résultat de la question 17} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{\ell} \binom{n}{\ell}\binom{\ell}{k}d_k(-1)^\ell = \sum_{1\leqslant k\leqslant \ell\leqslant n}\binom{n}{\ell}\binom{\ell}{k}d_k(-1)^\ell \quad \text{par linéarité} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=k}^{n} \binom{n}{\ell}\binom{\ell}{k}d_k(-1)^\ell \quad \text{en reconnaissant une somme double sur un triange d'indices} \\
&= \sum_{k=1}^{n} d_k\left(\sum_{\ell=k}^{n}\binom{n}{\ell}\binom{\ell}{k}d_k(-1)^\ell\right) \quad \text{par linéarité} \\
&= \sum_{k=1}^{n} d_k\delta_k \quad \text{par définition de } \delta_k \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} d_k\delta_k + d_n\delta_n = \sum_{k=1}^{n-1} d_k 0 + d_n(-1)^n \quad \text{d'après les résultats des questions 18(b) et 18(c)} \\
&= \boxed{(-1)^n d_n}.
\end{aligned}$$

20. En déduire que :

$$\boxed{d_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}}, \quad \textit{puis que :} \quad \boxed{D_{n,k} = \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}} \quad \textit{pour tout entier } k \textit{ tel que } 0 \leqslant k \leqslant n.$$

▶ On a :

$$\begin{aligned}
d_n &= \frac{1}{(-1)^n} \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} (\ell! - 1)(-1)^\ell \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= (-1)^n \left(\sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} \ell! (-1)^\ell - \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} (-1)^\ell \right) \quad \text{par linéarité et car } \tfrac{1}{(-1)^n} = \tfrac{1^n}{(-1)^n} = \left(\tfrac{1}{-1}\right)^n = (-1)^n \\
&= (-1)^n \left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} \ell! (-1)^\ell - \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} (-1)^\ell}_{=\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell}(-1)^\ell 1^{n-\ell}} + \binom{n}{0} (-1)^0 \right) \quad \text{par définition des coefficients binomiaux} \\
&= (-1)^n \left(\sum_{\ell=0}^{n} \frac{n!(-1)^\ell}{(n-\ell)!} - \frac{n!(-1)^0}{(n-0)!} - (-1+1)^n + 1 \right) \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton} \\
&= (-1)^n \left(\sum_{\ell=0}^{n} \frac{n!(-1)^\ell}{(n-\ell)!} - 1 - 0 + 1 \right) = (-1)^n n! \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-1)^\ell}{(n-\ell)!} \quad \text{par linéarité} \\
&= (-1)^n n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i}}{i!} \quad \text{par inversion de l'ordre de sommation en posant } i = n - \ell \iff \ell = n - i \\
&= (-1)^{2n} n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{-i}}{i!} \quad \text{par linéarité} \\
&= \boxed{n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}} \quad \text{car } (-1)^{2n} = ((-1)^2)^n = 1^n = 1 \text{ et } (-1)^{-i} = \tfrac{1}{(-1)^i} = \tfrac{1^i}{(-1)^i} = \left(\tfrac{1}{-1}\right)^i = (-1)^i.
\end{aligned}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. On a :

$$D_{n,k} = D_{n,n-(n-k)}.$$

<u>1^{er} cas</u> : si $1 \leqslant n-k \leqslant n \iff 0 \leqslant k \leqslant n-1$ alors on obtient d'après le résultat de la question 9 :

$$\begin{aligned}
D_{n,k} = D_{n,n-(n-k)} &= \binom{n}{n-k} d_{n-k} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} (n-k)! \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \quad \text{par définition des coefficients binomiaux et d'après le résultat précédent} \\
&= \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}.
\end{aligned}$$

<u>2^e cas</u> : si $k = n$ alors :

$$\frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} = \frac{n!}{n!} \sum_{i=0}^{n-n} \frac{(-1)^i}{i!} = \frac{(-1)^0}{0!} = 1 = D_{n,n} \quad \text{d'après le résultat de la question 5.}$$

<u>Conclusion</u> : dans tous les cas, on a bien montré que :

$$\boxed{D_{n,k} = \frac{n!}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!}}.$$

Attention : il est nécessaire de distinguer le cas $n-k=0$ car le résultat de la question 9 est vrai seulement pour $1 \leqslant n-k \leqslant n$.

21. Informatique. *À l'aide des résultats de la question précédente, proposer une manière plus simple d'écrire les fonctions* `d(n)` *et* `D(n,k)` *en définissant deux nouvelles fonctions* `d2(n)` *et* `D2(n,k)`.

   ▶ Par exemple :

```
def d2(n):
    s=0
    for i in range(n+1):
        s=s+((-1)**i)/fact(i)
    return fact(n)*s
```

   et :

```
def D2(n,k):
    s=0
    for i in range(n-k+1):
        s=s+((-1)**i)/fact(i)
    return fact(n)/fact(k)*s
```

E) Application numérique : Secret Santa

Pour l'arrivée des vacances de Noël, une classe de BCPST1 constituée de 46 étudiants et 5 enseignants décide d'organiser un événement du type «Secret Santa» : les noms de tous les participants sont placés dans un chapeau et chacun tire au hasard et secrètement le nom de quelqu'un à qui il offrira un petit cadeau. On souhaite déterminer la probabilité qu'aucun participant ne tire au hasard son propre nom.

22. *Exprimer le nombre total de tirages possibles.*

   ▶ Un tirage correspond à attribuer un seul nom à chaque participant. On peut donc modéliser un tirage par une permutation des 46+5=51 noms des participants. Par conséquent, il y a autant de tirages possibles que de permutations des 51 noms, c'est-à-dire $\boxed{51!}$.

23. *Exprimer le nombre total des tirages au cours desquels aucun participant ne tire son propre nom.*

   ▶ Un participant qui tire son propre nom correspond à un point fixe de la permutation modélisant le tirage. On peut donc modéliser un tirage au cours duquel aucun participant ne tire son propre nom par une permutation sans point fixe des 51 noms des participants. Par conséquent, il y a $\boxed{D_{51,0} = d_{51}}$ tirages de ce type.

24. *À l'aide des fonctions écrites en Python dans ce DM, déterminer une approximation de la probabilité recherchée (à exprimer en pourcentage).*

   ▶ D'après les résultats précédents, la probabilité qu'aucun participant ne tire au hasard son propre nom est égale à $d_{51}/51!$. Or on obtient en Python :

```
>>> d(51)/fact(51)
0.36787944117144233
```

   Par conséquent, cette probabilité est approximativement égale à $\boxed{36,8\%}$.

25. *Construire le diagramme en bâtons des probabilités du nombre de participants qui tirent leur propre nom.*

   ▶ En raisonnant comme aux questions précédentes, pour chaque entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 51$, la probabilité que k participants tirent au hasard leur propre nom est égale à $D_{51,k}/51!$. Or on obtient en Python :

```
>>> D(51,0)/fact(51)
0.36787944117144233
>>> D(51,1)/fact(51)
0.36787944117144233
>>> D(51,2)/fact(51)
0.18393972058572117
>>> D(51,3)/fact(51)
0.06131324019524039
>>> D(51,4)/fact(51)
0.015328310048810098
>>> D(51,5)/fact(51)
0.0030656620097620196
>>> D(51,6)/fact(51)
0.0005109436682936699
>>> D(51,7)/fact(51)
7.299195261338143e-05
...
```

Ce qui donne dans un diagramme en bâtons :