DM n° 5 de mathématiques

à rendre au plus tard le mercredi 9 janvier

Ce DM propose d'étudier un puzzle électronique se présentant sous la forme d'une grille rectangulaire de touches retro-éclairées (sous chaque touche est située une diode électroluminescente qui peut être allumée ou éteinte). Au début du jeu, aucune case de la grille n'est éclairée. Puis à chaque pression sur une touche, l'état de la diode correspondante change ainsi que l'état de chaque diode voisine (horizontalement et verticalement mais pas diagonalement). La figure 1 présente un exemple de pressions successives et leurs effets sur les diodes. Le but du jeu est de trouver une combinaison de touches permettant d'éclairer toutes les cases de la grille ou seulement certaines d'entre elles afin de reproduire un modèle donné, par exemple seulement la première case en haut à gauche. La figure 2 présente les solutions à certains de ces problèmes.

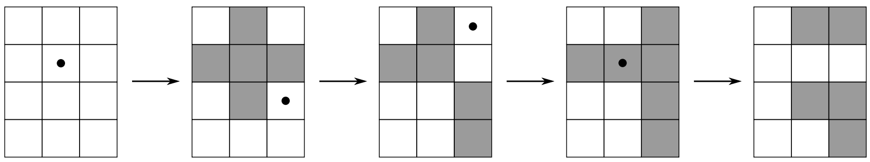

Figure 1. À chaque étape, la touche pressée est repérée par un point et les touches éclairées sont coloriées.

Pour modéliser le puzzle, on utilisera les notations suivantes :

- n désigne le nombre de lignes de la grille et p son nombre de colonnes,
- les cases sont numérotées de 1 à np dans le sens de la lecture (de gauche à droite et de haut en bas),
- x_k désigne le nombre de fois qu'on presse la touche n° k au cours du jeu (pour tout $k \in [\![1, np]\!]$),
- d_k désigne le nombre de fois que la diode n° k change d'état au cours du jeu.

On remarque que l'ordre dans lequel on presse les touches n'a aucune importance. De plus, presser deux fois une touche (pas nécessairement à la suite) est inutile : l'état de toutes les diodes après la deuxième pression est le même que si la touche n'avait jamais été pressée. On peut donc supposer que $x_k \in \{0, 1\}$ pour tout $k \in [\![1, np]\!]$. D'autre part, on remarque que la diode n° k est allumée si d_k est impair et éteinte si d_k est pair. Ainsi, résoudre le problème consistant à éclairer toutes les cases revient à chercher une liste $(x_1, x_2, \ldots, x_{np}) \in \{0, 1\}^{np}$ telle que tous les d_k sont impairs (mais pas nécessairement égaux).

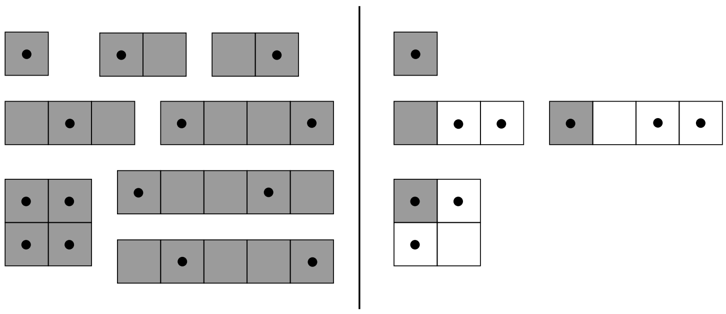

Figure 2. Les combinaisons de touches permettant d'éclairer toutes les cases (à gauche) ou seulement la première case (à droite) dans les cas où (n, p) est égal à $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 2)$ ou $(1, 5)$.

Enfin, on respectera les consignes suivantes :

— Si le DM est rédigé par une seule personne, les questions 6 et 9 ne sont pas obligatoires.

— Si le DM est rédigé en binôme, les questions 6 et 10 doivent être rédigées par la même personne et les questions 7 et 9 par l'autre personne. La rédaction des autres questions doit être partagée équitablement.

— On utilisera la notation shématique de la figure 2 pour écrire une combinaison de touches.

— On pourra utiliser sans justifier que la somme : de deux entiers pairs est paire, de deux entiers impairs est paire, d'un entier pair et d'un entier impair est impair ; et que le produit : de deux entiers pairs est pair, de deux entiers impairs est impair, d'un entier pair et d'un entier impair est pair.

A) Un premier exemple

1. Dans cette question, on étudie le cas $(n, p) = (1, 6)$.

   (a) Exprimer d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 et d_6 en fonction de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 et x_6. On écrira ces expressions sous la forme d'un système linéaire $(S_{1,6})$ d'inconnues $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$.

   (b) Échelonner le système $(S_{1,6})$ à l'aide de la méthode du pivot de Gauss. Quel est son rang ?

(c) Montrer qu'il existe une unique liste $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \{0,1\}^6$ telle que d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 et d_6 sont tous impairs (mais pas nécessairement égaux). Pour cela, on pourra étudier la parité de chaque ligne du système échelonné de la question précédente. Que peut-on en déduire ?

(d) Est-il possible de trouver des combinaisons de touches permettant d'éclairer seulement la première case de la grille ? Si oui, combien et quelles sont-elles ?

B) Modélisation informatique

Pour la création de tableaux en Python, on utilisera la fonction `array` de la bibliothèque `numpy` (qu'on importera). Par exemple, `T=numpy.array([[0,0,1],[0,2,0],[0,0,1],[0,0,0]])` correspond au tableau des touches pressées de la figure 1. On rappelle que la fonction `shape` de la bibliothèque `numpy` retourne les dimensions d'un tableau sous forme d'une liste. Ainsi, `numpy.shape(T)` retourne `(4,3)`.

2. Écrire la fonction `nbChangements(X)` qui prend en argument un tableau `X` (de dimensions quelconques) des touches pressées (les x_k) et qui retourne le tableau `D` (de mêmes dimensions) des nombres de changements d'états des diodes (les d_k). Ainsi, `nbChangements(T)` retourne `[[0,3,1],[2,2,4],[0,3,1],[0,0,1]]`.
3. À l'aide de la fonction `nbChangements`, écrire la fonction `puzzle(X)` qui prend en argument un tableau `X` des touches pressées et qui retourne le tableau de l'état des diodes avec des 0 pour les diodes éteintes et des 1 pour les diodes allumées. Ainsi, `puzzle(T)` retourne `[[0,1,1],[0,0,0],[0,1,1],[0,0,1]]`.
4. Que retourne `puzzle(A)` si `A=numpy.array([[0,0,1,1],[0,0,1,1],[1,0,0,0]])` ?

Dans la suite du DM, on pourra s'aider de la fonction `puzzle` pour vérifier les résultats.

C) Quelques exemples de rang maximal

5. Dans cette question, on étudie le cas $(n, p) = (1, 7)$.
   (a) Échelonner le système $(S_{1,7})$ exprimant les d_k en fonction des x_k et déterminer son rang.
   (b) En vous inspirant de la question 1(c), trouver, si elles existent, toutes les combinaisons de touches permettant d'éclairer toutes les cases de la grille.
   (c) De même, trouver, si elles existent, toutes les combinaisons de touches permettant d'éclairer seulement la première case de la grille.
6. Étudier de manière similaire le cas $(n, p) = (2, 4)$ (sans oublier de préciser le rang).
7. Étudier de manière similaire le cas $(n, p) = (3, 3)$ (sans oublier de préciser le rang).

D) Quelques exemples de rang non maximal

8. Dans cette question, on étudie le cas $(n, p) = (2, 3)$.
   (a) Échelonner le système $(S_{2,3})$ exprimant les d_k en fonction des x_k et déterminer son rang.
   (b) Montrer qu'il n'existe aucune liste $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \{0,1\}^6$ telle que d_1 est impair et d_2, d_3, d_4, d_5 et d_6 sont pairs. Que peut-on en déduire ?
   (c) Dans cette question, on fixe une liste $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \{0,1\}^6$ et on suppose que d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 et d_6 sont tous impairs.
      i. Montrer que $x_1 \neq x_3$, $x_2 = x_5$ et $x_4 \neq x_6$.
      ii. Montrer que (x_3, x_4, x_5) est égal à $(0,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ ou bien $(1,1,0)$.
      iii. Déduire des résultats précédents toutes les combinaisons de touches permettant d'éclairer toutes les cases de la grille.
9. Étudier de manière similaire le cas $(n, p) = (1, 8)$ (sans oublier de préciser le rang).
10. Étudier de manière similaire le cas $(n, p) = (2, 5)$ (sans oublier de préciser le rang).

E) Questions diverses et conjectures

11. En reprenant les résultats de la question 7, trouver une combinaison de touches permettant d'éclairer toutes les cases de la grille sauf la case centrale dans le cas $(n, p) = (3, 3)$.
12. En reprenant les résultats de la question 10, trouver un modèle ayant exactement cinq cases éclairées mais impossible à reproduire avec une combinaison de touches pour le cas $(n, p) = (2, 5)$.
13. À l'aide de la fonction `puzzle` et en procédant par tâtonnements, trouver une combinaison de touches permettant d'éclairer seulement la première case de la grille dans le cas $(n, p) = (3, 4)$. Quelles sont toutes les conjectures que l'on peut en déduire ?
14. À l'aide de la fonction `puzzle` et en procédant par tâtonnements, trouver au moins deux combinaisons de touches différentes permettant d'éclairer toutes les cases de la grille dans le cas $(n, p) = (4, 4)$. Quelles sont toutes les conjectures que l'on peut en déduire ?