Corrigé du DM n° 5 de mathématiques

A) Un premier exemple

1. Dans cette question, on étudie le cas $(n, p) = (1, 6)$.

(a) Exprimer d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 et d_6 en fonction de x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 et x_6. On écrira ces expressions sous la forme d'un système linéaire $(S_{1,6})$ d'inconnues $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$.

▶ En numérotant les cases de la grille comme indiqué dans l'énoncé, on obtient :

1	2	3	4	5	6

et donc :

$$\boxed{\begin{cases} d_1 = x_1 + x_2 \\ d_2 = x_1 + x_2 + x_3 \\ d_3 = x_2 + x_3 + x_4 \\ d_4 = x_3 + x_4 + x_5 \\ d_5 = x_4 + x_5 + x_6 \\ d_6 = x_5 + x_6 \end{cases}} \qquad (S_{1,6})$$

(b) Échelonner le système $(S_{1,6})$ à l'aide de la méthode du pivot de Gauss. Quel est son rang ?

▶ On a d'après la méthode du pivot de Gauss :

$$(S_{1,6}) \iff \begin{cases} \boxed{1}x_1 + x_2 = d_1 \\ \boxed{1}x_2 + x_3 + x_4 = d_3 \\ \boxed{1}x_3 + x_4 + x_5 = d_4 \\ \boxed{1}x_4 + x_5 + x_6 = d_5 \\ \boxed{1}x_5 + x_6 = d_6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = d_2 \quad (L_6 \leftarrow L_6 - L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dots \\ x_3 = d_2 - d_1 \quad (L_6 \leftarrow L_6 - L_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dots \\ -x_4 - x_5 = d_2 - d_1 - d_4 \quad (L_6 \leftarrow L_6 + L_4) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dots \\ x_6 = d_2 - d_1 - d_4 + d_5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{1}x_1 + x_2 = d_1 \\ \boxed{1}x_2 + x_3 + x_4 = d_3 \\ \boxed{1}x_3 + x_4 + x_5 = d_4 \\ \boxed{1}x_4 + x_5 + x_6 = d_5 \\ \boxed{1}x_5 + x_6 = d_6 \\ \boxed{1}x_6 = d_2 - d_1 - d_4 + d_5 \end{cases}$$

On obtient donc un système linéaire de $\boxed{\text{rang } 6}$.

(c) Montrer qu'il existe une unique liste $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \{0, 1\}^6$ telle que d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 et d_6 sont tous impairs (mais pas nécessairement égaux). Pour cela, on pourra étudier la parité de chaque ligne du système échelonné de la question précédente. Que peut-on en déduire ?

▶ On suppose que d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 et d_6 sont tous impairs.

— D'après la ligne (L_6) du système échelonné de la question précédente, on en déduit que $x_6 = d_2 - d_1 - d_4 + d_5$ est pair donc que $\boxed{x_6 = 0}$ puisque $x_6 \in \{0, 1\}$.

— De même, d'après (L_5), on obtient que $x_5 = d_6 - x_6 = d_6$ est impair donc que $\boxed{x_5 = 1}$.

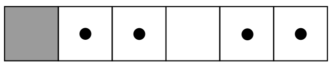
— De même, d'après (L_4), on obtient que $x_4 = d_5 - x_5 - x_6 = d_5 - 1$ est pair donc que $\boxed{x_4 = 0}$.
— De même, d'après (L_3), on obtient que $x_3 = d_4 - x_4 - x_5 = d_4 - 1$ est pair donc que $\boxed{x_3 = 0}$.
— De même, d'après (L_2), on obtient que $x_2 = d_3 - x_3 - x_4 = d_3$ est impair donc que $\boxed{x_2 = 1}$.
— Enfin, d'après (L_1), on obtient que $x_1 = d_1 - x_2 = d_1 - 1$ est pair donc que $\boxed{x_1 = 0}$.

On a bien montré qu'il existe une unique liste $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \{0,1\}^6$ telle que d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 et d_6 soient tous impairs. Cette liste est $\boxed{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0,1,0,0,1,0)}$. On en déduit qu'il existe une unique combinaison de touches permettant d'éclairer toutes les cases de la grille, qui est :

(d) *Est-il possible de trouver des combinaisons de touches permettant d'éclairer seulement la première case de la grille ? Si oui, combien et quelles sont-elles ?*

▶ Trouver les combinaisons de touches permettant d'éclairer seulement la première case de la grille revient à chercher les listes $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \{0,1\}^6$ telles que d_1 soit impair et d_2, d_3, d_4, d_5 et d_6 soient pairs (mais pas nécessairement égaux). En reprenant le même raisonnement que celui de la question précédente, on obtient :
— d'après (L_6), $x_6 = d_2 - d_1 - d_4 + d_5$ est impair donc $\boxed{x_6 = 1}$;
— d'après (L_5), $x_5 = d_6 - x_6 = d_6 - 1$ est impair donc $\boxed{x_5 = 1}$;
— d'après (L_4), $x_4 = d_5 - x_5 - x_6 = d_5 - 2$ est pair donc $\boxed{x_4 = 0}$;
— d'après (L_3), $x_3 = d_4 - x_4 - x_5 = d_4 - 1$ est impair donc $\boxed{x_3 = 1}$;
— d'après (L_2), $x_2 = d_3 - x_3 - x_4 = d_3 - 1$ est impair donc $\boxed{x_2 = 1}$;
— d'après (L_1), $x_1 = d_1 - x_2 = d_1 - 1$ est pair donc $\boxed{x_1 = 0}$.

On en déduit qu'il existe une unique combinaison de touches permettant d'éclairer seulement la première case de la grille, qui est :



B) Modélisation informatique

Pour la création de tableaux en Python, on utilisera la fonction `array` *de la bibliothèque* `numpy` *(qu'on importera). Par exemple,* `T=numpy.array([[0,0,1],[0,2,0],[0,0,1],[0,0,0]])` *correspond au tableau des touches pressées de la figure 1. On rappelle que la fonction* `shape` *de la bibliothèque* `numpy` *renvoie les dimensions d'un tableau sous forme d'une liste. Ainsi,* `numpy.shape(T)` *renvoie* `(4,3)`*.*

2. *Écrire la fonction* `nbChangements(X)` *qui prend en argument un tableau* `X` *des touches pressées (les x_k) et qui renvoie le tableau* `D` *(de mêmes dimensions) des nombres de changements d'états des diodes (les d_k). Ainsi,* `nbChangements(T)` *renvoie* `[[0,3,1],[2,2,4],[0,3,1],[0,0,1]]`*.*

▶

```
import numpy
def nbChangements(X):
    (n,p)=numpy.shape(X)
    D=X
    for i in range(0,n):
        for j in range(0,p):
            if i!=0:
                D[i][j]+=X[i-1][j]
            if i!=n-1:
                D[i][j]+=X[i+1][j]
            if j!=0:
                D[i][j]+=X[i][j-1]
            if j!=p-1:
                D[i][j]+=X[i][j+1]
    return D
```

3. *À l'aide de la fonction* `nbChangements`*, écrire la fonction* `puzzle(X)` *qui prend en argument un tableau* `X` *des touches pressées et qui renvoie le tableau de l'état des diodes avec des 0 pour les éteintes et des 1 pour les allumées. Ainsi,* `puzzle(T)` *renvoie* `[[0,1,1],[0,0,0],[0,1,1],[0,0,1]]`.

▶

```
def puzzle(X):
    (n,p)=numpy.shape(X)
    D=nbChangements(X)
    for i in range(0,n):
        for j in range(0,p):
            if D[i][j]%2==0:
                D[i][j]=0
            else:
                D[i][j]=1
    return D
```

4. *Que renvoie* `puzzle(A)` *si* `A=numpy.array([[0,0,1,1],[0,0,1,1],[1,0,0,0]])` *?*

▶

```
A=numpy.array([[0,0,1,1],[0,0,1,1],[1,0,0,0]])
print(puzzle(A))
>>>[[0,1,1,1]
    [1,1,1,1]
    [1,1,1,1]]
```

C) Quelques exemples de rang maximal

5. *Dans cette question, on étudie le cas $(n,p)=(1,7)$.*

   (a) *Échelonner le système $(S_{1,7})$ exprimant les d_k en fonction des x_k et déterminer son rang.*

   ▶ En numérotant les cases de la grille comme indiqué dans l'énoncé, on obtient :

1	2	3	4	5	6	7

et donc :

$$(S_{1,7}) \iff \begin{cases} d_1 = x_1 + x_2 \\ d_2 = x_1 + x_2 + x_3 \\ d_3 = x_2 + x_3 + x_4 \\ d_4 = x_3 + x_4 + x_5 \\ d_5 = x_4 + x_5 + x_6 \\ d_6 = x_5 + x_6 + x_7 \\ d_7 = x_6 + x_7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{1}x_1 + x_2 = d_1 \\ \boxed{1}x_2 + x_3 + x_4 = d_3 \\ \boxed{1}x_3 + x_4 + x_5 = d_4 \\ \boxed{1}x_4 + x_5 + x_6 = d_5 \\ \boxed{1}x_5 + x_6 + x_7 = d_6 \\ \boxed{1}x_6 + x_7 = d_7 \\ x_1 + x_2 + x_3 = d_2 \quad (L_7 \leftarrow L_7 - L_1) \end{cases}$$

$$(S_{1,7}) \iff \begin{cases} \dots \\ x_3 \qquad = d_2 - d_1 \quad (L_7 \leftarrow L_7 - L_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \qquad \dots \\ -x_4 - x_5 \qquad = d_2 - d_1 - d_4 \quad (L_7 \leftarrow L_7 + L_4) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dots \\ x_6 \quad = d_2 - d_1 - d_4 + d_5 \quad (L_7 \leftarrow L_7 - L_6) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dots \\ -x_7 = d_2 - d_1 - d_4 + d_5 - d_7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{1}x_1 + x_2 = d_1 \\ \boxed{1}x_2 + x_3 + x_4 = d_3 \\ \boxed{1}x_3 + x_4 + x_5 = d_4 \\ \boxed{1}x_4 + x_5 + x_6 = d_5 \\ \boxed{1}x_5 + x_6 + x_7 = d_6 \\ \boxed{1}x_6 + x_7 = d_7 \\ \boxed{-1}x_7 = d_2 - d_1 - d_4 + d_5 - d_7 \end{cases}$$

On a donc un système linéaire de $\boxed{\text{rang } 7}$.

(b) En vous inspirant de la question 1(c), trouver, si elles existent, toutes les combinaisons de touches permettant d'éclairer toutes les cases de la grille.

▶ On suppose que d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6 et d_7 sont tous impairs. À l'aide du même raisonnement que celui de la question 1(c), on obtient :

— d'après (L_7), $-x_7 = d_2 - d_1 - d_4 + d_5 - d_7$ est impair donc $\boxed{x_7 = 1}$;

— d'après (L_6), $x_6 = d_7 - x_7 = d_7 - 1$ est pair donc $\boxed{x_6 = 0}$;

— d'après (L_5), $x_5 = d_6 - x_6 - x_7 = d_6 - 1$ est pair donc $\boxed{x_5 = 0}$;

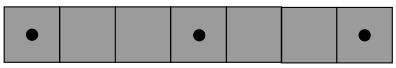
— d'après (L_4), $x_4 = d_5 - x_5 - x_6 = d_5$ est impair donc $\boxed{x_4 = 1}$;

— d'après (L_3), $x_3 = d_4 - x_4 - x_5 = d_4 - 1$ est pair donc $\boxed{x_3 = 0}$;

— d'après (L_2), $x_2 = d_3 - x_3 - x_4 = d_3 - 1$ est pair donc $\boxed{x_2 = 0}$;

— d'après (L_1), $x_1 = d_1 - x_2 = d_1$ est impair donc $\boxed{x_1 = 1}$.

On en déduit qu'il existe une unique combinaison de touches permettant d'éclairer toutes les cases de la grille, qui est :



(c) De même, trouver, si elles existent, toutes les combinaisons de touches permettant d'éclairer seulement la première case de la grille.

▶ On suppose que d_1 est impair et d_2, d_3, d_4, d_5, d_6 et d_7 sont pairs. En reprenant le même raisonnement que celui de la question précédente, on obtient :

— d'après (L_7), $-x_7 = d_2 - d_1 - d_4 + d_5 - d_7$ est impair donc $\boxed{x_7 = 1}$;

— d'après (L_6), $x_6 = d_7 - x_7 = d_7 - 1$ est impair donc $\boxed{x_6 = 1}$;

— d'après (L_5), $x_5 = d_6 - x_6 - x_7 = d_6 - 2$ est pair donc $\boxed{x_5 = 0}$;

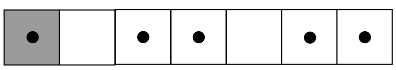
— d'après (L_4), $x_4 = d_5 - x_5 - x_6 = d_5 - 1$ est impair donc $\boxed{x_4 = 1}$;

— d'après (L_3), $x_3 = d_4 - x_4 - x_5 = d_4 - 1$ est impair donc $\boxed{x_3 = 1}$;

— d'après (L_2), $x_2 = d_3 - x_3 - x_4 = d_3 - 2$ est pair donc $\boxed{x_2 = 0}$;

— d'après (L_1), $x_1 = d_1 - x_2 = d_1$ est impair donc $\boxed{x_1 = 1}$.

On en déduit qu'il existe une unique combinaison de touches permettant d'éclairer seulement la première case de la grille, qui est :



6. Étudier de manière similaire le cas $(n,p)=(2,4)$ (sans oublier de préciser le rang).

▶ En numérotant les cases de la grille comme indiqué dans l'énoncé, on obtient :

1	2	3	4
5	6	7	8

et donc :

$$(S_{2,4}) \iff \left\{\begin{array}{l} d_1 = x_1+x_2+x_5 \\ d_2 = x_1+x_2+x_3+x_6 \\ d_3 = x_2+x_3+x_4+x_7 \\ d_4 = x_3+x_4+x_8 \\ d_5 = x_1+x_5+x_6 \\ d_6 = x_2+x_5+x_6+x_7 \\ d_7 = x_3+x_6+x_7+x_8 \\ d_8 = x_4+x_7+x_8 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lll} \boxed{1}x_1 + x_2 + x_5 = d_1 & & \\ \boxed{1}x_2 + x_3 + x_4 + x_7 = d_3 & & \\ \boxed{1}x_3 + x_4 + x_8 = d_4 & & \\ \boxed{1}x_4 + x_7 + x_8 = d_8 & & \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = d_2 & & (L_5 \leftarrow L_5 - L_1) \\ x_1 + x_5 + x_6 = d_5 & & (L_6 \leftarrow L_6 - L_1) \\ x_2 + x_5 + x_6 + x_7 = d_6 & & (L_7 \leftarrow L_7 - L_2) \\ x_3 + x_6 + x_7 + x_8 = d_7 & & (L_8 \leftarrow L_8 - L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} \dots & \\ x_3 - x_5 + x_6 = d_2 - d_1 & (L_5 \leftarrow L_5 - L_3) \\ -x_2 + x_6 = d_5 - d_1 & (L_6 \leftarrow L_6 + L_2) \\ - x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = d_6 - d_3 & (L_7 \leftarrow L_7 + L_3) \\ - x_4 + x_6 + x_7 = d_7 - d_4 & (L_8 \leftarrow L_8 + L_4) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} \dots & \\ - x_4 - x_5 + x_6 - x_8 = d_2 - d_1 - d_4 & (L_5 \leftarrow L_5 + L_4) \\ x_3 + x_4 + x_6 + x_7 = d_5 - d_1 + d_3 & (L_6 \leftarrow L_6 - L_3) \\ x_5 + x_6 + x_8 = d_6 - d_3 + d_4 & \\ x_6 + 2x_7 + x_8 = d_7 - d_4 + d_8 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} \dots & \\ \boxed{-1}x_5 + x_6 + x_7 = d_2 - d_1 - d_4 + d_8 & \\ \boxed{1}x_6 + x_7 - x_8 = d_5 - d_1 + d_3 - d_4 & \\ x_5 + x_6 + x_8 = d_6 - d_3 + d_4 & (L_7 \leftarrow L_7 + L_5) \\ x_6 + 2x_7 + x_8 = d_7 - d_4 + d_8 & (L_8 \leftarrow L_8 - L_6) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} \dots & \\ 2x_6 + x_7 + x_8 = d_6 - d_3 + d_4 + d_2 - d_1 - d_4 + d_8 & (L_7 \leftarrow L_7 - 2L_6) \\ x_7 + 2x_8 = d_7 - d_4 + d_8 - d_5 + d_1 - d_3 + d_4 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} \dots & \\ \boxed{-1}x_7 + 3x_8 = d_6 - d_3 + d_2 - d_1 + d_8 - 2d_5 + 2d_1 - 2d_3 + 2d_4 & \\ x_7 + 2x_8 = d_7 + d_8 - d_5 + d_1 - d_3 & (L_8 \leftarrow L_8 + L_7) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} \dots \\ \boxed{-1}x_7 + 3x_8 = d_6 - 3d_3 + d_2 + d_1 + d_8 - 2d_5 + 2d_4 \\ 5x_8 = d_7 + d_8 - d_5 + d_1 - d_3 + d_6 - 3d_3 + d_2 + d_1 + d_8 - 2d_5 + 2d_4 \end{array}\right.$$

$$(S_{2,4}) \iff \left\{\begin{array}{l}
\boxed{1}x_1 + x_2 + x_5 = d_1 \\
\boxed{1}x_2 + x_3 + x_4 + x_7 = d_3 \\
\boxed{1}x_3 + x_4 + x_8 = d_4 \\
\boxed{1}x_4 + x_7 + x_8 = d_8 \\
\boxed{-1}x_5 + x_6 + x_7 = d_2 - d_1 - d_4 + d_8 \\
\boxed{1}x_6 + x_7 - x_8 = d_5 - d_1 + d_3 - d_4 \\
\boxed{-1}x_7 + 3x_8 = d_6 - 3d_3 + d_2 + d_1 + d_8 - 2d_5 + 2d_4 \\
\boxed{5}x_8 = \begin{pmatrix} d_7 + 2d_8 - 3d_5 + 2d_1 \\ -4d_3 + d_6 + d_2 + 2d_4 \end{pmatrix}
\end{array}\right.$$

On a donc un système linéaire de $\boxed{\text{rang } 8}$.

Si on suppose que d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6 , d_7 et d_8 sont tous impairs alors :

— d'après (L_8), $5x_8 = d_7 + 2d_8 - 3d_5 + 2d_1 - 4d_3 + d_6 + d_2 + 2d_4$ est pair donc $\boxed{x_8 = 0}$;

— d'après (L_7), $-x_7 = d_6 - 3d_3 + d_2 + d_1 + d_8 - 2d_5 + 2d_4 - 3x_8$ est impair donc $\boxed{x_7 = 1}$;

— d'après (L_6), $x_6 = d_5 - d_1 + d_3 - d_4 - x_7 + x_8$ est impair donc $\boxed{x_6 = 1}$;

— d'après (L_5), $-x_5 = d_2 - d_1 - d_4 + d_8 - x_6 - x_7$ est pair donc $\boxed{x_5 = 0}$;

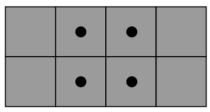
— d'après (L_4), $x_4 = d_8 - x_7 - x_8$ est pair donc $\boxed{x_4 = 0}$;

— d'après (L_3), $x_3 = d_4 - x_4 - x_8$ est impair donc $\boxed{x_3 = 1}$;

— d'après (L_2), $x_2 = d_3 - x_3 - x_4 - x_7$ est impair donc $\boxed{x_2 = 1}$;

— d'après (L_1), $x_1 = d_1 - x_2 - x_5$ est pair donc $\boxed{x_1 = 0}$.

On en déduit qu'il existe une unique combinaison de touches permettant d'éclairer toutes les cases de la grille, qui est :



Si on suppose que d_1 est impair et d_2, d_3, d_4, d_5, d_6 , d_7 et d_8 sont pairs alors :

— d'après (L_8), $5x_8 = d_7 + 2d_8 - 3d_5 + 2d_1 - 4d_3 + d_6 + d_2 + 2d_4$ est pair donc $\boxed{x_8 = 0}$;

— d'après (L_7), $-x_7 = d_6 - 3d_3 + d_2 + d_1 + d_8 - 2d_5 + 2d_4 - 3x_8$ est impair donc $\boxed{x_7 = 1}$;

— d'après (L_6), $x_6 = d_5 - d_1 + d_3 - d_4 - x_7 + x_8$ est pair donc $\boxed{x_6 = 0}$;

— d'après (L_5), $-x_5 = d_2 - d_1 - d_4 + d_8 - x_6 - x_7$ est pair donc $\boxed{x_5 = 0}$;

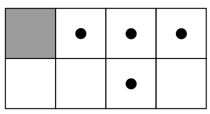
— d'après (L_4), $x_4 = d_8 - x_7 - x_8$ est impair donc $\boxed{x_4 = 1}$;

— d'après (L_3), $x_3 = d_4 - x_4 - x_8$ est impair donc $\boxed{x_3 = 1}$;

— d'après (L_2), $x_2 = d_3 - x_3 - x_4 - x_7$ est impair donc $\boxed{x_2 = 1}$;

— d'après (L_1), $x_1 = d_1 - x_2 - x_5$ est pair donc $\boxed{x_1 = 0}$.

On en déduit qu'il existe une unique combinaison de touches permettant d'éclairer seulement la première case de la grille, qui est :



7. *Étudier de manière similaire le cas $(n, p) = (3, 3)$ (sans oublier de préciser le rang).*

▶ En numérotant les cases de la grille comme indiqué dans l'énoncé, on obtient :

1	2	3
4	5	6
7	8	9

et donc :

$$
(S_{3,3}) \iff \begin{cases}
d_1 = x_1 + x_2 + x_4 \\
d_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_5 \\
d_3 = x_2 + x_3 + x_6 \\
d_4 = x_1 + x_4 + x_5 + x_7 \\
d_5 = x_2 + x_4 + x_5 + x_6 + x_8 \\
d_6 = x_3 + x_5 + x_6 + x_9 \\
d_7 = x_4 + x_7 + x_8 \\
d_8 = x_5 + x_7 + x_8 + x_9 \\
d_9 = x_6 + x_8 + x_9
\end{cases}
$$

$$
\iff \left\{\begin{array}{llllllllll}
\boxed{1}x_1 + x_2 + x_4 & = d_1 & \\
\boxed{1}x_2 + x_3 + x_6 & = d_3 & \\
\boxed{1}x_3 + x_5 + x_6 + x_9 & = d_6 & \\
\boxed{1}x_4 + x_7 + x_8 & = d_7 & \\
\boxed{1}x_5 + x_7 + x_8 + x_9 & = d_8 & \\
\boxed{1}x_6 + x_8 + x_9 & = d_9 & \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_5 & = d_2 & (L_7 \leftarrow L_7 - L_1) \\
x_1 + x_4 + x_5 + x_7 & = d_4 & (L_8 \leftarrow L_8 - L_1) \\
x_2 + x_4 + x_5 + x_6 + x_8 & = d_5 & (L_9 \leftarrow L_9 - L_2)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \left\{\begin{array}{lll}
\dots & & \\
x_3 - x_4 + x_5 & = d_2 - d_1 & (L_7 \leftarrow L_7 - L_3) \\
-x_2 + x_5 + x_7 & = d_4 - d_1 & (L_8 \leftarrow L_8 + L_2) \\
- x_3 + x_4 + x_5 + x_8 & = d_5 - d_3 & (L_9 \leftarrow L_9 + L_3)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \left\{\begin{array}{lll}
\dots & & \\
- x_4 - x_6 - x_9 & = d_2 - d_1 - d_6 & (L_7 \leftarrow L_7 + L_4) \\
x_3 + x_5 + x_6 + x_7 & = d_4 - d_1 + d_3 & (L_8 \leftarrow L_8 - L_3) \\
x_4 + 2x_5 + x_6 + x_8 + x_9 & = d_5 - d_3 + d_6 & (L_9 \leftarrow L_9 - L_4)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \left\{\begin{array}{lll}
\dots & & \\
- x_6 + x_7 + x_8 - x_9 & = d_2 - d_1 - d_6 + d_7 & (L_7 \leftarrow L_7 + L_6) \\
x_7 - x_9 & = d_4 - d_1 + d_3 - d_6 & \\
2x_5 + x_6 - x_7 + x_9 & = d_5 - d_3 + d_6 - d_7 & (L_9 \leftarrow L_9 - 2L_5)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \left\{\begin{array}{lll}
\dots & & \\
\boxed{1}x_7 + 2x_8 & = d_2 - d_1 - d_6 + d_7 + d_9 & \\
x_7 - x_9 & = d_4 - d_1 + d_3 - d_6 & (L_8 \leftarrow L_8 - L_7) \\
x_6 - 3x_7 - 2x_8 - x_9 & = d_5 - d_3 + d_6 - d_7 - 2d_8 & (L_9 \leftarrow L_9 - L_6)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \left\{\begin{array}{lll}
\dots & & \\
- 2x_8 - x_9 & = d_4 - d_1 + d_3 - d_6 - d_2 + d_1 + d_6 - d_7 - d_9 & \\
-3x_7 - 3x_8 - 2x_9 & = d_5 - d_3 + d_6 - d_7 - 2d_8 - d_9 & (L_9 \leftarrow L_9 + 3L_7)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \left\{\begin{array}{lll}
\dots & & \\
-2x_8 - x_9 & = d_4 + d_3 - d_2 - d_7 - d_9 & (L_8 \leftarrow L_8 + L_9) \\
3x_8 - 2x_9 & = d_5 - d_3 + d_6 - d_7 - 2d_8 - d_9 + 3d_2 - 3d_1 - 3d_6 + 3d_7 + 3d_9 &
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \left\{\begin{array}{lll}
\dots & & \\
\boxed{1}x_8 - 3x_9 & = d_4 + d_3 - d_2 - d_7 - d_9 + d_5 - d_3 - 2d_6 + 2d_7 - 2d_8 + 2d_9 + 3d_2 - 3d_1 & \\
3x_8 - 2x_9 & = d_5 - d_3 - 2d_6 + 2d_7 - 2d_8 + 2d_9 + 3d_2 - 3d_1 & (L_9 \leftarrow L_9 - 3L_8)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \left\{\begin{array}{ll}
\dots & \\
\boxed{1}x_8 - 3x_9 & = d_4 + 2d_2 + d_7 + d_9 + d_5 - 2d_6 - 2d_8 - 3d_1 \\
7x_9 & = \begin{pmatrix} d_5 - d_3 - 2d_6 + 2d_7 - 2d_8 + 2d_9 + 3d_2 - 3d_1 \\ -3d_4 - 6d_2 - 3d_7 - 3d_9 - 3d_5 + 6d_6 + 6d_8 + 9d_1 \end{pmatrix}
\end{array}\right.
$$

$$(S_{3,3}) \iff \left\{\begin{array}{rl}
\boxed{1}x_1 + x_2 + x_4 &= d_1 \\
\boxed{1}x_2 + x_3 + x_6 &= d_3 \\
\boxed{1}x_3 + x_5 + x_6 + x_9 &= d_6 \\
\boxed{1}x_4 + x_7 + x_8 &= d_7 \\
\boxed{1}x_5 + x_7 + x_8 + x_9 &= d_8 \\
\boxed{1}x_6 + x_8 + x_9 &= d_9 \\
\boxed{1}x_7 + 2x_8 &= d_2 - d_1 - d_6 + d_7 + d_9 \\
\boxed{1}x_8 - 3x_9 &= \begin{pmatrix} d_4 + 2d_2 + d_7 + d_9 \\ +d_5 - 2d_6 - 2d_8 - 3d_1 \end{pmatrix} \\
\boxed{7}x_9 &= \begin{pmatrix} -2d_5 - d_3 + 4d_6 - d_7 + 4d_8 \\ -d_9 - 3d_2 + 6d_1 - 3d_4 \end{pmatrix}
\end{array}\right.$$

On a donc un système linéaire de $\boxed{\text{rang } 9}$.

Si on suppose que d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8 et d_9 sont tous impairs alors :

— d'après (L_9), $7x_9 = -2d_5 - d_3 + 4d_6 - d_7 + 4d_8 - d_9 - 3d_2 + 6d_1 - 3d_4$ est impair donc $\boxed{x_9 = 1}$;

— d'après (L_8), $x_8 = d_4 + 2d_2 + d_7 + d_9 + d_5 - 2d_6 - 2d_8 - 3d_1 + 3x_9$ est pair donc $\boxed{x_8 = 0}$;

— d'après (L_7), $x_7 = d_2 - d_1 - d_6 + d_7 + d_9 - 2x_8$ est impair donc $\boxed{x_7 = 1}$;

— d'après (L_6), $x_6 = d_9 - x_8 - x_9$ est pair donc $\boxed{x_6 = 0}$;

— d'après (L_5), $x_5 = d_8 - x_7 - x_8 - x_9$ est impair donc $\boxed{x_5 = 1}$;

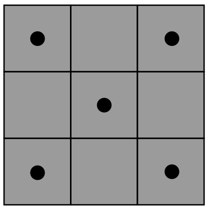
— d'après (L_4), $x_4 = d_7 - x_7 - x_8$ est pair donc $\boxed{x_4 = 0}$;

— d'après (L_3), $x_3 = d_6 - x_5 - x_6 - x_9$ est impair donc $\boxed{x_3 = 1}$;

— d'après (L_2), $x_2 = d_3 - x_3 - x_6$ est pair donc $\boxed{x_2 = 0}$.

— d'après (L_1), $x_1 = d_1 - x_2 - x_4$ est impair donc $\boxed{x_1 = 1}$.

On en déduit qu'il existe une unique combinaison de touches permettant d'éclairer toutes les cases de la grille, qui est :



Si on suppose que d_1 est impair et d_2, d_3, d_4, d_5, d_6 , d_7, d_8 et d_9 sont pairs alors :

— d'après (L_9), $7x_9 = -2d_5 - d_3 + 4d_6 - d_7 + 4d_8 - d_9 - 3d_2 + 6d_1 - 3d_4$ est pair donc $\boxed{x_9 = 0}$;

— d'après (L_8), $x_8 = d_4 + 2d_2 + d_7 + d_9 + d_5 - 2d_6 - 2d_8 - 3d_1 + 3x_9$ est impair donc $\boxed{x_8 = 1}$;

— d'après (L_7), $x_7 = d_2 - d_1 - d_6 + d_7 + d_9 - 2x_8$ est impair donc $\boxed{x_7 = 1}$;

— d'après (L_6), $x_6 = d_9 - x_8 - x_9$ est impair donc $\boxed{x_6 = 1}$;

— d'après (L_5), $x_5 = d_8 - x_7 - x_8 - x_9$ est pair donc $\boxed{x_5 = 0}$;

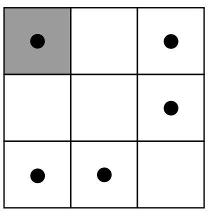
— d'après (L_4), $x_4 = d_7 - x_7 - x_8$ est pair donc $\boxed{x_4 = 0}$;

— d'après (L_3), $x_3 = d_6 - x_5 - x_6 - x_9$ est impair donc $\boxed{x_3 = 1}$;

— d'après (L_2), $x_2 = d_3 - x_3 - x_6$ est pair donc $\boxed{x_2 = 0}$.

— d'après (L_1), $x_1 = d_1 - x_2 - x_4$ est impair donc $\boxed{x_1 = 1}$.

On en déduit qu'il existe une unique combinaison de touches permettant d'éclairer seulement la première case de la grille, qui est :



D) Quelques exemples de rang non maximal

8. Dans cette question, on étudie le cas $(n,p)=(2,3)$.

(a) Échelonner le système $(S_{2,3})$ exprimant les d_k en fonction des x_k et déterminer son rang.

▶ En numérotant les cases de la grille comme indiqué dans l'énoncé, on obtient :

1	2	3
4	5	6

et donc :

$$(S_{2,3}) \iff \left\{\begin{array}{l} d_1 = x_1+x_2+x_4 \\ d_2 = x_1+x_2+x_3+x_5 \\ d_3 = x_2+x_3+x_6 \\ d_4 = x_1+x_4+x_5 \\ d_5 = x_2+x_4+x_5+x_6 \\ d_6 = x_3+x_5+x_6 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} \boxed{1}x_1 + x_2 + x_4 = d_1 & \\ \boxed{1}x_2 + x_3 + x_6 = d_3 & \\ \boxed{1}x_3 + x_5 + x_6 = d_6 & \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = d_2 & (L_4 \leftarrow L_4 - L_1) \\ x_1 + x_4 + x_5 = d_4 & (L_5 \leftarrow L_5 - L_1) \\ x_2 + x_4 + x_5 + x_6 = d_5 & (L_6 \leftarrow L_6 - L_2) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} \dots & \\ x_3 - x_4 + x_5 = d_2 - d_1 & (L_4 \leftarrow L_4 - L_3) \\ -x_2 + x_5 = d_4 - d_1 & (L_5 \leftarrow L_5 + L_2) \\ -x_3 + x_4 + x_5 = d_5 - d_3 & (L_6 \leftarrow L_6 + L_3) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} \dots & \\ \boxed{-1}x_4 - x_6 = d_2 - d_1 - d_6 & \\ x_3 + x_5 + x_6 = d_4 - d_1 + d_3 & (L_5 \leftarrow L_5 - L_3) \\ x_4 + 2x_5 + x_6 = d_5 - d_3 + d_6 & (L_6 \leftarrow L_6 + L_4) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{ll} \dots & \\ 0 = d_4 - d_1 + d_3 - d_6 & (L_5 \leftrightarrow L_6) \\ 2x_5 = d_5 - d_3 + d_6 + d_2 - d_1 - d_6 & (L_6 \leftrightarrow L_5) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} \boxed{1}x_1 + x_2 + x_4 = d_1 \\ \boxed{1}x_2 + x_3 + x_6 = d_3 \\ \boxed{1}x_3 + x_5 + x_6 = d_6 \\ \boxed{-1}x_4 - x_6 = d_2 - d_1 - d_6 \\ \boxed{2}x_5 = d_5 - d_3 + d_2 - d_1 \\ 0 = d_4 - d_1 + d_3 - d_6 \end{array}\right.$$

On a donc un système linéaire de $\boxed{\text{rang } 5}$.

(b) Montrer qu'il n'existe aucune liste $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) \in \{0,1\}^6$ telle que d_1 est impair et d_2, d_3, d_4, d_5 et d_6 sont pairs. Que peut-on en déduire ?

▶ Par l'absurde, on suppose qu'il existe liste $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) \in \{0,1\}^6$ telle que d_1 soit impair et d_2, d_3, d_4, d_5 et d_6 soient pairs alors $d_4-d_1+d_3-d_6$ est impair. Or, d'après la ligne (L_6) du système échelonné de la question précédente, $d_4-d_1+d_3-d_6=0$ est pair. Ceci est absurde. Par conséquent, on a bien montré qu' $\boxed{\text{il n'existe aucune liste } (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) \in \{0,1\}^6 \text{ telle que } d_1 \text{ soit impair et } d_2, d_3, d_4, d_5 \text{ et } d_6 \text{ soient pairs}}$. On en déduit qu' $\boxed{\text{il n'existe aucune combinaison de touches permettant d'éclairer seulement la première case de la grille}}$.

(c) Dans cette question, on fixe une liste $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) \in \{0,1\}^6$ et on suppose que d_1, d_2, d_3, d_4, d_5 et d_6 sont tous impairs.

i. Montrer que $x_1 \neq x_3$, $x_2 = x_5$ et $x_4 \neq x_6$.

▶ On reprend le système échelonné de la question 8(a).

— D'après la ligne (L_4), on en déduit que $x_4 + x_6 = d_5 - d_3 + d_6 - 2x_5$ est impair donc que $\boxed{x_4 \neq x_6}$ puisque $(x_4, x_6) \in \{0,1\}^2$.

— De même, d'après $(L_2 - L_3)$, on obtient que $x_2 - x_5 = d_3 - d_6$ est pair donc que $\boxed{x_2 = x_5}$.

— Enfin, d'après $(L_1 - L_2)$, on obtient que $x_1 - x_3 = d_1 - d_3 + x_6 - x_4$ est impair (car $x_4 \neq x_6$ et $(x_4, x_6) \in \{0,1\}^2$) donc que $\boxed{x_1 \neq x_3}$.

ii. Montrer que (x_3, x_4, x_5) est égal à $(0,0,0)$, $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ ou bien $(1,1,0)$.

▶ On reprend le système échelonné de la question 8(a). On a d'après $(L_3 - L_4)$:

$$x_3 - x_4 + x_5 = d_2 - d_1.$$

Donc $x_3 - x_4 + x_5$ est pair. Or, puisque $(x_3, x_4, x_5) \in \{0,1\}^3$, on a le tableau des valeurs suivant :

x_3	0				1			
x_4	0		1		0		1	
x_5	0	1	0	1	0	1	0	1
$x_3 - x_4 + x_5$	0	1	-1	0	1	2	0	1

Par conséquent, on obtient que quatre triplets possibles pour (x_3, x_4, x_5) qui sont : $\boxed{(0,0,0),}$ $\boxed{(0,1,1),\ (1,0,1) \text{ et } (1,1,0)}$.

iii. Déduire des résultats précédents toutes les combinaisons de touches permettant d'éclairer toutes les cases de la grille.

▶ D'après les résultats des questions précédentes, on a :

— si $(x_3, x_4, x_5) = (0,0,0)$ alors $0 = x_3 \neq x_1 = 1$, $0 = x_5 = x_2 = 0$ et $0 = x_4 \neq x_6 = 1$ donc

$$\boxed{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1,0,0,0,0,1)},$$

— si $(x_3, x_4, x_5) = (0,1,1)$ alors $0 = x_3 \neq x_1 = 1$, $1 = x_5 = x_2 = 1$ et $1 = x_4 \neq x_6 = 0$ donc

$$\boxed{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (1,1,0,1,1,0)},$$

— si $(x_3, x_4, x_5) = (1,0,1)$ alors $1 = x_3 \neq x_1 = 0$, $1 = x_5 = x_2 = 1$ et $0 = x_4 \neq x_6 = 1$ donc

$$\boxed{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0,1,1,0,1,1)},$$

— si $(x_3, x_4, x_5) = (1,1,0)$ alors $1 = x_3 \neq x_1 = 0$, $0 = x_5 = x_2 = 0$ et $1 = x_4 \neq x_6 = 0$ donc

$$\boxed{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (0,0,1,1,0,0)}.$$

On en déduit qu'il existe quatre combinaisons de touches permettant d'éclairer toutes les cases de la grille, qui sont :

•		
		•

•	•	
•	•	

	•	•
	•	•

		•
•		

9. *Étudier de manière similaire le cas $(n, p) = (1, 8)$ (sans oublier de préciser le rang).*

▶ En numérotant les cases de la grille comme indiqué dans l'énoncé, on obtient :

1	2	3	4	5	6	7	8

et donc :

$$(S_{1,8}) \iff \begin{cases} d_1 = x_1 + x_2 \\ d_2 = x_1 + x_2 + x_3 \\ d_3 = x_2 + x_3 + x_4 \\ d_4 = x_3 + x_4 + x_5 \\ d_5 = x_4 + x_5 + x_6 \\ d_6 = x_5 + x_6 + x_7 \\ d_7 = x_6 + x_7 + x_8 \\ d_8 = x_7 + x_8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{1}x_1 + x_2 = d_1 \\ \boxed{1}x_2 + x_3 + x_4 = d_3 \\ \boxed{1}x_3 + x_4 + x_5 = d_4 \\ \boxed{1}x_4 + x_5 + x_6 = d_5 \\ \boxed{1}x_5 + x_6 + x_7 = d_6 \\ \boxed{1}x_6 + x_7 + x_8 = d_7 \\ \boxed{1}x_7 + x_8 = d_8 \\ x_1 + x_2 + x_3 = d_2 \quad (L_8 \leftarrow L_8 - L_1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dots \\ x_3 = d_2 - d_1 \quad (L_8 \leftarrow L_8 - L_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dots \\ -x_4 - x_5 = d_2 - d_1 - d_4 \quad (L_8 \leftarrow L_8 + L_4) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dots \\ x_6 = d_2 - d_1 - d_4 + d_5 \quad (L_8 \leftarrow L_8 - L_6) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dots \\ -x_7 - x_8 = d_2 - d_1 - d_4 + d_5 - d_7 \quad (L_8 \leftarrow L_8 + L_7) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dots \\ 0 = d_2 - d_1 - d_4 + d_5 - d_7 + d_8 \quad (L_8) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{1}x_1 + x_2 = d_1 \\ \boxed{1}x_2 + x_3 + x_4 = d_3 \\ \boxed{1}x_3 + x_4 + x_5 = d_4 \\ \boxed{1}x_4 + x_5 + x_6 = d_5 \\ \boxed{1}x_5 + x_6 + x_7 = d_6 \\ \boxed{1}x_6 + x_7 + x_8 = d_7 \\ \boxed{1}x_7 + x_8 = d_8 \\ 0 = d_2 - d_1 - d_4 + d_5 - d_7 + d_8 \end{cases}$$

On a donc un système linéaire de $\boxed{\text{rang } 7}$.

On remarque, d'après la ligne (L_8), que $d_2 - d_1 - d_4 + d_5 - d_7 + d_8 = 0$ est pair. Par l'absurde, on en déduit qu'il n'existe aucune liste $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \in \{0,1\}^8$ telle que d_1 soit impair et d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7 et d_8 soient pairs. Par conséquent, $\boxed{\text{il n'existe aucune combinaison de touches permettant d'éclairer seulement la première case de la grille}}$.

Si on suppose que d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7 et d_8 sont tous impairs alors :

— d'après (L_7), $x_7 + x_8 = d_8$ est impair donc $\boxed{x_7 \neq x_8}$;

— d'après (L_6), $x_6 = d_7 - x_7 - x_8$ est pair donc $\boxed{x_6 = 0}$;

— d'après (L_5), $x_5 + x_7 = d_6 - x_6$ est impair donc $\boxed{x_5 \neq x_7}$;

— d'après (L_4), $x_4 + x_5 = d_5 - x_6$ est impair donc $\boxed{x_4 \neq x_5}$;

— d'après (L_3), $x_3 = d_4 - x_4 - x_5$ est pair donc $\boxed{x_3 = 0}$;

— d'après (L_2), $x_2 + x_4 = d_3 - x_3$ est impair donc $\boxed{x_2 \neq x_4}$;

— d'après (L_1), $x_1 + x_2 = d_1$ est impair donc $\boxed{x_1 \neq x_2}$.
Par conséquent :

— si $x_8 = 0$ alors $0 = x_8 \neq x_7 = 1$, $1 = x_7 \neq x_5 = 0$, $0 = x_5 \neq x_4 = 1$, $1 = x_4 \neq x_2 = 0$ et $0 = x_2 \neq x_1 = 1$ donc

$$\boxed{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (1,0,0,1,0,0,1,0)},$$

— si $x_8 = 1$ alors $1 = x_8 \neq x_7 = 0$, $0 = x_7 \neq x_5 = 1$, $1 = x_5 \neq x_4 = 0$, $0 = x_4 \neq x_2 = 1$ et $1 = x_2 \neq x_1 = 0$ donc

$$\boxed{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = (0,1,0,0,1,0,0,1)}.$$

On en déduit qu'il existe deux combinaisons de touches permettant d'éclairer toutes les cases de la grille, qui sont :

•			•			•	

	•			•			•

10. Étudier de manière similaire le cas $(n,p) = (2,5)$ (sans oublier de préciser le rang).

▶ En numérotant les cases de la grille comme indiqué dans l'énoncé, on obtient :

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10

et donc :

$$(S_{2,5}) \iff \left\{\begin{array}{rl}
d_1 &= x_1 + x_2 + x_6 \\
d_2 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_7 \\
d_3 &= x_2 + x_3 + x_4 + x_8 \\
d_4 &= x_3 + x_4 + x_5 + x_9 \\
d_5 &= x_4 + x_5 + x_{10} \\
d_6 &= x_1 + x_6 + x_7 \\
d_7 &= x_2 + x_6 + x_7 + x_8 \\
d_8 &= x_3 + x_7 + x_8 + x_9 \\
d_9 &= x_4 + x_8 + x_9 + x_{10} \\
d_{10} &= x_5 + x_9 + x_{10}
\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l}
\boxed{1}x_1 + x_2 + x_6 = d_1 \\
\boxed{1}x_2 + x_3 + x_4 + x_8 = d_3 \\
\boxed{1}x_3 + x_4 + x_5 + x_9 = d_4 \\
\boxed{1}x_4 + x_5 + x_{10} = d_5 \\
\boxed{1}x_5 + x_9 + x_{10} = d_{10} \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_7 = d_2 \quad (L_6 \leftarrow L_6 - L_1) \\
x_1 + x_6 + x_7 = d_6 \quad (L_7 \leftarrow L_7 - L_1) \\
x_2 + x_6 + x_7 + x_8 = d_7 \quad (L_8 \leftarrow L_8 - L_2) \\
x_3 + x_7 + x_8 + x_9 = d_8 \quad (L_9 \leftarrow L_9 - L_3) \\
x_4 + x_8 + x_9 + x_{10} = d_9 \quad (L_{10} \leftarrow L_{10} - L_4)
\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l}
\dots \\
x_3 - x_6 + x_7 = d_2 - d_1 \quad (L_6 \leftarrow L_6 - L_3) \\
-x_2 + x_7 = d_6 - d_1 \quad (L_7 \leftarrow L_7 + L_2) \\
- x_3 - x_4 + x_6 + x_7 = d_7 - d_3 \quad (L_8 \leftarrow L_8 + L_3) \\
- x_4 - x_5 + x_7 + x_8 = d_8 - d_4 \quad (L_9 \leftarrow L_9 + L_4) \\
- x_5 + x_8 + x_9 = d_9 - d_5 \quad (L_{10} \leftarrow L_{10} + L_5)
\end{array}\right.$$

$$
(S_{2,5}) \iff \left\{\begin{array}{l}
\cdots \\
\quad - x_4 - x_5 - x_6 + x_7 - x_9 = d_2 - d_1 - d_4 \quad (L_6 \leftarrow L_6 + L_4) \\
x_3 + x_4 + x_7 + x_8 = d_6 - d_1 + d_3 \quad (L_7 \leftarrow L_7 - L_3) \\
\quad x_5 + x_6 + x_7 + x_9 = d_7 - d_3 + d_4 \quad (L_8 \leftarrow L_8 - L_5) \\
\quad x_7 + x_8 + x_{10} = d_8 - d_4 + d_5 \\
\quad x_8 + 2x_9 + x_{10} = d_9 - d_5 + d_{10}
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \left\{\begin{array}{l}
\cdots \\
\quad \boxed{-1} x_6 + x_7 - x_9 + x_{10} = d_2 - d_1 - d_4 + d_5 \\
-x_5 + x_7 + x_8 - x_9 = d_6 - d_1 + d_3 - d_4 \quad (L_7 \leftarrow L_7 + L_5) \\
\quad x_6 + x_7 - x_{10} = d_7 - d_3 + d_4 - d_{10} \quad (L_8 \leftarrow L_8 + L_6) \\
\quad x_7 + x_8 + x_{10} = d_8 - d_4 + d_5 \\
\quad x_8 + 2x_9 + x_{10} = d_9 - d_5 + d_{10}
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \left\{\begin{array}{l}
\cdots \\
\boxed{1} x_7 + x_8 + x_{10} = d_6 - d_1 + d_3 - d_4 + d_{10} \\
2x_7 - x_9 = d_7 - d_3 + d_4 - d_{10} + d_2 - d_1 - d_4 + d_5 \quad (L_8 \leftarrow L_8 - 2L_7) \\
x_7 + x_8 + x_{10} = d_8 - d_4 + d_5 \quad (L_9 \leftarrow L_9 - L_7) \\
\quad x_8 + 2x_9 + x_{10} = d_9 - d_5 + d_{10}
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \left\{\begin{array}{l}
\cdots \\
-2x_8 - x_9 - 2x_{10} = \begin{pmatrix} d_7 - d_3 - d_{10} + d_2 - d_1 + d_5 \\ -2d_6 + 2d_1 - 2d_3 + 2d_4 - 2d_{10} \end{pmatrix} \quad (L_8 \leftrightarrow L_{10}) \\
\quad 0 = d_8 - d_4 + d_5 - d_6 + d_1 - d_3 + d_4 - d_{10} \\
x_8 + 2x_9 + x_{10} = d_9 - d_5 + d_{10} \quad (L_{10} \leftrightarrow L_8)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \left\{\begin{array}{l}
\cdots \\
\boxed{1} x_8 + 2x_9 + x_{10} = d_9 - d_5 + d_{10} \\
\quad 0 = d_8 + d_5 - d_6 + d_1 - d_3 - d_{10} \\
-2x_8 - x_9 - 2x_{10} = d_7 - 3d_3 - 3d_{10} + d_2 + d_1 + d_5 - 2d_6 + 2d_4 \quad (L_{10} \leftarrow L_{10} + 2L_8)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \left\{\begin{array}{l}
\cdots \\
\quad 0 = d_8 + d_5 - d_6 + d_1 - d_3 - d_{10} \quad (L_9 \leftrightarrow L_{10}) \\
3x_9 = d_7 - 3d_3 - 3d_{10} + d_2 + d_1 + d_5 - 2d_6 + 2d_4 + 2d_9 - 2d_5 + 2d_{10} \quad (L_{10} \leftrightarrow L_9)
\end{array}\right.
$$

$$
\iff \left\{\begin{array}{cccccccccccl}
\boxed{1}x_1 & +x_2 & & & & +x_6 & & & & & = & d_1 \\
 & \boxed{1}x_2 & +x_3 & +x_4 & & & & +x_8 & & & = & d_3 \\
 & & \boxed{1}x_3 & +x_4 & +x_5 & & & & +x_9 & & = & d_4 \\
 & & & \boxed{1}x_4 & +x_5 & & & & & +x_{10} & = & d_5 \\
 & & & & \boxed{1}x_5 & & & & +x_9 & +x_{10} & = & d_{10} \\
 & & & & & \boxed{-1}x_6 & +x_7 & & -x_9 & +x_{10} & = & d_2 - d_1 - d_4 + d_5 \\
 & & & & & & \boxed{1}x_7 & +x_8 & & +x_{10} & = & d_6 - d_1 + d_3 - d_4 + d_{10} \\
 & & & & & & & \boxed{1}x_8 & +2x_9 & +x_{10} & = & d_9 - d_5 + d_{10} \\
 & & & & & & & & \boxed{3}x_9 & & = & \begin{pmatrix} d_7 - 3d_3 - d_{10} + d_2 + d_1 \\ -d_5 - 2d_6 + 2d_4 + 2d_9 \end{pmatrix} \\
 & & & & & & & & & & 0 = & d_8 + d_5 - d_6 + d_1 - d_3 - d_{10}
\end{array}\right.
$$

On a donc un système linéaire de $\boxed{\text{rang } 9}$.

On remarque, d'après la ligne (L_{10}), que $d_8+d_5-d_6+d_1-d_3-d_{10} = 0$ est pair. Par l'absurde, on en déduit qu'il n'existe aucune liste $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}) \in \{0, 1\}^{10}$ telle que d_1 soit impair et d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9 et d_{10} soient pairs. Par conséquent, $\boxed{\text{il n'existe aucune combinaison de touches permettant d'éclairer seulement la première case de la grille}}$.

Si on suppose que d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9 et d_{10} sont tous impairs alors :

— d'après (L_9), $3x_9 = d_7 - 3d_3 - d_{10} + d_2 + d_1 - d_5 - 2d_6 + 2d_4 + 2d_9$ est pair donc $\boxed{x_9 = 0}$;

— d'après (L_8), $x_8 + x_{10} = d_9 - d_5 + d_{10} - 2x_9$ est impair donc $\boxed{x_8 \neq x_{10}}$;

— d'après (L_7), $x_7 = d_6 - d_1 + d_3 - d_4 + d_{10} - x_8 - x_{10}$ est pair car $x_8 \neq x_{10}$ donc $\boxed{x_7 = 0}$;
— d'après (L_6), $-x_6 + x_{10} = d_2 - d_1 - d_4 + d_5 - x_7 + x_9$ est pair donc $\boxed{x_6 = x_{10}}$;
— d'après (L_5), $x_5 + x_{10} = d_{10} - x_9$ est impair donc $\boxed{x_5 \neq x_{10}}$;
— d'après (L_4), $x_4 = d_5 - x_5 - x_{10}$ est pair donc $\boxed{x_4 = 0}$;
— d'après (L_3), $x_3 + x_5 = d_4 - x_4 - x_9$ est impair donc $\boxed{x_3 \neq x_5}$;
— d'après (L_2), $x_2 = d_3 - x_3 - x_4 - x_8$ est pair car $x_3 \neq x_8$ (puisque $x_3 \neq x_5 \neq x_{10} \neq x_8$) donc $\boxed{x_2 = 0}$;
— d'après (L_1), $x_1 + x_6 = d_1 - x_2$ est impair donc $\boxed{x_1 \neq x_6}$.

Par conséquent :

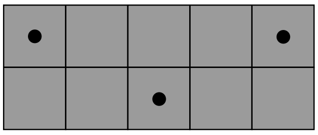
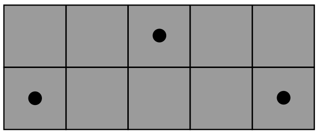
— si $x_{10} = 0$ alors $0 = x_{10} \neq x_8 = 1$, $0 = x_{10} = x_6 = 0$, $0 = x_{10} \neq x_5 = 1$, $1 = x_5 \neq x_3 = 0$ et $0 = x_6 \neq x_1 = 1$ donc

$$\boxed{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}) = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0)},$$

— si $x_{10} = 1$ alors $1 = x_{10} \neq x_8 = 0$, $1 = x_{10} = x_6 = 1$, $1 = x_{10} \neq x_5 = 0$, $0 = x_5 \neq x_3 = 1$ et $1 = x_6 \neq x_1 = 0$ donc

$$\boxed{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}) = (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1)}.$$

On en déduit qu'il existe deux combinaisons de touches permettant d'éclairer toutes les cases de la grille, qui sont :

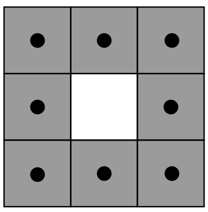
E) Questions diverses et conjectures

11. En reprenant les résultats de la question 7, trouver une combinaison de touches permettant d'éclairer toutes les cases de la grille sauf la case centrale dans le cas $(n, p) = (3, 3)$.

► Trouver les combinaisons de touches permettant d'éclairer toutes les cases de la grille sauf la case centrale revient à chercher les listes $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9) \in \{0, 1\}^9$ telles que d_5 soit pair et d_1, d_2, d_3, d_4, d_6, d_7, d_8 et d_9 soient impairs (mais pas nécessairement égaux). En reprenant le système échelonné de la question 7, on a :

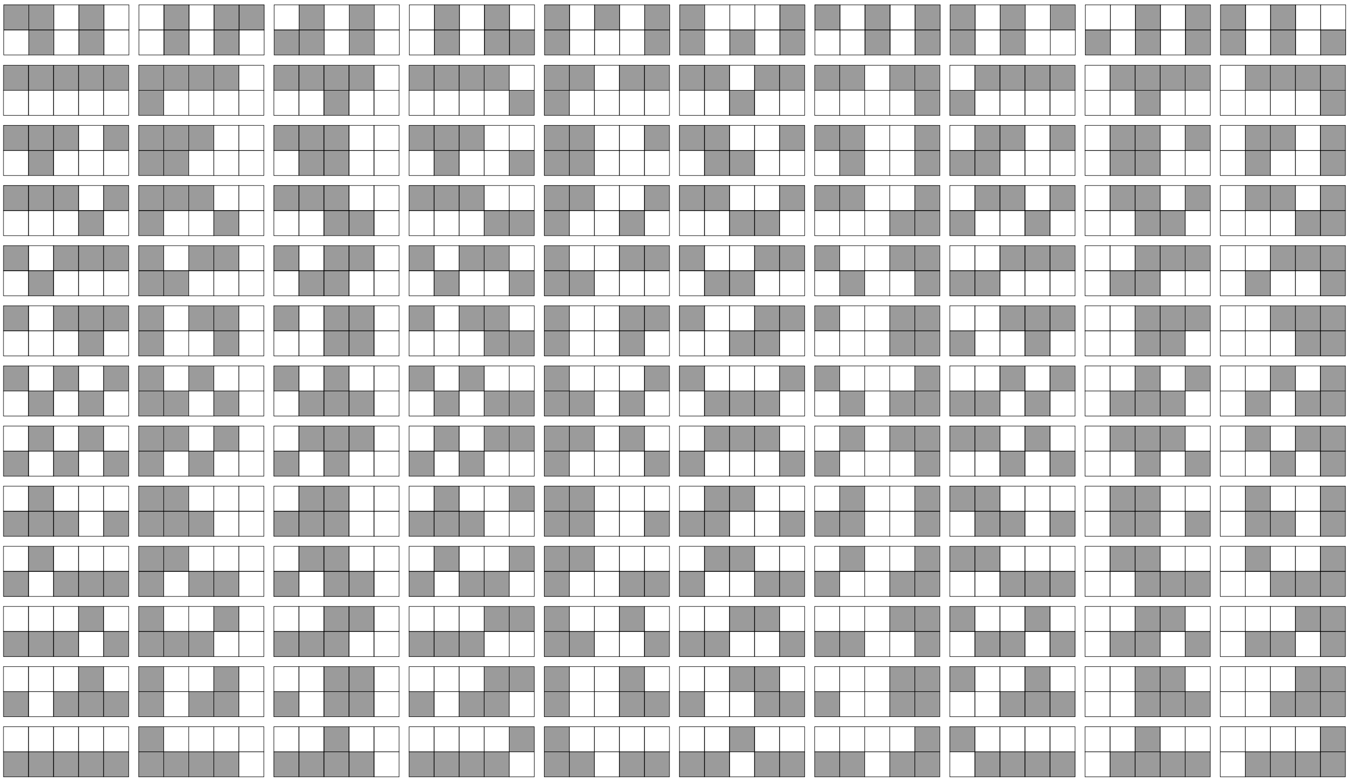
— d'après (L_9), $7x_9 = -2d_5 - d_3 + 4d_6 - d_7 + 4d_8 - d_9 - 3d_2 + 6d_1 - 3d_4$ est impair donc $\boxed{x_9 = 1}$;
— d'après (L_8), $x_8 = d_4 + 2d_2 + d_7 + d_9 + d_5 - 2d_6 - 2d_8 - 3d_1 + 3x_9$ est impair donc $\boxed{x_8 = 1}$;
— d'après (L_7), $x_7 = d_2 - d_1 - d_6 + d_7 + d_9 - 2x_8$ est impair donc $\boxed{x_7 = 1}$;
— d'après (L_6), $x_6 = d_9 - x_8 - x_9$ est impair donc $\boxed{x_6 = 1}$;
— d'après (L_5), $x_5 = d_8 - x_7 - x_8 - x_9$ est pair donc $\boxed{x_5 = 0}$;
— d'après (L_4), $x_4 = d_7 - x_7 - x_8$ est impair donc $\boxed{x_4 = 1}$;
— d'après (L_3), $x_3 = d_6 - x_5 - x_6 - x_9$ est impair donc $\boxed{x_3 = 1}$;
— d'après (L_2), $x_2 = d_3 - x_3 - x_6$ est impair donc $\boxed{x_2 = 1}$.
— d'après (L_1), $x_1 = d_1 - x_2 - x_4$ est impair donc $\boxed{x_1 = 1}$.

On en déduit qu'il existe une unique combinaison de touches permettant d'éclairer toutes les cases de la grille sauf la case centrale, qui est :



12. En reprenant les résultats de la question 10, trouver un modèle ayant exactement cinq cases éclairées mais impossible à reproduire avec une combinaison de touches pour le cas $(n, p) = (2, 5)$.

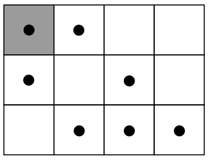
▶ En reprenant le système échelonné de la question 10, il suffit de trouver des entiers d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9 et d_{10} tels qu'exactement cinq d'entre eux soient impairs (mais pas nécessairement égaux) et que $d_8 + d_5 - d_6 + d_1 - d_3 - d_{10}$ soit impair (alors la ligne (L_{10}) donnera une absurdité). On obtient alors 130 modèles ayant exactement cinq cases éclairées mais impossibles à reproduire avec une combinaison de touches :



Bien sûr, il suffit de trouver l'un de ces 130 modèles pour répondre à la question.

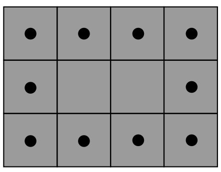
13. *À l'aide de la fonction* `puzzle` *et en procédant par tâtonnements, trouver une combinaison de touches permettant d'éclairer seulement la première case de la grille dans le cas $(n, p) = (3, 4)$. Quelles sont toutes les conjectures que l'on peut en déduire ?*

▶ On obtient la combinaison de touches suivante :



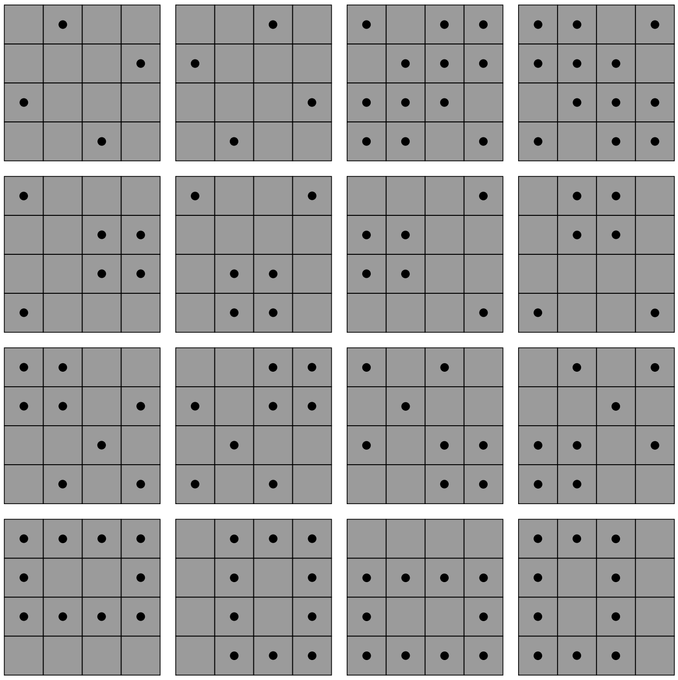
On peut conjecturer que le système $(S_{3,4})$ est de rang maximal et qu'il existe une unique combinaison de touches permettant d'éclairer toutes les cases de la grille. On peut également conjecturer que la combinaison de touches permettant d'éclairer seulement la première case de la grille est unique.

Ces conjectures sont vraies et l'unique combinaison de touches permettant d'éclairer toutes les cases de la grille est :



14. *À l'aide de la fonction* `puzzle` *et en procédant par tâtonnements, trouver au moins deux combinaisons de touches différentes permettant d'éclairer toutes les cases de la grille dans le cas $(n, p) = (4, 4)$. Quelles sont toutes les conjectures que l'on peut en déduire ?*

▶ Il existe 16 combinaisons de touches permettant d'éclairer toutes les cases de la grille, qui sont :



Bien sûr, il suffit de trouver deux de ces 16 combinaisons de touches pour répondre à la question.

On peut conjecturer que le système $(S_{4,4})$ n'est pas de rang maximal et qu'il n'existe aucune combinaison de touches permettant d'éclairer seulement la première case de la grille.

Ces conjectures sont vraies.