DM n$^{\mathrm{o}}$ 6 de mathématiques

à rendre au plus tard le mercredi 13 février

On propose d'étudier pour tout entier $n \geqslant 3$ les solutions de l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$nx = n^x \tag{E$_n$}$$

1. Dans cette question, on fixe un entier $n \geqslant 3$ et on pose la fonction $f_n : x \mapsto n^{x-1} - x$.
   (a) Étudier les variations de la fonction f_n.
   (b) On pose $a_n = 1 - \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}$. En utilisant que $e < 3$, justifier que $a_n < 1$.
   (c) Démontrer que
   $$\forall x > 0, \quad \ln(x) \leqslant x - 1 \tag{I}$$
   puis en déduire que $a_n > 0$ et $f_n(a_n) \leqslant 0$.
   (d) En reprenant la démonstration de la question précédente, justifier que $f_n(a_n) < 0$.
   (e) Dresser le tableau des variations de la fonction f_n en indiquant les limites aux bornes de l'ensemble de définition et les signes des images des valeurs particulières 0, 1 et a_n.
   (f) En déduire que l'équation (E$_n$) admet deux solutions : une solution évidente et une unique solution dans $]0, a_n[$ qu'on notera u_n.
2. (a) Calculer la limite de a_n quand n tend vers $+\infty$.
   (b) Que peut-on en déduire pour la nature de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$?
3. (a) Soit $n \geqslant 3$. En utilisant la monotonie de la fonction $x \mapsto x^{u_{n+1}-1}$, montrer que $f_n(u_{n+1}) > 0$.
   (b) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.
   (c) Que peut-on en déduire pour la nature de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$?
4. En raisonnant par l'absurde, montrer que $(u_n)_{n\geqslant 3}$ converge vers 0.
5. (a) Soit $n \geqslant 3$. À l'aide de l'inégalité (I), déterminer le signe de $f_n(\frac{1}{n})$.
   (b) En déduire que la suite $(nu_n)_{n\geqslant 3}$ est minorée par 1.
6. Dans cette question, on fixe un entier $n \geqslant 3$ et on pose la fonction $g_n : x \mapsto n^{x-1}$.
   (a) Simplifier $g_n(u_n)$ et $g_n(a_n)$ puis montrer que $u_n < \frac{1}{\ln(n)}$.
   (b) En réitérant le raisonnement de la question précédente, montrer que $u_n < \frac{1}{n} \exp\left(e^{\frac{\ln(n)}{n}}\right)$.
7. Déduire des résultats précédents un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.
8. (a) Montrer que $\ln(nu_n) \sim \frac{\ln(n)}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.
   (b) En déduire un équivalent simple de l'erreur relative $(\delta_n)_{n\geqslant 3}$ du résultat de la question 7.
   (c) Vérifier que cette erreur relative δ_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.