Corrigé du DM n° 6 de mathématiques

On propose d'étudier pour tout entier $n \geqslant 3$ les solutions de l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$nx = n^x \qquad (\mathrm{E}_n)$$

1. *Dans cette question, on fixe un entier $n \geqslant 3$ et on pose la fonction $f_n : x \mapsto n^{x-1} - x$.*

   (a) *Étudier les variations de la fonction f_n.*

   ▶ La fonction f_n est définie est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions usuelles. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = n^{x-1} - x = e^{(x-1)\ln(n)} - x \quad \text{donc} \quad f_n'(x) = \ln(n)e^{(x-1)\ln(n)} - 1 = \ln(n)n^{x-1} - 1.$$

   Par conséquent :

$$\begin{aligned}
f_n'(x) > 0 &\iff \ln(n)n^{x-1} - 1 > 0 \\
&\iff n^{x-1} > \frac{1}{\ln(n)} \quad \text{car } \ln(n) \geqslant \ln(3) > \ln(1) = 0 \quad \text{par stricte croissance de la fonction ln} \\
&\iff \exp\Big((x-1)\ln(n)\Big) > \frac{1}{\ln(n)} \\
&\iff (x-1)\ln(n) > \ln\left(\frac{1}{\ln(n)}\right) = -\ln(\ln(n)) \quad \text{par stricte croissance de la fonction ln} \\
&\iff x - 1 > \frac{-\ln(\ln(n))}{\ln(n)} \quad \text{car } \ln(n) > 0 \\
&\iff x > 1 - \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}.
\end{aligned}$$

   On en déduit que f_n est :
   - $\boxed{\text{strictement croissante sur }]1 - \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}, +\infty[}$
   - et $\boxed{\text{strictement décroissante sur }]-\infty, 1 - \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}[}$.

   (b) *On pose $a_n = 1 - \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}$. En utilisant que $e < 3$, justifier que $a_n < 1$.*

   ▶ Puisque la fonction ln est strictement croissante, on a :

$$\ln(n) \geqslant \ln(3) > \ln(e) = 1 \quad \text{donc} \quad \begin{array}{c} \ln(\ln(n)) > \ln(1) = 0 \\ \text{et} \quad \ln(n) > 0. \end{array}$$

   On en déduit que $\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} > 0$ et donc que $\boxed{a_n < 1}$.

   (c) *Démontrer que*

$$\forall x > 0, \quad \ln(x) \leqslant x - 1 \qquad (\mathrm{I})$$

   puis en déduire que $a_n > 0$ et $f_n(a_n) \leqslant 0$.

   ▶ On pose la fonction $f : x \mapsto x - 1 - \ln(x)$. La fonction f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions usuelles. On a pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = 1 - 0 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} > 0 \iff x > 1.$$

   Ainsi, f est strictement croissante sur $]1, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]0, 1[$. On en déduit que f admet un minimum en $x = 1$ qui vaut $f(1) = 0$. Par conséquent, $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x > 0$ ce qui prouve bien que :

$$\boxed{\forall x > 0, \quad \ln(x) \leqslant x - 1}.$$

En appliquant cette inégalité à $x = \ln(n) > 0$, on obtient :

$$\ln(\ln(n)) \leqslant \ln(n) - 1$$

donc :

$$a_n = 1 - \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} \geqslant 1 - \frac{\ln(n)-1}{\ln(n)} = \frac{1}{\ln(n)} \quad \text{car} \quad \ln(n) > 0.$$

On en déduit que $\boxed{a_n > 0}$. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} f_n(a_n) &= n^{a_n-1} - a_n = \exp\Big((a_n-1)\ln(n)\Big) - a_n \\ &= \underbrace{\exp\left(-\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}\ln(n)\right)}_{=1/\exp(\ln(\ln(n)))} - 1 + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} \quad \text{car } a_n = 1 - \tfrac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} \\ &= \frac{1}{\ln(n)} - 1 + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} = \frac{1-\ln(n)+\ln(\ln(n))}{\ln(n)}. \end{aligned}$$

En appliquant à nouveau l'inégalité (I) à $x = \ln(n) > 0$, on en déduit que $\boxed{f_n(a_n) \leqslant 0}$.

(d) *En reprenant la démonstration de la question précédente, justifier que $f_n(a_n) < 0$.*

▶ Par l'absurde, on suppose que $f_n(a_n) = 0$. En reprenant les calculs de la question précédente, on en déduit que :

$$1 - \ln(n) + \ln(\ln(n)) \quad \text{donc} \quad \ln(\ln(n)) = \ln(n) - 1.$$

Ainsi, l'inégalité (I) est une égalité pour $x = \ln(n)$. Or, si on reprend la démonstration de cette inégalité dans la question précédente, le cas d'égalité de (I) correspond au minimum $x = 1$ de la fonction f. On en déduit que $\ln(n) = 1 = \ln(e)$ donc que $n = e$ car la fonction ln est injective. Or ceci est absurde car $n \geqslant 3 > e$. Par conséquent, $f_n(a_n) \neq 0$ et donc $\boxed{f_n(a_n) < 0}$ d'après le résultat de la question précédente.

(e) *Dresser le tableau des variations de la fonction f_n en indiquant les limites aux bornes de l'ensemble de définition et les signes des images des valeurs particulières 0, 1 et a_n.*

▶ On a :

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = \lim_{x\to-\infty} n^{x-1} - x = \lim_{x\to-\infty} e^{(x-1)\ln(n)} - x = \boxed{+\infty} \quad \text{car } \ln(n) > 0$$

Inutile de plus justifier ici, ce calcul de limite ne fait pas apparaître de forme indéterminée et utilise seulement les propriétés usuelles.

$$\begin{aligned} \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f_n(x) &= \lim_{x\to+\infty} n^{x-1} - x = \lim_{x\to+\infty} e^{(x-1)\ln(n)} - x \\ &= \lim_{x\to+\infty} e^{(x-1)\ln(n)}\left(1 - \frac{x}{e^{(x-1)\ln(n)}}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty} e^{(x-1)\ln(n)}\left(1 - \frac{(x-1)\ln(n)}{e^{(x-1)\ln(n)}} \times \frac{x}{(x-1)\ln(n)}\right) \end{aligned}$$

Par contre, il est nécessaire de détailler précisément ce calcul de limite qui fait apparaître une forme indéterminée qui peut être levée à l'aide du théorème des croissances comparées.

Or $\lim_{x\to+\infty}(x-1)\ln(n) = +\infty$ car $\ln(n) > 0$ donc :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{(x-1)\ln(n)}{e^{(x-1)\ln(n)}} &= \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} \quad \text{en posant } X = (x-1)\ln(n) \\ &= 0 \quad \text{d'après le théorème des croissances comparées.} \end{aligned}$$

De plus :
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(x-1)\ln(n)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(1-\frac{1}{x})\ln(n)}=\frac{1}{\ln(n)}.$$
Par conséquent, on en déduit que $\boxed{\lim_{x\to+\infty}f_n(x)=+\infty}$. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
f_n(0)&=n^{-1}-0=\frac{1}{n}>0\\
f_n(1)&=n^0-1=0\\
f_n(a_n)&<0 \quad \text{d'après le résultat de la question précédente.}
\end{aligned}$$

En utilisant tous les résultats précédents, on obtient le tableau des variations de la fonction f_n :

x	$-\infty$		0		u_n		a_n		1		$+\infty$
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{n}>0$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f_n(a_n)<0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(f) En déduire que l'équation (E_n) *admet deux solutions : une solution évidente et une unique solution dans* $]0,a_n[$ *qu'on notera* u_n*.*

▶ Puisque $n\neq 0$, on a :
$$(\mathrm{E}_n)\iff nx=n^x\iff\frac{n^x-nx}{n}=0\iff n^{x-1}-x=0\iff f_n(x)=0.$$
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on déduit du tableau des variations obtenu à la question précédente que l'équation (E_n) équivalente à $f_n(x)=0$ admet deux solutions : $\boxed{x=1}$ et une unique solution $\boxed{u_n\in]0,a_n[}$.

2. *(a) Calculer la limite de* a_n *quand* n *tend vers* $+\infty$*.*

▶ On a :
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}1-\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}&=\lim_{X\to+\infty}1-\frac{\ln(X)}{X}\quad \begin{array}{l}\text{en posant } X=\ln(n)\\ \text{car } \lim_{n\to+\infty}X=+\infty\end{array}\\
&=1-0\quad\text{d'après le théorème des croissances comparées}\\
&=\boxed{1}.
\end{aligned}$$

(b) Que peut-on en déduire pour la nature de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ *?*

▶ $\boxed{\text{On ne peut rien en déduire}}$.

Attention : on ne peut pas en déduire que la limite de $(u_n)_{n\geqslant 3}$ *est inférieure ou égale à 1 en passant à la limite dans l'inégalité* $u_n<a_n$ *pour tout* $n\geqslant 3$*. En effet, on n'a pas encore prouvé que* $(u_n)_{n\geqslant 3}$ *est convergente. Cette suite pourrait être divergente de 2ᵉ espèce et ne pas avoir de limite.*

3. *(a) Soit* $n\geqslant 3$*. En utilisant la monotonie de la fonction* $x\mapsto x^{u_{n+1}-1}$*, montrer que* $f_n(u_{n+1})>0$*.*

▶ On a :
$$f_n(u_{n+1})=n^{u_{n+1}-1}-u_{n+1}.$$
Or u_{n+1} est solution de l'équation (E_{n+1}) équivalente à $f_{n+1}(x)=0$ donc :
$$f_{n+1}(u_{n+1})=(n+1)^{u_{n+1}-1}-u_{n+1}=0\quad\text{donc}\quad u_{n+1}=(n+1)^{u_{n+1}-1}.$$

On en déduit que :

$$f_n(u_{n+1}) = n^{u_{n+1}-1} - u_{n+1} = n^{u_{n+1}-1} - (n+1)^{u_{n+1}-1}.$$

Or on sait que $u_{n+1} \in]0, a_{n+1}[$ par définition de u_{n+1} et que $a_{n+1} < 1$ d'après le résultat de la question 1(b). Ainsi, $u_{n+1} - 1 < 0$ et donc la fonction $g : x \mapsto x^{u_{n+1}-1}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. On en déduit que $g(n) > g(n+1)$, et par conséquent :

$$f_n(u_{n+1}) = g(n) - g(n+1) \boxed{> 0}.$$

(b) *En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.*

► Soit $n \geqslant 3$. On a montré à la question précédente que $u_{n+1} \in]0, 1[$ et que $f_n(u_{n+1}) > 0$. Or, d'après le tableau des variations obtenu à la question 1(e), la fonction f_n est strictement positive sur $]0, u_n[$ et négative sur $[u_n, 1]$. On en déduit que $u_{n+1} \in]0, u_n[$ et donc que $u_{n+1} < u_n$. Puisque ceci est vrai pour tout $n \geqslant 3$, on a montré que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 3} \text{ est strictement décroissante}}$.

(c) *Que peut-on en déduire pour la nature de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$?*

► La suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante d'après le résultat de la question précédente et minorée par 0 par définition. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 3} \text{ converge}}$.

4. *En raisonnant par l'absurde, montrer que $(u_n)_{n\geqslant 3}$ converge vers 0.*

► On note $\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n$. Par l'absurde, on suppose que $\ell \neq 0$. Par définition de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$, on a :

$$\forall n \geqslant 3, \quad 0 = f_n(u_n) = n^{u_n - 1} - u_n.$$

De plus, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} n^{u_n-1} = \lim_{n\to+\infty} \exp\Big(\underbrace{(u_n - 1)}_{\to \ell-1}\underbrace{\ln(n)}_{\to+\infty}\Big).$$

Or on sait que $u_n \in]0, a_n[$ pour tout $n \geqslant 3$. En passant à la limite, on en déduit que :

$$0 \leqslant \ell \leqslant 1 \quad \text{car} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 1 \text{ d'après le résultat de la question 2(a).}$$

N'oubliez de passer aux inégalités larges en passant à la limite !!

Ainsi, $\ell - 1 \leqslant 0$. De plus $\ell < 1$ car la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est strictement décroissante (d'après le résultat de la question 3(b)) et majorée par 1 (car $u_n < a_n < 1$ pour tout $n \geqslant 3$ d'après le résultat de la question 1(b)). On en déduit que $\ell - 1 < 0$ et donc en passant à la limite dans la première égalité :

$$0 = \lim_{n\to+\infty} f_n(u_n) = \lim_{n\to+\infty} \exp\Big(\underbrace{(u_n-1)}_{\to \ell-1<0}\underbrace{\ln(n)}_{\to+\infty}\Big) - \underbrace{u_n}_{\to\ell} = 0 - \ell = -\ell$$

ce qui est absurde car on a supposé que $\ell \neq 0$. Par conséquent $\boxed{\ell = 0}$.

5. (a) *Soit $n \geqslant 3$. À l'aide de l'inégalité (I), déterminer le signe de $f_n(\frac{1}{n})$.*

► On a :

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n^{\frac{1}{n}-1} - \frac{1}{n} = n^{\frac{1}{n}} \times n^{-1} - n^{-1} = \left(n^{\frac{1}{n}} - 1\right)n^{-1} = \frac{\exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) - 1}{n}.$$

En appliquant l'inégalité (I) à $x = \exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$, on en déduit que :

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) \geqslant \frac{\ln\left(\exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right)}{n} = \frac{\ln(n)}{n^2} \quad \text{car } n > 0.$$

Par conséquent, $\boxed{f_n(\frac{1}{n}) > 0}$ car $\ln(n) \geqslant \ln(3) > \ln(1) = 0$ par stricte croissance de la fonction ln.

(b) *En déduire que la suite $(nu_n)_{n\geqslant 3}$ est minorée par 1.*

▶ Soit $n \geqslant 3$. On sait que $\frac{1}{n} \in]0,1[$ et que $f_n(\frac{1}{n}) > 0$ d'après le résultat de la question précédente. En raisonnant comme à la question 3(b), on en déduit, d'après le tableau des variations obtenu à la question 1(e), que $\frac{1}{n} \in]0, u_n[$. Par conséquent :

$$\frac{1}{n} < u_n \quad \text{donc} \quad nu_n > 1 \quad \text{car } n > 0.$$

Puisque ceci est vrai pour tout $n \geqslant 3$, on a montré que $\boxed{\text{la suite } (nu_n)_{n\geqslant 3} \text{ est minorée par } 1}$.

6. *Dans cette question, on fixe un entier $n \geqslant 3$ et on pose la fonction $g_n : x \mapsto n^{x-1}$.*

(a) *Simplifier $g_n(u_n)$ et $g_n(a_n)$ puis montrer que $u_n < \frac{1}{\ln(n)}$.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
g_n(u_n) &= n^{u_n-1} = \boxed{u_n} \quad \text{car } n^{u_n-1} - u_n = f_n(u_n) = 0 \text{ par définition de } u_n \\
g_n(a_n) &= n^{a_n-1} = \exp\Big((a_n-1)\ln(n)\Big) \\
&= \underbrace{\exp\left(\frac{-\ln(\ln(n))}{\ln(n)}\ln(n)\right)}_{=1/\exp(\ln(\ln(n)))} \quad \text{car } a_n = 1 - \tfrac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} \\
&= \boxed{\frac{1}{\ln(n)}}.
\end{aligned}$$

Or la fonction g_n est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions usuelles, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g_n'(x) = \ln(n) n^{x-1} > 0 \quad \text{car } \ln(n) > 0.$$

On en déduit que g_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Or on sait que $u_n < a_n$ par définition de u_n. Par conséquent, $g_n(u_n) < g_n(a_n)$ ce qui donne d'après les résultats précédents :

$$\boxed{u_n < \frac{1}{\ln(n)}}.$$

(b) *En réitérant le raisonnement de la question précédente, montrer que $u_n < \frac{1}{n}\exp\left(e^{\frac{\ln(n)}{n}}\right)$.*

▶ En appliquant à nouveau la stricte croissance de la fonction g_n au résultat de la question précédente, on obtient que :

$$u_n = g_n(u_n) < g_n\left(\frac{1}{\ln(n)}\right).$$

Or :

$$g_n\left(\frac{1}{\ln(n)}\right) = n^{\frac{1}{\ln(n)}-1} = \exp\left(\left(\frac{1}{\ln(n)} - 1\right)\ln(n)\right) = \exp\Big(1 - \ln(n)\Big) = \frac{\exp(1)}{\exp(\ln(n))} = \frac{e}{n}.$$

Ainsi $u_n < \frac{e}{n}$. Puis en appliquant à nouveau la stricte croissance de la fonction g_n à cette inégalité, on obtient que :

$$u_n = g_n(u_n) < g_n\left(\frac{e}{n}\right).$$

Or :

$$g_n\left(\frac{e}{n}\right) = n^{\frac{e}{n}-1} = \exp\left(\left(\frac{e}{n} - 1\right)\ln(n)\right) = \frac{\exp\left(e\frac{\ln(n)}{n}\right)}{\exp(\ln(n))} = \frac{1}{n}\exp\left(e\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Par conséquent, $\boxed{u_n < \frac{1}{n}\exp\left(e\frac{\ln(n)}{n}\right)}$.

7. *Déduire des résultats précédents un équivalent simple de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.*

▶ D'après les résultats des questions 5(b) et 6(b), on a pour tout $n \geqslant 3$:

$$1 < nu_n < \exp\left(e\frac{\ln(n)}{n}\right) \quad \text{car } n > 0.$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} \exp\left(e\frac{\ln(n)}{n}\right) = 1 \quad \text{car} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0 \text{ d'après le théorème des croissances comparées.}$$

D'après le théorème de la limite par encadrement, on en déduit que :

$$\lim_{n\to\infty} nu_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{1/n} = 1 \quad \text{donc que} \quad \boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}}.$$

8. (a) *Montrer que $\ln(nu_n) \sim \frac{\ln(n)}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.*

▶ Soit $n \geqslant 3$. Par définition, u_n est solution de l'équation (E_n), c'est-à-dire :

$$nu_n = n^{u_n} \quad \text{donc} \quad \ln(nu_n) = \ln(n^{u_n}) = u_n \ln(n).$$

Or u_n est équivalent à $\frac{1}{n}$ quand $n \to +\infty$ d'après le résultat de la question précédente. On en déduit par produit que :

$$\boxed{\ln(nu_n) = \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}}.$$

(b) *En déduire un équivalent simple de l'erreur relative $(\delta_n)_{n\geqslant 3}$ du résultat de la question 7.*

▶ L'erreur relative de l'équivalent obtenu à la question 7 s'exprime pour tout $n \geqslant 3$ par :

$$\delta_n = \frac{\frac{1}{n} - u_n}{u_n}.$$

D'après le résultat de la question 7, on en déduit que :

$$\delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{n} - u_n}{\frac{1}{n}} = 1 - nu_n.$$

De plus, on a :

$$\ln(nu_n) = \ln\Big(1 + \underbrace{(nu_n - 1)}_{\to 0}\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} (nu_n - 1) \quad \text{car} \lim_{n\to+\infty} nu_n = 1 \quad \text{d'après le résultat de la question 7.}$$

On en déduit que :

$$\delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (1 - nu_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\ln(nu_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \boxed{\frac{-\ln(n)}{n}} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente.}$$

On trouve un équivalent opposé si on prend comme définition de l'erreur relative :

$$\delta_n = \frac{u_n - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}.$$

Mathématiquement, ça ne change rien.

(c) *Vérifier que cette erreur relative δ_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.*

▶ D'après le théorème des croissances comparées, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. Par conséquent, on déduit de l'équivalent obtenu à la question précédente que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \delta_n = 0}$.