DM n^o 7 de mathématiques

à rendre au plus tard le jeudi 18 avril

Ce DM propose d'étudier un paradoxe de la théorie des jeux découvert par le physicien espagnol Juan Parrondo et se résumant ainsi : «il est possible d'élaborer une stratégie gagnante en combinant deux jeux statistiquement perdants». Ce paradoxe a de nombreuses conséquences, notamment en écologie : «une population peut survivre dans un écosystème ne comportant que des habitats hostiles».

On considère deux pièces de monnaie déséquilibrées notées A et B qui donnent «pile» avec probabilité a et b respectivement. Le jeu de Parrondo, noté $\mathcal{P}(a, b)$, consiste en une série de lancers consécutifs de ces pièces. Le joueur débute le jeu avec une cagnotte nulle et à chaque lancer il gagne 1€ s'il obtient «pile» et perd 1€ s'il obtient «face». La cagnotte peut évoluer négativement. Le choix de la pièce avant chaque lancer se fait de la façon suivante : si le montant de la cagnotte est un multiple de 3 (c'est-à-dire de la forme $3k$ avec $k \in \mathbb{Z}$) alors le joueur lance la pièce A, sinon il lance la pièce B.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on désigne par G_n l'événement «le joueur gagne 1€ au n-ième lancer» et on note p_n sa probabilité. Lorsque la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente, on dit que le jeu $\mathcal{P}(a, b)$ est gagnant si $\lim_{n\to+\infty} p_n > 1/2$, qu'il est équitable si $\lim_{n\to+\infty} p_n = 1/2$ et qu'il est perdant si $\lim_{n\to+\infty} p_n < 1/2$.

Partie A - Modélisation informatique et approche statistique

On rappelle qu'on peut modéliser en Python le lancer d'une pièce déséquilibrée qui donne «pile» avec probabilité p par la fonction ci-contre et que l'instruction `cagnotte%3` est égale à `0` si et seulement si la variable `cagnotte` contient une valeur entière multiple de 3.

```
import random as rd
def piece(p):
    x=rd.random()
    if x<p:
        return "Pile"
    else:
        return "Face"
```

1. En vous inspirant de la fonction `piece` (mais sans l'utiliser), écrire une fonction `parrondo(n,a,b)` qui renvoie le montant de la cagnotte après n lancers du jeu $\mathcal{P}(a, b)$.
2. Modifier la fonction `parrondo` pour écrire une fonction `listeG(n,a,b)` qui modélise n lancers du jeu $\mathcal{P}(a, b)$ puis qui renvoie la liste de n éléments dont le i-ième est égal à `1` si le joueur gagne 1€ au i-ième lancer et égal à `0` sinon.

On rappelle que la loi des grands nombres justifie que plus le nombre de simulations d'une expérience aléatoire est grand, plus la fréquence statistique d'occurrence d'un événement se rapproche de sa probabilité.

3. En utilisant la fonction `listeG`, écrire une fonction `freq(n,a,b,nbSim)` qui simule `nbSim` fois n lancers du jeu $\mathcal{P}(a, b)$ puis qui renvoie la liste dont le i-ième élément est égal à la fréquence statistique d'occurrence de l'événement G_i.
4. On considère les lignes de commandes Python ci-contre.

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.axis([1,100,0,1])
plt.plot([k for k in range(1,101)],[0.5 for k in range(1,101)])
plt.plot([k for k in range(1,101)],freq(100,0.4,0.9,1000))
plt.show()
```

(a) Expliquer ce que représente le graphique obtenu. Quelle conjecture peut-on faire ? Illustrer cette conjecture à l'aide de la fonction `parrondo`.

(b) Trouver trois autres exemples de couples $(a, b) \in]0, 1[^2$ pour lesquels le jeu $\mathcal{P}(a, b)$ peut-être conjecturé respectivement gagnant, équitable et perdant. En vous inspirant de la question précédente, illustrer chacune de ces conjectures à l'aide d'un graphique et de la fonction `parrondo`.

Partie B - Le critère de Parrondo

5. (Un cas particulier) Dans cette question, on suppose que $a = b \in]0, 1[$ et on considère le jeu $\mathcal{P}(a, a)$.
   (a) Que peut-on dire de la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ dans ce cas ?
   (b) En déduire la nature du jeu $\mathcal{P}(a, a)$ en fonction des différentes valeurs de $a \in]0, 1[$.

Dans les questions suivantes, on suppose que $(a, b) \in]0, 1[^2$ sont quelconques et on considère le jeu $\mathcal{P}(a, b)$. On remarque qu'on peut partitionner l'ensemble des entiers relatifs de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &= \{\ldots, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \ldots\}\\ &= \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\} \cup \{\ldots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\} \cup \{\ldots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\}\\ &= \{3k + 0 \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour chaque $r \in \{0, 1, 2\}$, on définit l'événement :

E_n^r = «juste avant le n-ième lancer, le montant de la cagnotte est de la forme $3k + r$ avec $k \in \mathbb{Z}$».

6. (a) Déterminer $P(E_1^0)$, $P(E_1^1)$, $P(E_1^2)$ et p_1.
   (b) Déterminer $P(E_2^0)$, $P(E_2^1)$, $P(E_2^2)$ et p_2.
   (c) Déterminer $P(E_3^0)$, $P(E_3^1)$ et $P(E_3^2)$ puis montrer que $p_3 = a^2(1 - 2b) + 2ab^2 + b(1 - b)$.
7. On fixe un entier $n \geqslant 1$ dans cette question.
   (a) Justifer que $P(E_{n+1}^0) = (1 - b)P(E_n^1) + bP(E_n^2)$.
   (b) Déterminer des relations similaires pour les probabilités $P(E_{n+1}^1)$ et $P(E_{n+1}^2)$.
8. Pour tout entier $n \geqslant 1$ on pose la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} P(E_n^0) \\ P(E_n^1) \\ P(E_n^2) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(a) À l'aide des résultats précédents, déterminer une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \geqslant 1,\ X_{n+1} = MX_n$.

(b) Déterminer une matrice ligne $L \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \geqslant 1,\ p_n = LX_n$.

On pose le polynôme $Q = X^3 - cX - (1-c) \in \mathbb{R}[X]$ où $c = b(1-b) + a(1-b) + b(1-a)$.

9. Calculer $Q(M)$ où M est la matrice carrée obtenue à la question 8(a).
10. Déduire des résultats précédents que $\forall n \geqslant 1,\ p_{n+3} = cp_{n+1} + (1-c)p_n$.
11. Déterminer deux réels $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $Q = (X-\alpha)(X^2 + X + \beta)$.
12. On note $(q_1, q_2) \in \mathbb{C}^2$ les deux racines de $X^2 + X + \beta$ (éventuellement réelles ou même égales).
    (a) En étudiant la fonction $f_a : x \mapsto x(1-x) + a(1-x) + x(1-a)$, montrer que $0 < c \leqslant a^2 - a + 1$.
    (b) En étudiant la fonction $g : x \mapsto x^2 - x + 1$, en déduire que $\beta \in]0,1[$.
    (c) En raisonnant par disjonction de cas, montrer que $|q_1| \in]0,1[$ et $|q_2| \in]0,1[$.
13. Dans cette question, on suppose que les deux racines q_1 et q_2 définies à la question 12 sont réelles distinctes.
    (a) Justifier qu'il existe un unique triplet $(\lambda, \mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que :
$$\begin{cases} \lambda + \mu_1 q_1 + \mu_2 q_2 = a & (L_1) \\ \lambda + \mu_1 q_1^2 + \mu_2 q_2^2 = b & (L_2) \\ \lambda + \mu_1 q_1^3 + \mu_2 q_2^3 = a^2(1-2b) + 2ab^2 + b(1-b) & (L_3) \end{cases}.$$
    (b) En raisonnant par récurrence triple, montrer que $\forall n \geqslant 1,\ p_n = \lambda + \mu_1 q_1^n + \mu_2 q_2^n$.
    (c) En considérant $(L_3) + (L_2) + \beta(L_1)$, montrer que $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{3(a(2b^2-2b+1)+b(2-b)-1)}{2(2+\beta)}$.
    (d) Justifier que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et démontrer le critère de Parrondo :
$$\boxed{\text{le jeu } \mathcal{P}(a,b) \text{ est } \begin{cases} \text{gagnant si } \delta(a,b) > 0 \\ \text{équitable si } \delta(a,b) = 0 \\ \text{perdant si } \delta(a,b) < 0 \end{cases} \quad \text{où} \quad \delta(a,b) = ab^2 - (1-a)(1-b)^2}.$$

Dans la suite de l'énoncé, on admet les démonstrations (similaires) de ce résultat dans le cas où q_1 et q_2 sont égales et le cas où q_1 et q_2 sont complexes conjuguées distinctes. Le critère de Parrondo est donc vrai pour tout jeu $\mathcal{P}(a,b)$ où $(a,b) \in]0,1[^2$.

14. (Implémentation informatique) Écrire en Python une fonction `critere(a,b)` qui renvoie la nature du jeu $\mathcal{P}(a,b)$ sous forme d'une chaîne de caractères (c'est-à-dire `"Gagnant"`, `"Équitable"` ou `"Perdant"`).
15. (Quelques exemples)
    (a) Montrer que le jeu $\mathcal{P}(\frac{1}{10}, \frac{3}{4})$ est équitable. Déterminer un équivalent de $\delta(\frac{1}{10}+x, \frac{3}{4}+x)$ quand x tend vers 0 puis en déduire la nature du jeu $\mathcal{P}(\frac{1}{10}+x, \frac{3}{4}+x)$ en fonction des différentes valeurs de x au voisinage de 0.
    (b) Montrer que le jeu $\mathcal{P}(\frac{3}{10}, \frac{5}{8})$ est gagnant. Quelle propriété de la fonction $x \mapsto \delta(\frac{3}{10}+x, \frac{5}{8}+x)$ permet d'en déduire que le jeu $\mathcal{P}(\frac{3}{10}+x, \frac{5}{8}+x)$ est gagnant pour tout réel x au voisinage de 0 ? Justifier votre réponse.

Partie C - Le paradoxe de Parrondo

On considère désormais un nouveau jeu qui consiste toujours en une série de lancers consécutifs de pièces dont chaque «pile» augmente le montant de la cagnotte de 1€ et chaque «face» le diminue de 1€. Mais avant chaque lancer, le joueur choisit au hasard et avec même probabilité (par exemple à l'aide d'un autre lancer d'une pièce de monnaie équilibrée) s'il va utiliser le couple de pièces d'un jeu $\mathcal{P}(a,b)$ ou bien le couple de pièces d'un autre jeu $\mathcal{P}(a',b')$. Ainsi, on combine équiprobablement deux jeux $\mathcal{P}(a,b)$ et $\mathcal{P}(a',b')$ pour obtenir un nouveau jeu noté $\mathcal{P}((a,b),(a',b'))$.

Dans cette partie, on suppose donc que $(a,b,a',b') \in]0,1[^4$ sont quelconques et on considère le jeu $\mathcal{P}((a,b),(a',b'))$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit les événements suivants :

J_n = «le joueur utilise le couple de pièces du jeu $\mathcal{P}(a,b)$ au n-ième lancer»,

J'_n = «le joueur utilise le couple de pièces du jeu $\mathcal{P}(a',b')$ au n-ième lancer»,

A_n = «juste avant le n-ième lancer, le montant de la cagnotte est un multiple de 3»,

B_n = «juste avant le n-ième lancer, le montant de la cagnotte n'est pas un multiple de 3»,

G_n = «le joueur gagne 1€ au n-ième lancer».

16. On fixe un entier $n \geqslant 1$ dans cette question.
    (a) Justifier que $\mathrm{P}_{A_n}(G_n) = \frac{1}{2}\mathrm{P}_{A_n \cap J_n}(G_n) + \frac{1}{2}\mathrm{P}_{A_n \cap J'_n}(G_n)$ puis exprimer $\mathrm{P}_{A_n}(G_n)$ en fonction de a et a'.
    (b) Déterminer une expression similaire pour la probabilité $\mathrm{P}_{B_n}(G_n)$.
17. Expliquer pourquoi jouer au jeu $\mathcal{P}((a,b),(a',b'))$ revient à jouer au jeu $\mathcal{P}(\frac{a+a'}{2}, \frac{b+b'}{2})$.
18. En considérant le jeu $\mathcal{P}((\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}-\varepsilon), (\frac{1}{10}-\varepsilon, \frac{3}{4}-\varepsilon))$ à l'aide de résultats précédents, montrer qu'on obtient un résultat contraire à l'intuition pour toute valeur suffisamment petite de $\varepsilon > 0$.
19. À l'aide de la fonction `critere`, déterminer une valeur numérique de $\varepsilon > 0$ pour laquelle le résultat de la question précédente est vérifié. En vous inspirant de la question 4, illustrer cet exemple numérique du paradoxe de Parrondo à l'aide de graphiques et de la fonction `parrondo` (si nécessaire, on pourra choisir des nombres de lancers, des nombres de simulations ou des échelles graphiques plus judicieux que ceux utilisés à la question 4).
20. Trouver un exemple numérique du paradoxe de Parrondo inverse : «deux jeux statistiquement gagnants peuvent néanmoins donner une stratégie perdante si on les combine entre eux».