DS n$^{\text{o}}$ 1 de mathématiques

durée : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de documents est interdit.
Il est recommandé de lire l'ensemble de l'énoncé attentivement et patiemment.
Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en mentionnant les hypothèses que vous avez été amené à formuler.
Le soin de la présentation, la qualité de la rédaction, ainsi que la rigueur, la clarté et la concision des raisonnements constitueront un facteur important d'appréciation de la copie.

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-7}{4-x}$. Déterminer les ensembles suivants :

$$\mathscr{E}_1 = \Big\{ x \in \mathbb{R} \ \Big| \ f(x) \in]2,4] \Big\} \quad \text{et} \quad \mathscr{E}_2 = \Big\{ f(x) \ \Big| \ x \in]5,13[\Big\}.$$

Problème 1

Pour toute partie A de $\mathbb{R}$ et tout réel $a \in A$, on dit que a est **un point isolé** de A si la propriété suivante est vérifiée :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad A \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[= \{a\}. \tag{$*$}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que n est un point isolé de $\mathbb{N}$.
2. Existe-t-il un point de $\mathbb{Z}$ qui n'est pas isolé ? Justifier.
3. (a) Écrire la négation de la propriété $(*)$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que x n'est pas un point isolé de $\mathbb{R}$.
4. (a) Dans cette question, on fixe un rationnel $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ où $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, un réel $\varepsilon > 0$, et un entier $n \in \mathbb{N}$ supérieur à $2/\varepsilon$. Montrer que :

   $$0 < \left| r - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon \quad \text{où} \quad r = \frac{np+q}{nq} \in \mathbb{Q}.$$

   (b) En déduire qu'aucun point de $\mathbb{Q}$ n'est isolé.
5. (a) Soit $B = [1,2] \cup \{0\}$. Prouver que 0 est le seul point isolé de B.

   (b) Soit $C = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$. Prouver que 0 est le seul point non isolé de C.
6. Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in A$. Démontrer que a est un point isolé de A si et seulement si la propriété suivante est vérifiée :

   $$\exists \varepsilon > 0, \quad A \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon] = \{a\}. \tag{$**$}$$

Exercice 2

Déterminer la partie entière du réel $\alpha = 3\sqrt{5} + \sqrt{10}$ en justifiant votre réponse.

Exercice 3

Résoudre l'inéquation suivante d'inconnue x réelle :

$$\left|2x^2 - 5x - 3\right| \leqslant x^2 + 3.$$

Problème 2

On munit l'ensemble $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ d'une nouvelle opération appelée **somme parallèle**, notée $/\!/$, et définie pour tout $a > 0$ et tout $b > 0$ par :

$$a /\!/ b = \frac{ab}{a+b}.$$

1. Justifier la réponse à chacune des questions suivantes.
   (a) La somme parallèle est-elle commutative ?
   (b) La somme parallèle est-elle associative ?
   (c) La somme parallèle admet-elle un élément neutre ?
2. Montrer que le produit est distributif sur la somme parallèle.

Pour la suite de l'énoncé, on fixe $t \in \mathbb{R}$ et on pose $E_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y = t\}$.

3. Soient $a > 0$ et $b > 0$.
   (a) Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + b(t-x)^2$.
   (b) En déduire que :
   $$\inf\left\{ax^2 + by^2 \,\middle|\, (x, y) \in E_t\right\} = (a /\!/ b)t^2.$$
   Cette borne inférieure est-elle le plus petit élément ?
4. Soient $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $b_1 > 0$ et $b_2 > 0$. À l'aide du résultat de la question précédente, montrer que :
   $$(a_1 /\!/ b_1)t^2 + (a_2 /\!/ b_2)t^2 \leqslant \Big((a_1 + a_2) /\!/ (b_1 + b_2)\Big)t^2.$$
5. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 2$ et tous réels strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$, on a :
   $$(a_1 /\!/ b_1) + (a_2 /\!/ b_2) + \cdots + (a_n /\!/ b_n) \leqslant (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) /\!/ (b_1 + b_2 + \cdots + b_n).$$

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 6 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 3\big(2u_{n+1} - 3u_n\big).$$

Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = (an + b)c^n$.