DS n$^{\text{o}}$ 1 de mathématiques

durée : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de documents est interdit.
Il est recommandé de lire l'ensemble de l'énoncé attentivement et patiemment.
Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en mentionnant les hypothèses que vous avez été amené à formuler.
Le soin de la présentation, la qualité de la rédaction, ainsi que la rigueur, la clarté et la concision des raisonnements constitueront un facteur important d'appréciation de la copie.

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+5}{x-2}$. Déterminer les ensembles suivants :

$$\mathscr{E}_1 = \Big\{ f(x) \mid x \in]-7,1[\Big\} \quad \text{et} \quad \mathscr{E}_2 = \Big\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [12,14[\Big\}.$$

Problème 1

Ce problème propose d'étudier pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$nz^n = z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z^3 + z^2 + z + 1. \tag{E_n}$$

1. Résoudre les équations (E_1) et (E_2).
2. Déterminer un nombre $u \in \mathbb{C}$ solution de (E_n) pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
3. (a) Montrer que l'équation (E_3) est équivalente à

   $$(z-u)(az^2+bz+c) = 0$$

   où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ sont trois nombres à déterminer.

   (b) Résoudre l'équation (E_3).

Pour la suite du problème, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^\star$.

4. Dans cette question, on fixe $z \in \mathbb{C} \setminus \{u\}$ une solution de l'équation (E_n) et on suppose que $|z| > 1$.

   (a) Montrer que :

   $$|z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z^3 + z^2 + z + 1| < n|z|^n.$$

   (b) Que peut-on en déduire ?

5. Dans cette question, on fixe $z \in \mathbb{C} \setminus \{u\}$ une solution de l'équation (E_n) et on suppose que $|z| = 1$. On note θ un argument de z.

   (a) Montrer que :

   $$ne^{in\theta} = \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)} e^{i(n-1)\theta/2}.$$

   (b) En déduire que :

   $$ne^{i(n+1)\theta/2} = \frac{1}{\tan(\theta/2)} \sin((n+1)\theta/2) - \cos((n+1)\theta/2).$$

   (c) Montrer que θ est nul modulo $2\pi/(n+1)$ et aboutir à une absurdité.

6. Que peut-on conclure des questions 2, 4 et 5 ?

Exercice 2

Résoudre les équations et les inéquations suivantes d'inconnue x réelle.

(I_1) $|x^2+3x+1| \geqslant |2x+3|$

(I_2) $x^{(x^3)} \geqslant x^{4x}$

(I_3) $\left\lfloor x+\sqrt{2x+3} \right\rfloor = 4$

(I_4) $6\sin^2(x)+2 \geqslant 7\sin(x)$

(I_5) $\dfrac{2x+m}{x+3} \geqslant 1$ où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre fixé.

Problème 2

On dit qu'une fonction réelle f est *lipschitzienne* sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ s'il existe une constante $K \geqslant 0$ telle que :

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x)-f(y)| \leqslant K|x-y|.$$

1. On rappelle qu'une fonction affine est une fonction de la forme $g : x \mapsto \alpha x + \beta$ où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer que la fonction $g : x \mapsto 3x-2$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
   (b) Plus généralement, montrer que toute fonction affine est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Montrer que la fonction $h_{-1} : x \mapsto 1/x$ est lipschitzienne sur $[1,+\infty[$.
   (b) i. Montrer que si la fonction $h_{-1} : x \mapsto 1/x$ est lipschitzienne sur $]0,1]$ alors :
   $$\exists K > 0,\ \forall x \in]0,1[,\ Kx \geqslant 1.$$
   ii. Que peut-on en déduire ?
   (c) La fonction $h_{-1} : x \mapsto 1/x$ est-elle lipschitzienne sur $]0,+\infty[$? Justifier.
3. (a) Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs la négation de «f est lipschitzienne sur I».
   (b) Montrer que la fonction $h_{1/2} : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0,1]$. (Indication : on pourra étudier ce qu'il se passe pour $y=0$).
   (c) La fonction $h_2 : x \mapsto x^2$ est-elle lipschitzienne sur $\mathbb{R}$? Justifier.
4. Soit f une fonction réelle définie sur un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$ (où $a<b$). Le but de cette question est de démontrer que si f est lipschitzienne sur $[a,b]$ alors f est bornée sur $[a,b]$, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes $(m,M) \in \mathbb{R}^2$ telles que $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in [a,b]$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall x \in [a,b], \quad |f(x)| \leqslant |f(x)-f(a)| + |f(a)| \quad \text{et} \quad |x-a| \leqslant (b-a).$$
   (b) Conclure.
   (c) À l'aide d'un exemple précédent, que peut-on dire de la réciproque ? Justifier.
5. Le but de cette question est de démontrer que la somme de deux fonctions lipschitziennes sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est aussi lipschitzienne sur I. Pour cela, on fixe deux fonctions f_1 et f_2 lipschitziennes sur I. Montrer que f_1+f_2 est lipschitzienne sur I.
6. À l'aide d'exemples précédents, que peut-on dire de l'assertion «le produit de deux fonctions lipschitziennes sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est aussi lipschitzienne sur I» ? Justifier.

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_0 = 1 = u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 2(u_{n+1}-2u_n).$$

Montrer qu'il existe $(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout entier $n \geqslant 0$ on a $u_n = \rho^n \cos(n\theta)$.