Corrigé du DS n° 1 de mathématiques

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+7}{x+3}$. Déterminer les ensembles suivants :

$$\mathscr{E}_1 = \Big\{ f(x) \mid x \in]-11,-5[\Big\} \quad \text{et} \quad \mathscr{E}_2 = \Big\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [4,6[\Big\}.$$

► La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}, \quad f'(x) = \frac{2x(x+3) - (x^2+7) \times 1}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x-7}{(x+3)^2}.$$

On reconnaît au numérateur un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 6^2 - 4 \times (-7) = 64 > 0$. Donc le numérateur s'annule en $(-6+\sqrt{64})/2 = 1$ et en $(-6-\sqrt{64})/2 = -7$. De plus, il est strictement négatif sur $]-7,1[$ et strictement positif sur $]-\infty,-7[\cup]1,+\infty[$. Puisque $(x+3)^2 > 0$ pour tout $x \neq -3$, on en déduit le tableau des variations de f.

x	$-\infty$	-11	-7	-5	-3	$3-2\sqrt{5}$	-1	1	5	$3+2\sqrt{5}$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$		0	$+$		
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-16 ↗	-14 ↘	-16 ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	6 ↘	4 ↘	2 ↗	4 ↗	6 ↗	$+\infty$

car :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\frac{7}{x}}{1+\frac{3}{x}} = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\frac{7}{x}}{1+\frac{3}{x}} = +\infty$$

$$f(-7) = \frac{(-7)^2+7}{-7+3} = \frac{56}{-4} = -14 \qquad f(1) = \frac{1^2+7}{1+3} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\lim_{x\to-3^-} f(x) = \lim_{x\to-3^-} \frac{x^2+7}{x+3} = -\infty \qquad \lim_{x\to-3^+} f(x) = \lim_{x\to-3^+} \frac{x^2+7}{x+3} = +\infty$$

On a $f(-11) = \dfrac{(-11)^2+7}{-11+3} = \frac{128}{-8} = -16$ et $f(-5) = \dfrac{(-5)^2+7}{-5+3} = \frac{32}{-2} = -16$. On déduit du tableau des variations de f que :

$$\mathscr{E}_1 = \Big\{ f(x) \mid x \in]-11,-5[\Big\} = \boxed{]-16,-14]}.$$

Soyez précis avec les bornes des intervalles : -16 est exclus car $]-11,-5[$ est un intervalle ouvert mais -14 est inclus car $-7 \in]-11,-5[$.

Pour déterminer $\mathscr{E}_2$, on résout les deux équations suivantes :

- $f(x) = 4 \iff \dfrac{x^2+7}{x+3} = 4 \iff x^2+7 = 4(x+3) \iff x^2-4x-5 = 0$
  On obtient une équation du second degré de discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-5) = 36 > 0$ qui admet pour solutions $x = (4+\sqrt{36})/2 = 5$ et $x = (4-6)/2 = -1$.

- $f(x)=6 \iff \dfrac{x^2+7}{x+3}=6 \iff x^2+7=6(x+3) \iff x^2-6x-11=0$
  On obtient une équation du second degré de discriminant $\Delta=(-6)^2-4\times(-11)>80$ qui admet pour solutions $x=(6+\sqrt{80})/2=(6+4\sqrt{5})/2=3+2\sqrt{5}$ et $x=3-2\sqrt{5}$.

On déduit du tableau des variations de f que :

$$\mathscr{E}_2=\left\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\in[4,6[\right\}=\boxed{\left]3-2\sqrt{5},-1\right]\cup\left[5,3+2\sqrt{5}\right[}.$$

Problème 1

On note θ l'unique réel appartenant à $[0,\pi]$ tel que $\cos(\theta)=1/3$. Le but de ce problème est de prouver que θ n'est pas une «fraction de π», c'est-à-dire que $\theta/\pi\notin\mathbb{Q}$ (on dit alors que θ et π sont incommensurables). Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe deux entiers p et q tels que $\theta=p\pi/q$.

1. (a) *Calculer $\sin(\theta)$ puis donner la forme algébrique de $e^{i\theta}$.*

▶ On a d'après le théorème de Pythagore :

$$\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1 \quad\text{donc}\quad \sin^2(\theta)=1-\cos^2(\theta)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}.$$

En passant à la racine, on en déduit que :

$$|\sin(\theta)|=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{\sqrt{4\times 2}}{\sqrt{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

N'oubliez pas les valeurs absolues ! En toute généralité, $\sqrt{x^2}=|x|$ si $x\in\mathbb{R}$. Il faut ensuite étudier le signe de x pour se débarasser des valeurs absolues.

Or $\theta\in[0,\pi]$ d'après l'énoncé, donc $\sin(\theta)\geqslant 0$ d'après le cercle trigonométrique. On en déduit que $|\sin(\theta)|=\sin(\theta)$ et donc que $\boxed{\sin(\theta)=2\sqrt{2}/3}$.

(b) *En déduire qu'il existe un entier $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\left(1+i2\sqrt{2}\right)^n=3^n$.*

▶ On cherche un entier $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\left(1+i2\sqrt{2}\right)^n=3^n$. On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse. On a :

$$\begin{aligned}
\left(1+i2\sqrt{2}\right)^n=3^n &\iff \left(\frac{1+i2\sqrt{2}}{3}\right)^n=1\\
&\iff \Bigg(\underbrace{\tfrac{1}{3}}_{=\cos(\theta)}+i\underbrace{\tfrac{2\sqrt{2}}{3}}_{=\sin(\theta)}\Bigg)^n=1\\
&\iff \left(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right)^n=1 \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}\\
&\iff \left(e^{i\theta}\right)^n=1 \quad \text{par définition de } e^{i\theta}\\
&\iff e^{in\theta}=1\\
&\iff e^{inp\pi/q}=1 \quad \text{car } \theta=p\pi/q \text{ d'après l'hypothèse de l'énoncé}\\
&\iff e^{i\frac{n}{q}p\pi}=1.
\end{aligned}$$

Il suffit donc de choisir n tel que $n/q=2$.
Synthèse. On pose $\boxed{n=2q}$. Alors $n\in\mathbb{N}^*$ (car $q\in\mathbb{N}^*$ d'après l'énoncé) et :

$$e^{i\frac{n}{q}p\pi}=e^{i2p\pi}=1 \quad \text{d'après le cercle trigonométrique.}$$

En reprenant les calculs effectués dans l'analyse, on en déduit que $\left(1+i2\sqrt{2}\right)^n=3^n$. On a donc bien prouvé $\boxed{\text{l'existence d'un entier } n\in\mathbb{N}^* \text{ tel que } \left(1+i2\sqrt{2}\right)^n=3^n}$.

2. *Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $(a_k, b_k) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\left(1+i2\sqrt{2}\right)^k = a_k + ib_k\sqrt{2}$. On donnera les expressions de a_{k+1} et b_{k+1} en fonction de a_k et b_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

► On raisonne par récurrence.

Il faut penser à la récurrence pour ce type de question. En effet, on connaît le résultat à démontrer pour tout $k \in \mathbb{N}$ et on a une relation de récurrence évidente entre le rang $k+1$ et le rang k :

$$\left(1+i2\sqrt{2}\right)^{k+1} = \left(1+i2\sqrt{2}\right)^k \times \left(1+i2\sqrt{2}\right).$$

De plus, il faut comprendre qu'il n'y a pas besoin de déterminer explicitement toutes les valeurs de a_k et b_k. Il suffit de les exprimer à l'aide des termes précédents, c'est-à-dire de construire les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par récurrence, d'où la deuxième partie de la question de l'énoncé qui donne une indication supplémentaire sur la méthode à utiliser.

Initialisation. Pour $k=0$, on cherche $(a_0, b_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\left(1+i2\sqrt{2}\right)^0 = a_0 + ib_0\sqrt{2}$. Or on a :

$$\left(1+i2\sqrt{2}\right)^0 = 1 = 1 + i0\sqrt{2}.$$

Il suffit donc de poser $\boxed{a_0 = 1}$ et $\boxed{b_0 = 0}$.

Hérédité. On fixe $k \in \mathbb{N}$ et on suppose qu'il existe $(a_k, b_k) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\left(1+i2\sqrt{2}\right)^k = a_k + ib_k\sqrt{2}$. On cherche $(a_{k+1}, b_{k+1}) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\left(1+i2\sqrt{2}\right)^{k+1} = a_{k+1} + ib_{k+1}\sqrt{2}$. On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse. On a :

$$\begin{aligned}
\left(1+i2\sqrt{2}\right)^{k+1} &= \left(1+i2\sqrt{2}\right)^k \times \left(1+i2\sqrt{2}\right) \\
&= \left(a_k + ib_k\sqrt{2}\right) \times \left(1+i2\sqrt{2}\right) \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= a_k + i2a_k\sqrt{2} + ib_k\sqrt{2} - 2b_k 2 \\
&= \underbrace{(a_k - 4b_k)}_{=a_{k+1}} + i\underbrace{(2a_k + b_k)}_{=b_{k+1}}\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Synthèse. On pose $\boxed{a_{k+1} = a_k - 4b_k}$ et $\boxed{b_{k+1} = 2a_k + b_k}$. D'après les calculs effectués dans l'analyse, on obtient :

$$\left(1+i2\sqrt{2}\right)^{k+1} = a_{k+1} + ib_{k+1}\sqrt{2}.$$

Par conséquent, on a bien démontré que s'il existe $(a_k, b_k) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\left(1+i2\sqrt{2}\right)^k = a_k + ib_k\sqrt{2}$ alors il existe $(a_{k+1}, b_{k+1}) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\left(1+i2\sqrt{2}\right)^{k+1} = a_{k+1} + ib_{k+1}\sqrt{2}$, et cette implication est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \exists (a_k, b_k) \in \mathbb{Z}^2,\ \left(1+i2\sqrt{2}\right)^k = a_k + ib_k\sqrt{2}}.$$

3. *Montrer que $a_{k+2} = 2a_{k+1} - 9a_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et déterminer une relation similaire pour $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*

► Soit $k \in \mathbb{N}$. On a d'après les résultats de la question précédente :

$$\underbrace{a_{k+1} = a_k - 4b_k}_{(1)} \quad \text{et} \quad \underbrace{b_{k+1} = 2a_k + b_k}_{(2)}.$$

Puisque ces relations sont vraies pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a aussi que :

$$\underbrace{a_{k+2} = a_{k+1} - 4b_{k+1}}_{(3)} \quad \text{et} \quad \underbrace{b_{k+2} = 2a_{k+1} + b_{k+1}}_{(4)}.$$

En injectant l'expression (2) dans la relation (3), on obtient :

$$a_{k+2} = a_{k+1} - 4\left(2a_k + b_k\right) = a_{k+1} - 8a_k - 4b_k.$$

Or on a $-4b_k = a_{k+1} - a_k$ d'après la relation (1), d'où :

$$a_{k+2} = a_{k+1} - 8a_k + a_{k+1} - a_k = 2a_{k+1} - 9a_k.$$

De même, en injectant l'expression (1) dans la relation (4), on obtient :

$$b_{k+2} = 2(a_k - 4b_k) + b_{k+1} = b_{k+1} - 8b_k + 2a_k.$$

Or on a $2a_k = b_{k+1} - b_k$ d'après la relation (2), d'où :

$$b_{k+2} = b_{k+1} - 8b_k + b_{k+1} - b_k = 2b_{k+1} - 9b_k.$$

Puisque ces relations sont vraies pour un $k \in \mathbb{N}$ fixé, elles sont vraies pour tous les $k \in \mathbb{N}$. On a donc montré :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{k+2} = 2a_{k+1} - 9a_k \\ b_{k+2} = 2b_{k+1} - 9b_k \end{cases}}.$$

4. *Que valent a_0, b_0, a_1, b_1, a_n et b_n ?*

▶ D'après l'initialisation de la récurrence utilisée à la question 2, on a obtenu que :

$$\boxed{a_0 = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{b_0 = 0}.$$

D'après les résultats de la question 2, on sait que $a_1 = a_0 - 4b_0 = 1 - 4 \times 0 = 1$ et $b_1 = 2a_0 + b_0 = 2 \times 1 + 0 = 2$, donc :

$$\boxed{a_1 = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{b_1 = 2}.$$

On peut bien sûr vérifier ce résultat à l'aide de :

$$\left(1 + i2\sqrt{2}\right)^1 = \underbrace{1}_{=a_1} + i\underbrace{2}_{=b_1}\sqrt{2}.$$

D'après le résultat de la question 1(b), on a :

$$\left(1 + i2\sqrt{2}\right)^n = 3^n = \underbrace{3^n}_{=a_n} + i\underbrace{0}_{=b_n}\sqrt{2}.$$

Donc :

$$\boxed{a_n = 3^n} \quad \text{et} \quad \boxed{b_n = 0}.$$

5. *On rappelle que la somme de deux multiples de 3 est un multiple de 3 et que si un multiple de 3 est de la forme $2m$ où $m \in \mathbb{Z}$ alors m est un multiple de 3. Prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}$, a_k n'est pas un multiple de 3.*

▶ On raisonne par récurrence double.

Il faut penser à la récurrence double ici. En effet, on connaît le résultat à démontrer pour tout $k \in \mathbb{N}$ et on a obtenu une relation de récurrence double à la question 3.

Initialisation. D'après les résultats de la question précédente, $a_0 = 1$ et $a_1 = 1$ ne sont pas des multiples de 3. Le résultat est donc vrai aux rangs $k = 0$ et $k = 1$.
Hérédité. On suppose que a_k et a_{k+1} ne sont pas des multiples de 3 pour un rang $k \in \mathbb{N}$ fixé.

Montrons que a_{k+2} n'est pas un multiple de 3. Par l'absurde, on suppose que a_{k+2} est un multiple de 3. D'après le résultat de la question 3, on a :

$$a_{k+2} = 2a_{k+1} - 9a_k \quad \text{donc} \quad 2a_{k+1} = a_{k+2} + 9a_k.$$

Or $9a_k$ est un multiple de 3 (car $9a_k = 3 \times 3a_k$). On en déduit que $2a_{k+1}$ est un multiple de 3 comme somme de deux multiples de 3, et donc que a_{k+1} est un multiple de 3 (d'après le rappel de l'énoncé). Ceci est absurde d'après l'hypothèse de récurrence. Par conséquent, a_{k+2} n'est pas un multiple de 3. On a donc montré que le résultat est vrai au rang $k+2$ dès qu'il est vrai aux rangs k et $k+1$. Et cette implication est vraie pour tout rang $k \in \mathbb{N}$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence double, on en déduit que le résultat est vrai pour tout rang $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que $\boxed{a_k \text{ n'est pas un multiple de 3 pour tout rang } k \in \mathbb{N}}$.

6. *Conclure.*

▶ D'après le résultat précédent, a_k n'est pas un multiple de 3 pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier, a_n n'est pas un multiple de 3. Or $a_n = 3^n$ d'après le résultat de la question 4 et 3^n est bien un multiple de 3 (car $n \in \mathbb{N}^\star$). Donc l'hypothèse de l'énoncé est absurde : il n'existe pas d'entiers p et q tels que $\theta = p\pi/q$. Par conséquent, $\boxed{\text{l'unique réel } \theta \in [0, \pi] \text{ tel que } \cos(\theta) = 1/3 \text{ n'est pas une fraction de } \pi}$.

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x réelle.

(I_1) $|x^2 + 5x - 2| \leqslant |2x + 2|$

▶ L'inéquation (I_1) est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. À gauche de l'inéquation, on reconnaît un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 33 > 0$ qui admet pour racines $x_1 = (-5 + \sqrt{33})/2$ et $x_2 = (-5 - \sqrt{33})/2$. À droite de l'inéquation, on reconnaît un polynôme du premier degré qui admet pour racine évidente -1. Puisque $\sqrt{33} > \sqrt{25} = 5$, on a $x_1 > 0 > -1$ et $x_2 < -5 < -1$. On obtient donc le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		x_2		-1		x_1		$+\infty$
$x^2 + 5x - 2$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$2x + 2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

On raisonne par disjonction de cas.

- 1^er^ cas : $x \in]-\infty, x_2]$. Alors :

$$\begin{aligned} (I_1) &\iff x^2 + 5x - 2 \leqslant -(2x+2) \\ &\iff x^2 + 7x \leqslant 0 \\ &\iff x(x+7) \leqslant 0. \end{aligned}$$

De plus, $\sqrt{33} < \sqrt{36} = 6$ donc $x_2 > (-5-6)/2 = -11/2 > -7$. D'où le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		-7		x_2		0		$+\infty$
$x + 7$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x(x+7)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

On en déduit que dans le cas où $x \in]-\infty, x_2]$:

$$(I_1) \iff x \in [-7, x_2].$$

- <u>2e cas</u> : $x \in [x_2, -1]$. Alors :

$$\begin{aligned}(I_1) &\iff -(x^2+5x-2) \leqslant -(2x+2)\\ &\iff x^2+3x-4 \geqslant 0.\end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25 > 0$ qui admet pour racines $(-3+\sqrt{25})/2 = 1$ et $(-3-\sqrt{5})/2 = -4$. Puisque $x_2 < -5 < -4$, on a le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		x_2		-4		-1		1		$+\infty$
x_2+3x-4		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

On en déduit que dans le cas où $x \in [x_2, -1]$:

$$(I_1) \iff x \in [x_2, -4].$$

- <u>3e cas</u> : $x \in [-1, x_1]$. Alors :

$$\begin{aligned}(I_1) &\iff -(x^2+5x-2) \leqslant 2x+2\\ &\iff x^2+7x \geqslant 0\\ &\iff x(x+7) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Puisque $x_1 > 0$, on a en reprenant le tableau des signes obtenu dans le 1er cas :

x	$-\infty$		-7		-1		0		x_1		$+\infty$
$x(x+7)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	

On en déduit que dans le cas où $x \in [-1, x_1]$:

$$(I_1) \iff x \in [0, x_1].$$

- <u>4e cas</u> : $x \in [x_1, +\infty[$. Alors :

$$\begin{aligned}(I_1) &\iff x^2+5x-2 \leqslant 2x+2\\ &\iff x^2+3x-4 \leqslant 0.\end{aligned}$$

De plus, $\sqrt{33} < \sqrt{33} = 6$ donc $x_1 < (-5+6)/2 = 1/2 < 1$. D'où en reprenant le tableau des signes obtenu dans le 2e cas :

x	$-\infty$		-4		x_1		1		$+\infty$
x_2+3x-4		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

On en déduit que dans le cas où $x \in [x_1, +\infty[$:

$$(I_1) \iff x \in [x_1, 1].$$

- <u>Conclusion</u>. Finalement, l'ensemble des solutions de (I_1) est :

$$[-7, x_2] \cup [x_2, -4] \cup [0, x_1] \cup [x_1, 1] = \boxed{[-7,-4] \cup [0,1]}.$$

Il est également possible de résoudre (I_1) en utilisant la croissance de la fonction carrée sur $[0,+\infty[$ pour se débarasser des valeurs absolues :

$$\begin{aligned}(I_1) &\iff \left(x^2+5x-2\right)^2 \leqslant (2x+2)^2\\ &\iff \left(x^2+5x-2\right)^2-(2x+2)^2 \leqslant 0\\ &\iff \Big(\left(x^2+5x-2\right)+(2x+2)\Big)\Big(\left(x^2+5x-2\right)-(2x+2)\Big) \leqslant 0\\ &\iff \left(x^2+7x\right)\left(x^2+3x-4\right) \leqslant 0\\ &\iff x(x+7)\left(x^2+3x-4\right) \leqslant 0.\end{aligned}$$

Puis il suffit d'étudier le signe de $f : x \mapsto x(x+7)\left(x^2+3x-4\right)$.

(I_2) $x^{\left(x^2\right)} > (x^x)^2$

▶ Puisque les exposants x^2 et x sont des nombres réels, on a d'après la définition des puissances :

$$x^{\left(x^2\right)} = \exp\left(x^2\ln(x)\right) \quad \text{et} \quad (x^x)^2 = \Big(\exp\left(x\ln(x)\right)\Big)^2 = \exp\left(2x\ln(x)\right).$$

Ainsi l'inéquation (I_2) est bien définie seulement pour $x>0$ et on a :

$$\begin{aligned}(I_2) &\iff \exp\left(x^2\ln(x)\right) > \exp\left(2x\ln(x)\right)\\ &\iff x^2\ln(x) > 2x\ln(x) \quad \text{car la fonction exp est strictement croissante}\\ &\iff \left(x^2-2x\right)\ln(x) > 0\\ &\iff x\,(x-2)\ln(x) > 0.\end{aligned}$$

On étudie le signe de la fonction $f : x \mapsto x(x-2)\ln(x)$ sur $]0,+\infty[$.

x	0		1		2		$+\infty$
x	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que l'ensemble des solutions de (I_2) est $\boxed{]0,1[\cup]2,+\infty[}$.

(I_3) $\left\lfloor 2x+\sqrt{x-1}\right\rfloor = 3$

▶ L'équation (I_3) est bien définie seulement pour $x-1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 1$. D'après la définition de la partie entière, on a :

$$(I_3) \iff 3 \leqslant 2x+\sqrt{x-1} < 4 \iff \Big(\underbrace{\sqrt{x-1} \geqslant 3-2x}_{1^{\text{re}}\text{ inéquation}} \text{ et } \underbrace{\sqrt{x-1} < 4-2x}_{2^{\text{e}}\text{ inéquation}}\Big).$$

Attention avant d'élever au carré pour simplifier la racine : il faut d'abord isoler la racine d'un côté de l'inéquation (sinon elle ne se simplifie pas) puis vérifier que l'autre côté de l'inéquation est positif pour pouvoir utiliser la croissance de la fonction carrée sur $[0,+\infty[$.

- 1re inéquation. On a : $3-2x \geqslant 0 \iff x \leqslant 3/2$. On raisonne par disjonction de cas.

— *1^er cas* : $x \in [1, 3/2]$. Alors :

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1} \geqslant 3-2x &\iff x-1 \geqslant (3-2x)^2 \\ &\qquad \text{car la fonction carrée est strictement croissante sur } [0,+\infty[\\ &\iff x-1 \geqslant 9-12x+4x^2 \\ &\iff 4x^2-13x+10 \leqslant 0.\end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = (-13)^2 - 4 \times 4 \times 10 = 9 > 0$ qui admet pour racines $(13+\sqrt{9})/(2\times 4) = 2$ et $(13-\sqrt{9})/(2\times 4) = 5/4$. On a le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{4}$		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
$4x^2-13x+10$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

On en déduit que dans le cas où $x \in [1, 3/2]$:

$$\sqrt{x-1} \geqslant 3-2x \iff x \in \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right].$$

— *2^e cas* : $x \in [3/2, +\infty[$. Alors la 1^re inéquation est toujours vérifiée car $\sqrt{x-1} \geqslant 0 \geqslant 3-2x$.

— *Conclusion de la 1^re inéquation.* On en déduit que :

$$\sqrt{x-1} \geqslant 3-2x \iff x \in \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[= \boxed{\left[\frac{5}{4}, +\infty\right[}.$$

- 2^e inéquation. On a : $4-2x \geqslant 0 \iff x \leqslant 2$. On raisonne par disjonction de cas.

— *1^er cas* : $x \in [1, 2]$. Alors :

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1} < 4-2x &\iff x-1 < (4-2x)^2 \\ &\qquad \text{car la fonction carrée est strictement croissante sur } [0,+\infty[\\ &\iff x-1 < 16-16x+4x^2 \\ &\iff 4x^2-17x+17 > 0.\end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = (-17)^2 - 4 \times 4 \times 17 = 17 > 0$ qui admet pour racines $x_1 = (17+\sqrt{17})/(2\times 4) = (17+\sqrt{17})/8$ et $x_2 = (17-\sqrt{17})/8$. Puisque $\sqrt{17} > \sqrt{16} = 4$, on a $x_1 > (17+4)/8 = 21/8 > 2$ et $x_2 < (17-4)/8 = 13/8 < 2$. De plus, $\sqrt{17} < \sqrt{25} = 5$ donc $x_2 > (17-5)/8 = 3/2 > 1$. D'où le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		1		x_2		2		x_1		$+\infty$
$4x^2-17x+17$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

On en déduit que dans le cas où $x \in [1, 2]$:

$$\sqrt{x-1} < 4-2x \iff x \in [1, x_2[.$$

— *2^e cas* : $x \in [2, +\infty[$. Alors la 2^e inéquation n'est jamais vérifiée car $\sqrt{x-1} \geqslant 0 \geqslant 4-2x$.

— *Conclusion de la 2^e inéquation.* On en déduit que :

$$\sqrt{x-1} < 4-2x \iff x \in [1, x_2[\cup \emptyset = \boxed{[1, x_2[}.$$

- Conclusion. Puisque $x_2 > 3/2 > 5/4 > 1$, on en déduit que l'ensemble des solutions (I_3) est :

$$\left[\frac{5}{4}, +\infty\right[\cap [1, x_2[= \left[\frac{5}{4}, x_2\right[= \boxed{\left[\frac{5}{4}, \frac{17-\sqrt{17}}{8}\right[}.$$

(I_4) $\sin(7x)+\sin(3x)<0$

▶ L'inéquation (I_4) est bien définie pour tout $x\in\mathbb{R}$. On a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\sin(7x)+\sin(3x) &= \operatorname{Im}\left(e^{i7x}+e^{i3x}\right)\\
&= \operatorname{Im}\left(2\cos\left(\frac{7x-3x}{2}\right)e^{i\frac{7x+3x}{2}}\right) \quad \text{en factorisant par l'angle moitié}\\
&= \operatorname{Im}\left(2\cos(2x)\Big[\cos(5x)+i\sin(5x)\Big]\right)\\
&= 2\cos(2x)\sin(5x).
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$(I_4) \iff \Big(\cos(2x)>0 \text{ et } \sin(5x)<0\Big) \text{ ou } \Big(\cos(2x)<0 \text{ et } \sin(5x)>0\Big).$$

Or on a d'après le cercle trigonométrique :

$$\begin{aligned}
\cos(2x)>0 &\iff 2x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right[\\
&\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{2}+2k\pi<2x<\frac{\pi}{2}+2k\pi\\
&\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ -\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{4}+k\pi\\
&\iff x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\right[\\
\text{et}\quad \sin(5x)>0 &\iff 5x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]0+2k\pi,\pi+2k\pi\right[\\
&\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ 2k\pi<5x<\pi+2k\pi\\
&\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ \frac{2k\pi}{5}<x<\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}\\
&\iff x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]\frac{2k\pi}{5},\frac{\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}\right[.
\end{aligned}$$

On obtient donc le tableau des signes suivant entre 0 et 2π :

x	0		$\frac{\pi}{5}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{2\pi}{5}$		$\frac{3\pi}{5}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{4\pi}{5}$		π		$\frac{6\pi}{5}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{7\pi}{5}$		$\frac{8\pi}{5}$		$\frac{7\pi}{4}$		$\frac{9\pi}{5}$		2π
$\cos(2x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\sin(5x)$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0

On en déduit que l'ensemble des solutions de (I_4) est :

$$\boxed{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\begin{array}{c}\left]\frac{\pi}{5}+2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi\right[\cup\left]\frac{2\pi}{5}+2k\pi,\frac{3\pi}{5}+2k\pi\right[\\ \cup\left]\frac{3\pi}{5}+2k\pi,\frac{4\pi}{5}+2k\pi\right[\cup\left]\pi+2k\pi,\frac{6\pi}{5}+2k\pi\right[\cup\left]\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\frac{7\pi}{5}+2k\pi\right[\\ \cup\left]\frac{8\pi}{5}+2k\pi,\frac{7\pi}{4}+2k\pi\right[\cup\left]\frac{9\pi}{5}+2k\pi,\pi+2k\pi\right[\end{array}\right)}$$

Il faut savoir écrire ce type d'ensembles à l'aide d'une union infinie d'intervalles.

(I_5) $\dfrac{2x+m}{x-1} < 1$ *où* $m \in \mathbb{R}$ *est un paramètre fixé.*

▶ L'inéquation (I_5) est bien définie seulement pour $x-1 \neq 0 \iff x \neq 1$. On a :

$$\begin{aligned}(I_5) &\iff \frac{2x+m}{x-1} - 1 < 0\\ &\iff \frac{2x+m-(x-1)}{x-1} < 0\\ &\iff \frac{x+(m+1)}{x-1} < 0.\end{aligned}$$

On étudie le signe de la fonction $f : x \mapsto \frac{x+(m+1)}{x-1}$:

$$\begin{cases} x+(m+1) > 0 \iff x > -(m+1), \\ x-1 > 0 \iff x > 1. \end{cases}$$

On raisonne par disjonction de cas pour dresser le tableau des signes de la fonction f.

- 1[er] cas : $-(m+1) < 1 \iff m > -2$. On obtient alors le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		$-(m+1)$		1		$+\infty$
$x+(m+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

  On en déduit que dans le cas où $m > -2$:

$$(I_5) \iff \Big]-(m+1), 1\Big[.$$

- 2[e] cas : $-(m+1) = 1 \iff m = -2$. Alors (I_5) n'est jamais vérifiée car :

$$\frac{x+(m+1)}{x-1} = \frac{x+(-2+1)}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1.$$

- 3[e] cas : $-(m+1) > 1 \iff m < -2$. On obtient alors le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		1		$-(m+1)$		$+\infty$
$x+(m+1)$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

  On en déduit que dans le cas où $m < -2$:

$$(I_5) \iff \Big]1, -(m+1)\Big[.$$

- Conclusion. Finalement, l'ensemble des solutions de (I_5) est :

$$\boxed{\begin{cases}]-(m+1), 1[& \text{si } m > -2 \\ \emptyset & \text{si } m = -2 \\ ]1, -(m+1)[& \text{si } m < -2 \end{cases}}.$$

Problème 2

On considère l'ensemble suivant :

$$E = \left\{7k + 8\ell \,|\, (k, \ell) \in \mathbb{N}^2\right\}.$$

1. (a) *Montrer que 8 et 37 appartiennent à E.*

▶ On a $8 = 7 \times 0 + 8 \times 1$ donc $\boxed{8 \in E}$ pour les valeurs de paramètres $(k, \ell) = (0, 1)$. De même, $37 = 7 \times 3 + 8 \times 2$ donc $\boxed{37 \in E}$ pour les valeurs de paramètres $(k, \ell) = (3, 2)$

(b) *Montrer que 1 et 19 n'appartiennent pas à E.*

▶ Par l'absurde, on suppose que $1 \in E$. Alors il existe des valeurs de paramètres $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ telles que $1 = 7k + 8\ell$. Donc $7k = 1 - 8\ell \leqslant 1$ car $\ell \geqslant 0$. On en déduit que $k \leqslant 1/7$ donc que $k = 0$ car $k \in \mathbb{N}$. Ainsi $1 = 7 \times 0 + 8\ell$ donc $\ell = 1/8$ ce qui est absurde car $\ell \in \mathbb{N}$. Par conséquent, on a bien prouvé par l'absurde que $\boxed{1 \notin E}$. De même, on suppose qu'il existe des valeurs de paramètres $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ telles que $19 = 7k + 8\ell$. Donc $7k = 19 - 8\ell \leqslant 19$. On en déduit que $k \leqslant 19/7$ donc que $k = 0$, $k = 1$ ou $k = 2$. Or $k = 0$ implique $\ell = (19 - 7 \times 0)/8 = 19/8$, $k = 1$ implique $\ell = (19 - 7 \times 1)/8 = 3/4$ et $k = 2$ implique $\ell = (19 - 7 \times 2)/8 = 5/8$. Tous les cas sont absurdes, par conséquent on a bien prouvé que $\boxed{19 \notin E}$.

(c) *Déterminer un autre exemple d'entier naturel appartenant à E et un autre exemple d'entier naturel n'appartenant pas à E.*

▶ Par exemple $\boxed{0 \in E}$ car $7 \times 0 + 8 \times 0 = 0$ et $\boxed{2 \notin E}$ car il n'existe pas $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ tel que $7k + 8\ell = 2$ (sinon $k \leqslant 2/7$ donc $k = 0$ et $\ell = 2/8 = 1/4$ ce qui est absurde).

2. (a) *Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, il existe deux entiers naturels q et r tels que $r \leqslant 6$ et $n = 7q + r$, c'est-à-dire :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists (q, r) \in \mathbb{N} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad n = 7q + r.$$

▶ Initialisation. Pour le rang $n = 0$, on cherche $(q, r) \in \mathbb{N} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tel que $n = 7q + r$. Or $0 = 7 \times 0 + 0$. Il suffit donc de poser $q = 0$ et $r = 0$. Ainsi, le résultat est vrai au rang $n = 0$.
Hérédité. On suppose que le résultat est vrai pour un rang $n \in \mathbb{N}$ fixé. Donc on sait qu'il existe $(q, r) \in \mathbb{N} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tel que $n = 7q + r$. On veut montrer que le résultat est vrai au rang $n + 1$, donc on cherche $(q', r') \in \mathbb{N} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tel que $n + 1 = 7q' + r'$.

> *Attention aux notations. Les deux entiers du rang n ne sont pas forcément les mêmes que les deux entiers du rang $n + 1$. Il faut donc utiliser des notations différentes. Par exemple (q, r) pour le rang n et (q', r') pour le rang $n + 1$, ou inversement, ou n'importe quelle autre notation du moment qu'elles sont différentes aux rangs n et $n + 1$.*

On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse. On a d'après l'hypothèse de récurrence :

$$n + 1 = (7q + r) + 1 = 7 \underbrace{q}_{=q'} + \underbrace{r + 1}_{=r'}.$$

On a bien $q' = q \in \mathbb{N}$ mais on veut que $r' = r + 1 \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Si $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ alors on peut poser $r' = r + 1$. Si $r = 6$ alors :

$$n + 1 = 7q + 6 + 1 = 7q + 7 = 7(q + 1) = 7 \underbrace{(q + 1)}_{=q'} + \underbrace{0}_{=r'}.$$

Synthèse. On pose $\boxed{(q', r') = (q, r + 1)}$ si $r \neq 6$ et $\boxed{(q', r') = (q + 1, 0)}$ si $r = 6$. D'après l'analyse, on a trouvé dans les deux cas $q' \in \mathbb{N}$ et $r' \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tels que $n + 1 = 7q' + r'$. Par conséquent, on a prouvé que le résultat est vrai au rang $n + 1$ s'il est vrai au rang n. Et cette implication est vraie pour tout rang $n \in \mathbb{N}$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists (q, r) \in \mathbb{N} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad n = 7q + r}.$$

(b) *Dans cette question, on suppose qu'il existe quatre entiers naturels q_1, r_1, q_2 et r_2 tels que :*

$$(r_1, r_2) \in \{0,1,2,3,4,5,6\}^2 \quad \text{et} \quad 7q_1 + r_1 = 7q_2 + r_2.$$

Montrer que $q_1 = q_2$ et $r_1 = r_2$. Que peut-on en déduire pour le résultat de la question 2(a) ?

▶ On a :

$$7q_1 + r_1 = 7q_2 + r_2 \quad \text{donc} \quad 7(q_1 - q_2) = 7q_1 - 7q_2 = r_2 - r_1.$$

Puisque $(r_1, r_2) \in \{0,1,2,3,4,5,6\}^2$, on en déduit que

$$7(q_1 - q_2) = r_2 - r_1 \in \{-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}.$$

Attention aux manipulations d'inégalités. On ne peut pas soustraire directement les inégalités $0 \leqslant r_2 \leqslant 6$ et $0 \leqslant r_1 \leqslant 6$. En effet, si on multiplie la 2e inégalité par -1, on obtient $-6 \leqslant -r_1 \leqslant 0$. Puis en additionnant avec la 1re inégalité : $-6 = 0 - 6 \leqslant r_2 - r_1 \leqslant 6 + 0 = 6$. D'où le résultat.

Puisque le seul multiple de 7 compris entre -6 et 6 est 0, on en déduit que $7(q_1 - q_2) = r_1 - r_2 = 0$. Donc $\boxed{q_1 = q_2}$ et $\boxed{r_1 = r_2}$. Ainsi, on vient de démontrer par l'absurde que, pour tout entier naturel n, $\boxed{\text{le couple d'entiers } (q, r) \text{ trouvé à la question précédente est unique}}$.

3. (a) *À l'aide du résultat de la question 2(a), montrer que tout entier naturel supérieur ou égal à 42 appartient à E. Indication : on pourra utiliser que $r = -7r + 8r$.*

▶ On fixe un entier naturel $n \geqslant 42$. Montrons que $n \in E$. On cherche donc des valeurs de paramètres $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ telles que $n = 7k + 8\ell$. On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse. D'après le résultat de la question 2(a), on sait qu'il existe $(q, r) \in \mathbb{N} \times \{0,1,2,3,4,5,6\}$ tel que $n = 7q + r$. On a donc :

$$n = 7q + r = 7q - 7r + 8r = 7\underbrace{(q - r)}_{=k} + 8\underbrace{r}_{=\ell}.$$

Synthèse. On pose $\boxed{(k, \ell) = (q - r, r)}$. On a bien $n = 7k + 8\ell$ d'après l'analyse et $\ell = r \in \mathbb{N}$. De plus, $k = q - r \in \mathbb{Z}$. Montrons que $q - r \geqslant 0$ donc que $k \in \mathbb{N}$.

N'oubliez pas de justifier que $q - r \geqslant 0$. Il est nécessaire que le paramètre k soit positif pour prouver que $n \in E$. Par exemple pour $(k, \ell) = (-1, 1)$, on obtient $1 = 7 \times (-1) + 8 \times 1$ mais $1 \notin E$.

Par l'absurde, on suppose que $q - r \leqslant -1$. Puisque $r \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$, on a :

$$n = 7\underbrace{(q - r)}_{\leqslant -1} + 8\underbrace{r}_{\leqslant 6} \leqslant -7 + 8 \times 6 = 41.$$

Ce qui est absurde car $n \geqslant 42$. On en déduit que $q - r \geqslant 0$ donc que $k = q - r \in \mathbb{N}$. Finalement, on a bien trouvé des valeurs de paramètres $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ telles que $n = 7k + 8\ell$. Par conséquent, $n \in E$. Puisque ceci est vrai pour un entier naturel $n \geqslant 42$ quelconque, c'est vrai pour tout entier naturel $n \geqslant 42$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 42 \implies n \in E}.$$

(b) *Déterminer les éléments de E strictement inférieurs à 42 et montrer qu'il y en a 21.*

▶ Il suffit de dresser la liste de toutes les valeurs de paramètres $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$ telles que $7k + 8\ell < 42$.

— Pour $k = 0$, on obtient pour les valeurs successives du paramètre ℓ :

$$7 \times 0 + 8 \times 0 = \boxed{0}, \quad 7 \times 0 + 8 \times 1 = \boxed{8}, \quad 7 \times 0 + 8 \times 2 = \boxed{16},$$
$$7 \times 0 + 8 \times 3 = \boxed{24}, \quad 7 \times 0 + 8 \times 4 = \boxed{32} \quad \text{et} \quad 7 \times 0 + 8 \times 5 = \boxed{40}.$$

Puis pour $\ell \geqslant 6$, on a : $7k + 8\ell \geqslant 7 \times 0 + 8 \times 6 = 48 > 42$.

— Pour $k=1$, on obtient pour les valeurs successives du paramètre ℓ :

$$7\times 1+8\times 0=\boxed{7},\quad 7\times 1+8\times 1=\boxed{15},\quad 7\times 1+8\times 2=\boxed{23},$$
$$7\times 1+8\times 3=\boxed{31},\quad \text{et}\quad 7\times 1+8\times 4=\boxed{39}.$$

Puis pour $\ell\geqslant 5$, on a : $7k+8\ell\geqslant 7\times 1+8\times 5=47>42$.

— Pour $k=2$, on obtient pour les valeurs successives du paramètre ℓ :

$$7\times 2+8\times 0=\boxed{14},\quad 7\times 2+8\times 1=\boxed{22},\quad 7\times 2+8\times 2=\boxed{30}$$
$$\text{et}\quad 7\times 2+8\times 3=\boxed{38}.$$

Puis pour $\ell\geqslant 4$, on a : $7k+8\ell\geqslant 7\times 2+8\times 4=46>42$.

— Pour $k=3$, on obtient pour les valeurs successives du paramètre ℓ :

$$7\times 3+8\times 0=\boxed{21},\quad 7\times 3+8\times 1=\boxed{29}\quad \text{et}\quad 7\times 3+8\times 2=\boxed{37}.$$

Puis pour $\ell\geqslant 3$, on a : $7k+8\ell\geqslant 7\times 3+8\times 3=45>42$.

— Pour $k=4$, on obtient pour les valeurs successives du paramètre ℓ :

$$7\times 4+8\times 0=\boxed{28}\quad \text{et}\quad 7\times 4+8\times 1=\boxed{36}.$$

Puis pour $\ell\geqslant 2$, on a : $7k+8\ell\geqslant 7\times 4+8\times 2=44>42$.

— Pour $k=5$, on obtient pour les valeurs successives du paramètre ℓ :

$$7\times 5+8\times 0=\boxed{35}.$$

Puis pour $\ell\geqslant 1$, on a : $7k+8\ell\geqslant 7\times 5+8\times 1=43>42$.

— Puis pour $k\geqslant 6$, on a : $7k+8\ell\geqslant 7\times 6+8\times 0=42$.

Finalement, on obtient $\boxed{21 \text{ éléments de } E \text{ strictement inférieurs à } 42}$ qui sont :

$$\left\{0,8,16,24,32,40,7,15,23,31,39,14,22,30,38,21,29,37,28,36,35\right\}$$
$$=\boxed{\left\{0,7,8,14,15,16,21,22,23,24,28,29,30,31,32,35,36,37,38,39,40\right\}}.$$

(c) En déduire tous les éléments de E.

► D'après les résultats des deux questions précédentes, on en déduit que :

$$E=\left\{n\in\mathbb{N}\mid n\geqslant 42\right\}\cup\left\{0,7,8,14,15,16,21,22,23,24,28,29,30,31,32,35,36,37,38,39,40\right\}$$
$$=\boxed{\left\{0,7,8,14,15,16,21,22,23,24,28,29,30,31,32,35,36,37,38,39,40,42,43,44,45,46,\dots\right\}}.$$

4. On pose $A=\left\{p\in\mathbb{N}\mid \forall n\in\mathbb{N},\, n\geqslant p \implies n\in E\right\}$.

Il faut bien comprendre l'ensemble A pour pouvoir répondre aux questions suivantes. Il s'agit de l'ensemble des entiers naturels p tels que pour tout entier naturel n, si $n\geqslant p$ alors n appartient à E. Ainsi, A est l'ensemble des entiers naturels p tels que tous les entiers supérieurs ou égaux à p appartiennent à E. Par exemple $42\in A$ d'après le résultat de la question 3(a) alors que $21\notin A$ puisque par exemple $25\notin E$ d'après le résultat de la question 3(b).

(a) Dire, sans justifier, si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse.

i. $\forall p \in A,\ p \in E$

▶ C'est $\boxed{\text{vrai}}$.

En effet, si $p \in A$ alors tout entier supérieur ou égal à p appartient à E, donc en particulier p appartient à E.

ii. $\exists p \in \mathbb{N},\ p \in A$

▶ C'est $\boxed{\text{vrai}}$.

Cette assertion revient à dire que A est non vide ce qui est le cas puisque $42 \in A$ d'après le résultat de la question 3(a).

iii. $\forall p \in A,\ \exists n \geqslant p,\ n \in E$

▶ C'est $\boxed{\text{vrai}}$.

En effet, si $p \in A$ alors il existe au moins un entier supérieur ou égal à p qui appartient à E puisque tout entier supérieur ou égal à p appartient à E. Il suffit par exemple de poser $n = p$.

iv. $\forall p \in A,\ \exists n > p,\ n \in E$

▶ C'est $\boxed{\text{vrai}}$.

C'est la même justification que l'assertion précédente. Il suffit par exemple de poser $n = p + 1$.

v. $\forall p \in A,\ p + 1 \in A$

▶ C'est $\boxed{\text{vrai}}$.

En effet, si $p \in A$ alors tout entier supérieur ou égal à p appartient à E, donc en particulier tout entier supérieur ou égal à $p + 1$ appartient à E, ce qui revient à dire que $p + 1 \in A$.

vi. $\forall p \in A,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \implies n \in A$

▶ C'est $\boxed{\text{vrai}}$.

C'est la même justification que l'assertion précédente : si $p \in A$ et $n \geqslant p$ alors tout entier supérieur ou égal à n appartient à E puisque tout entier supérieur ou égal à p appartient à E.

vii. $\forall p \in \mathbb{N},\ (p \in E \text{ et } p + 1 \in A) \implies p \in A$

▶ C'est $\boxed{\text{vrai}}$.

Si $p + 1 \in A$ alors tout entier supérieur ou égal à $p + 1$ appartient à E. Si, de plus, $p \in E$ alors tout entier supérieur ou égal à p appartient à E, ce qui revient à dire que $p \in A$.

viii. $\forall p \in \mathbb{N},\ p \notin A \iff (\exists n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \text{ et } n \notin E)$

▶ C'est $\boxed{\text{vrai}}$.

Par définition de A, on a :

$$p \in A \iff (\forall n \in \mathbb{N},\ \underbrace{n \geqslant p \implies n \in E}_{non(n\geqslant p)\ ou\ n\in E}).$$

En passant à la négation, on en déduit que :

$$\begin{aligned} p \notin A &\iff non(\forall n \in \mathbb{N},\ n < p \text{ ou } n \in E) \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N},\ non(n < p \text{ ou } n \in E) \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N},\ non(n < p) \text{ et } non(n \in E) \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N},\ n \geqslant p \text{ et } n \notin E. \end{aligned}$$

ix. $\forall m \in \mathbb{N},\ m \notin E \implies (\forall p \in A,\ p > m)$

▶ C'est $\boxed{\text{vrai}}$.

S'il existe $p \in A$ tel que $p \leqslant m$ alors $m \in E$ puisque tout entier supérieur ou égal à p appartient à E. Autrement dit :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ (\exists p \in A,\ p \leqslant m) \implies m \in E.$$

En passant à la contraposée, on en déduit que :

$$\begin{aligned} &\forall m \in \mathbb{N},\ non(m \in E) \implies non(\exists p \in A,\ p \leqslant m) \\ \iff &\forall m \in \mathbb{N},\ m \notin E \implies (\forall p \in A,\ p > m). \end{aligned}$$

x. $\exists m \in \mathbb{N},\ m \notin E$ *et* $(\forall p \in \mathbb{N},\ p > m \implies p \in A)$

▶ C'est $\boxed{\text{vrai}}$.

Tout entier supérieur ou égal à 42 appartient à E d'après le résultat de la question 3(a). Donc tout entier strictement supérieur à 41 appartient à A. De plus, $41 \notin E$ d'après le résultat de la question 3(b). L'assertion est donc vraie puisqu'il suffit de poser $m = 41$.

(b) À l'aide du résultat de la question 3(c), déterminer tous les éléments de A.

▶ D'après le résultat de la question 3(a), on a :

$$\left\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 42\right\} \subset A.$$

De plus, puisque $41 \notin E$ d'après le résultat de la question 3(b), on a :

$$A \subset \left\{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant 42\right\}.$$

Par double inclusion, on en déduit que :

$$\boxed{A = \left\{42, 43, 44, 45, 46, \dots\right\}}.$$

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \textit{et} \quad \forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 7u_{n+1} - 12u_n.$$

Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = a.b^n + c^n$.

▶ On cherche $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\forall n \geqslant 0,\ u_n = a.b^n + c^n.$$

On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse. On veut pour $n = 0$:

$$0 = u_0 = a.b^0 + c^0 = a + 1 \quad \text{donc} \quad a = -1.$$

De même, on veut pour $n = 1$:

$$1 = u_1 = a.b^1 + c^1 = -b + c \quad \text{donc} \quad c = b + 1.$$

De plus, la relation de récurrence donne pour $n = 0$:

$$u_2 = 7u_1 - 12u_0 = 7 \times 1 - 12 \times 0 = 7.$$

On veut donc pour $n = 2$:

$$7 = u_2 = a.b^2 + c^2 = -b^2 + (b+1)^2 = 2b + 1 \quad \text{donc} \quad b = 3.$$

Synthèse. On pose $\boxed{a = -1,\ b = 3 \text{ et } c = 4}$. Montrons que $u_n = a.b^n + c^n = -3^n + 4^n$ pour tout entier $n \geqslant 0$. On raisonne par récurrence double.
Initialisation. On a :

$$-3^0 + 4^0 = -1 + 1 = 0 = u_0 \quad \text{et} \quad -3^1 + 4^1 = -3 + 4 = 1 = u_1$$

donc le résultat est vrai aux rangs $n = 0$ et $n = 1$.
Hérédité. On suppose que $u_n = -3^n + 4^n$ et $u_{n+1} = -3^{n+1} + 4^{n+1}$ pour un rang $n \geqslant 0$ fixé. Alors :

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 7u_{n+1} - 12u_n \quad \text{d'après la relation de récurrence de l'énoncé} \\
&= 7\left(-3^{n+1} + 4^{n+1}\right) - 12\left(-3^n + 4^n\right) \quad \text{d'après les hypothèses de récurrence} \\
&= 7\left(-3 \times 3^n + 4 \times 4^n\right) + 12 \times 3^n - 12 \times 4^n \\
&= -21 \times 3^n + 28 \times 4^n + 12 \times 3^n - 12 \times 4^n \\
&= -9 \times 3^n + 16 \times 4^n \\
&= -3^2 \times 3^n + 4^2 \times 4^n \\
&= -3^{n+2} + 4^{n+2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, si le résultat est vrai aux rangs n et $n+1$ alors il est vrai au rang $n+2$. De plus, cette implication est vraie pour tout rang $n \geqslant 0$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence double, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \geqslant 0,\ u_n = -3^n + 4^n}.$$

Finalement, on a bien trouvé $\boxed{(a, b, c) = (-1, 3, 4)}$ tel que pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = a.b^n + c^n$.