Corrigé du DS n° 1 de mathématiques

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-7}{4-x}$. Déterminer les ensembles suivants :

$$\mathscr{E}_1 = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) \in]2,4] \right\} \quad \textit{et} \quad \mathscr{E}_2 = \left\{ f(x) \;\middle|\; x \in]5,13[\right\}.$$

► La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}, \quad f'(x) = \frac{2x(4-x) - (x^2-7) \times (-1)}{(4-x)^2} = \frac{-x^2+8x-7}{(4-x)^2}.$$

On reconnaît au numérateur un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 8^2 - 4 \times (-1) \times (-7) = 36 > 0$. Donc le numérateur s'annule en $(-8+\sqrt{36})/(-2) = 1$ et en $(-8-\sqrt{36})/(-2) = 7$. De plus, il est strictement positif sur $]1,7[$ et strictement négatif sur $]-\infty,1[\cup]7,+\infty[$. Puisque $(4-x)^2 > 0$ pour tout $x \neq 4$, on en déduit le tableau des variations de f.

x	$-\infty$	$-2-3\sqrt{3}$	-5	1	3	$-2+3\sqrt{3}$	4	5	7	13	$+\infty$
$f'(x)$		$-$		0		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	4 ↘	2 ↘	-2 ↗	2 ↗	4 ↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$ ↗	-18 ↗	-14 ↘	-18 ↘	$-\infty$

car :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - \frac{7}{x}}{\frac{4}{x} - 1} = +\infty \quad \Bigg| \quad f(1) = \frac{1^2-7}{4-1} = -2 \quad \Bigg| \quad \lim_{x\to4^-} f(x) = \lim_{x\to4^-} \frac{x^2-7}{4-x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - \frac{7}{x}}{\frac{4}{x} - 1} = -\infty \quad \Bigg| \quad f(7) = \frac{7^2-7}{4-7} = -14 \quad \Bigg| \quad \lim_{x\to4^+} f(x) = \lim_{x\to4^+} \frac{x^2-7}{4-x} = -\infty$$

On a $f(5) = \dfrac{5^2-7}{4-5} = -18$ et $f(13) = \dfrac{13^2-7}{4-13} = \dfrac{162}{-9} = -18$. On déduit du tableau des variations de f que :

$$\mathscr{E}_2 = \left\{ f(x) \mid x \in]5,13[\right\} = \boxed{]-18,-14]}.$$

Soyez précis avec les bornes des intervalles : -18 est exclus car $]5,13[$ est un intervalle ouvert mais -14 est inclus car $7 \in]5,13[$.

Pour déterminer $\mathscr{E}_1$, on résout les deux équations suivantes :

- $f(x) = 2 \iff \dfrac{x^2-7}{4-x} = 2 \iff x^2 - 7 = 2(4-x) \iff x^2 + 2x - 15 = 0$
  On obtient une équation du second degré de discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-15) = 64 > 0$ qui admet pour solutions $(-2+\sqrt{64})/2 = 3$ et $(-2-8)/2 = -5$.

- $f(x)=4 \iff \dfrac{x^2-7}{4-x}=4 \iff x^2-7=4(4-x) \iff x^2+4x-23=0$
  On obtient une équation du second degré de discriminant $\Delta=4^2-4\times 1\times(-23)=108>0$ qui admet pour solutions $(-4+\sqrt{108})/2=(-4+\sqrt{4\times 9\times 3})/2=(-4+6\sqrt{3})/2=-2+3\sqrt{3}$ et $(-4-\sqrt{108})/2=-2-3\sqrt{3}$.

De plus, $\frac{25}{9}<3<4$ donc $\frac{5}{3}<\sqrt{3}<2$ (car la fonction racine carrée est strictement croissante), par conséquent $-2+3\sqrt{3}\in]3,4[$ et $-2-3\sqrt{3}\in]-8,-7[$.

Il faut savoir encadrer rapidement des expressions avec des racines afin de les placer correctement dans un tableau des signes ou des variations. Ici, on a besoin de justifier que :

$$-2-3\sqrt{3}<-5<1<3<-2+3\sqrt{3}<4.$$

On déduit du tableau des variations de f que :

$$\mathscr{E}_1=\Big\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\in]2,4]\Big\}=\boxed{\Big[-2-3\sqrt{3},-5\Big[\cup\Big]3,-2+3\sqrt{3}\Big]}.$$

Problème 1

*Pour toute partie A de $\mathbb{R}$ et tout réel $a\in A$, on dit que a est **un point isolé** de A si la propriété suivante est vérifiée :*

$$\exists\varepsilon>0,\quad A\cap]a-\varepsilon,a+\varepsilon[=\{a\}. \qquad (*)$$

1. *Soit $n\in\mathbb{N}$. Montrer que n est un point isolé de $\mathbb{N}$.*

   ▶ Pour montrer que n est un point isolé de $\mathbb{N}$, il suffit de prouver que la propriété $(*)$ est vérifiée, c'est-à-dire que :

   $$\exists\varepsilon>0,\quad \mathbb{N}\cap]n-\varepsilon,n+\varepsilon[=\{n\}.$$

   On raisonne par analyse-synthèse.
   Analyse. On cherche un réel $\varepsilon>0$ tel que $\mathbb{N}\cap]n-\varepsilon,n+\varepsilon[=\{n\}$. Si $\varepsilon>1$, alors les entiers $n-1$ et $n+1$ appartiennent à l'intervalle $]n-\varepsilon,n+\varepsilon[$ et donc $\mathbb{N}\cap]n-\varepsilon,n+\varepsilon[\neq\{n\}$. Par contre, si $\varepsilon<1$, alors l'intervalle $]n-\varepsilon,n+\varepsilon[$ ne contient pas d'autres entiers que n et donc $\mathbb{N}\cap]n-\varepsilon,n+\varepsilon[=\{n\}$.
   Synthèse. On pose $\boxed{\varepsilon=\frac{1}{2}}$. Alors $\mathbb{N}\cap]n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}[=\{n\}$ car $\frac{1}{2}<1$. On a bien trouvé un réel $\varepsilon>0$ tel que $\mathbb{N}\cap]n-\varepsilon,n+\varepsilon[=\{n\}$. Par conséquent, la propriété $(*)$ est vérifiée et donc $\boxed{n \text{ est un point isolé de } \mathbb{N}}$.

2. *Existe-t-il un point de $\mathbb{Z}$ qui n'est pas isolé ? Justifier.*

   ▶ Soit $n\in\mathbb{Z}$. En raisonnant comme à la question précédente, on a $\mathbb{Z}\cap]n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}[=\{n\}$ donc n est un point isolé de $\mathbb{Z}$. Puisque ceci est vrai pour n'importe quel entier $n\in\mathbb{Z}$, on en déduit que tous les points de $\mathbb{Z}$ sont isolés, et donc qu'$\boxed{\text{il n'existe pas de point de } \mathbb{Z} \text{ qui n'est pas isolé}}$.

3. (a) *Écrire la négation de la propriété $(*)$.*

   ▶ On a :

   $$\begin{aligned}&\operatorname{non}\Big(\exists\varepsilon>0,\quad A\cap]a-\varepsilon,a+\varepsilon[=\{a\}\Big)\\ \iff&\boxed{\forall\varepsilon>0,\quad A\cap]a-\varepsilon,a+\varepsilon[\neq\{a\}}.\end{aligned}$$

   (b) *Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer que x n'est pas un point isolé de $\mathbb{R}$.*

   ▶ Pour montrer que x n'est pas un point isolé de $\mathbb{R}$, il suffit de prouver que la propriété $(*)$ n'est pas vérifiée, donc que sa négation est vérifiée, c'est-à-dire, d'après le résultat de la question précédente, que :

   $$\forall\varepsilon>0,\quad \mathbb{R}\cap]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\neq\{x\}.$$

On commence donc par fixer un réel $\varepsilon > 0$. On a :

$$\mathbb{R} \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[=]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\neq \{x\} \quad \text{car }]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\text{ contient une infinité de réels.}$$

Puisque ceci est vrai pour n'importe quel réel $\varepsilon > 0$, on a bien montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{R} \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\neq \{x\}.$$

Par conséquent, la négation de la propriété $(*)$ est vérifiée et donc $\boxed{x \text{ n'est pas un point isolé de } \mathbb{R}}$.

4. (a) *Dans cette question, on fixe un rationnel $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ où $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, un réel $\varepsilon > 0$, et un entier $n \in \mathbb{N}$ supérieur à $2/\varepsilon$. Montrer que :*

$$0 < \left| r - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon \quad \text{où} \quad r = \frac{np+q}{nq} \in \mathbb{Q}.$$

► On a :

$$\left| r - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{np+q}{nq} - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{np+q-np}{nq} \right| = \left| \frac{q}{nq} \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \quad \text{car } n \text{ est positif.}$$

Or $n \geqslant 2/\varepsilon > 0$ donc $\dfrac{1}{n} > 0$ et $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{2/\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. On en déduit bien que :

$$\boxed{0 < \left| r - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon}.$$

(b) *En déduire qu'aucun point de $\mathbb{Q}$ n'est isolé.*

► Puisque $\left| r - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon$ d'après le résultat de la question précédente, on en déduit, d'après les propriétés de la valeur absolue, que $r \in]\frac{p}{q} - \varepsilon, \frac{p}{q} + \varepsilon[$. De plus, $r \in \mathbb{Q}$ et $r \neq \frac{p}{q}$ (car $\left| r - \frac{p}{q} \right| > 0$ d'après le résultat de la question précédente). Par conséquent, l'intervalle $]\frac{p}{q} - \varepsilon, \frac{p}{q} + \varepsilon[$ contient au moins deux rationnels différents : $\frac{p}{q}$ et r. Puisque ceci est vrai pour n'importe quel réel $\varepsilon > 0$, on a montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{Q} \cap \left] \tfrac{p}{q} - \varepsilon, \tfrac{p}{q} + \varepsilon \right[\neq \{\tfrac{p}{q}\}.$$

Par conséquent, la négation de la propriété $(*)$ est vérifiée et donc $\frac{p}{q}$ n'est pas un point isolé de $\mathbb{Q}$. Puisque ceci est vrai pour n'importe quel rationnel $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on en déduit que tous les points de $\mathbb{Q}$ ne sont pas isolés, et donc qu' $\boxed{\text{aucun point de } \mathbb{Q} \text{ n'est isolé}}$.

5. (a) *Soit $B = [1,2] \cup \{0\}$. Prouver que 0 est le seul point isolé de B.*

► On a $[1,2] \cap]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[= \emptyset$ donc $B \cap]0-\frac{1}{2}, 0+\frac{1}{2}[= \{0\}$. Ainsi, on a trouvé un réel $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ tel que $B \cap]0-\varepsilon, 0+\varepsilon[= \{0\}$. On en déduit que $\boxed{0 \text{ est un point isolé de } B}$. Montrons que c'est le seul, c'est-à-dire que les autres points de B ne sont pas isolés. Soit x un autre point de B, donc $x \in [1,2]$. On fixe un réel $\varepsilon > 0$. Alors l'ensemble $[1,2] \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ contient une infinité de réels, donc $B \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\neq \{x\}$. Puisque ceci est vrai pour tout réel $\varepsilon > 0$, on en déduit que x n'est pas un point isolé de B. Puisque ceci est vrai pour tout $x \in [1,2]$, on en déduit finalement que $\boxed{0 \text{ est le seul point isolé de } B}$.

(b) *Soit $C = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$. Prouver que 0 est le seul point non isolé de C.*

►

Question difficile même si pas différente des précédentes. Mais il faut déjà avoir bien compris les questions précédentes, plus simples, avant de l'aborder.

On fixe un réel $\varepsilon > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ supérieur à $2/\varepsilon$. On a $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{2/\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ donc :

$$\frac{1}{n} \in]0-\varepsilon, 0+\varepsilon[.$$

Autrement dit, $C \cap]0-\varepsilon, 0+\varepsilon[\neq \{0\}$ pour tout $\varepsilon > 0$. On en déduit que $\boxed{\text{0 n'est pas un point isolé de } C}$. Montrons que c'est le seul, c'est-à-dire que les autres points de C sont isolés. Soit $\frac{1}{n}$ un autre point de C, où $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé. On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse. On cherche un réel $\varepsilon > 0$ tel que $C \cap]\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon[= \{\frac{1}{n}\}$. Puisque $\frac{1}{n+1}$ est l'élément de C qui précède $\frac{1}{n}$, il faut que ε soit plus petit que la distance entre $\frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire :

$$\varepsilon < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

De même, puis que $\frac{1}{n-1}$ est l'élément de C qui suit $\frac{1}{n}$, il faut que ε soit plus petit que la distance entre $\frac{1}{n-1}$ et $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire :

$$\varepsilon < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n-1)}{(n-1)n} = \frac{1}{(n-1)n}.$$

Il suffit donc que :

$$\varepsilon < \min\left(\frac{1}{n(n+1)}, \frac{1}{(n-1)n}\right) = \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{car } n(n+1) > (n-1)n.$$

Synthèse. On pose $\boxed{\varepsilon = \frac{1}{2n(n+1)}}$. D'après les calcul de l'analyse, on a :

$$C \cap \left]\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon\right[= \left\{\frac{1}{n}\right\}.$$

On en déduit que $\frac{1}{n}$ est un point isolé de C. Puisque ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a bien montré que $\boxed{\text{0 est le seul point non isolé de } C}$.

6. *Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in A$. Démontrer que a est un point isolé de A si et seulement si la propriété suivante est vérifiée :*

$$\exists \varepsilon > 0, \quad A \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon] = \{a\}. \qquad (**)$$

► Pour ne pas confondre la variable muette ε dans la propriété $(*)$ et la variable muette ε dans la propriété $(**)$, on utilise des notations différentes. Montrons que :

$$\begin{aligned} & \exists \varepsilon_1 > 0, \quad A \cap]a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1[= \{a\} \\ \iff & \exists \varepsilon_2 > 0, \quad A \cap [a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2] = \{a\}. \end{aligned}$$

On raisonne par double implication.
1^re implication $\Leftarrow$. On suppose qu'il existe un réel $\varepsilon_2 > 0$ tel que $A \cap [a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2] = \{a\}$. On cherche un réel $\varepsilon_1 > 0$ tel que $A \cap]a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1[= \{a\}$. Or :

$$\{a\} \subset A \cap]a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2[\subset A \cap [a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2] = \{a\}.$$

Donc $A \cap]a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2[= \{a\}$. Par conséquent, il suffit de poser $\boxed{\varepsilon_1 = \varepsilon_2}$.
2^e implication $\Rightarrow$. On suppose qu'il existe un réel $\varepsilon_1 > 0$ tel que $A \cap]a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1[= \{a\}$. On cherche un réel $\varepsilon_2 > 0$ tel que $A \cap [a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2] = \{a\}$.

Attention : contrairement à la première implication, il ne suffit pas de poser $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$. En effet, si $a - \varepsilon_1 \in A$ ou si $a + \varepsilon_1 \in A$, on a $A \cap]a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1[= \{a\}$ mais $A \cap [a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1] \neq \{a\}$. Il faut donc choisir un ε_2 plus petit.

Or :
$$\{a\} \subset A \cap \left[a - \frac{\varepsilon_1}{2}, a + \frac{\varepsilon_1}{2}\right] \subset A \cap]a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1[= \{a\}.$$
Donc $A \cap [a - \frac{\varepsilon_1}{2}, a + \frac{\varepsilon_1}{2}] = \{a\}$. Par conséquent, il suffit de poser $\boxed{\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{2}}$.

Conclusion. Pour double implication, on a montré que les propriétés $(*)$ et $(**)$ sont équivalentes, et donc que $\boxed{a \text{ est un point isolé de } A \text{ si et seulement si la propriété } (**) \text{ est vérifiée}}$.

Exercice 2

Déterminer la partie entière du réel $\alpha = 3\sqrt{5} + \sqrt{10}$ en justifiant votre réponse.

► Par définition de la partie entière, on cherche l'entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant \alpha < n+1$. On raisonne par analyse-synthèse.

Trouver les parties entières de $\sqrt{5}$ et $\sqrt{10}$ ne suffit pas. En effet, on a :
$$\left\lfloor\sqrt{5}\right\rfloor \leqslant \sqrt{5} < \left\lfloor\sqrt{5}\right\rfloor + 1 \quad \text{et} \quad \left\lfloor\sqrt{10}\right\rfloor \leqslant \sqrt{10} < \left\lfloor\sqrt{10}\right\rfloor + 1$$
$$\text{donc} \quad \underbrace{3\left\lfloor\sqrt{5}\right\rfloor + \left\lfloor\sqrt{10}\right\rfloor}_{=n} \leqslant \underbrace{3\sqrt{5} + \sqrt{10}}_{=\alpha} < \underbrace{3\left\lfloor\sqrt{5}\right\rfloor + 3 + \left\lfloor\sqrt{10}\right\rfloor + 1}_{=n+4\neq n+1}.$$
Il faut donc chercher des encadrements de la forme :
$$n_1 \leqslant \sqrt{5} < n_1 + \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad n_2 \leqslant \sqrt{10} < n_2 + \varepsilon_2$$
tels que $3n_1 + n_2 = n$ et $3n_1 + 3\varepsilon_1 + n_2 + \varepsilon_2 = n+1$. Puisqu'on veut $3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1$, il suffit par exemple de chercher des encadrements tels que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{4}$.

Analyse. On cherche un encadrement de $\sqrt{5}$ de la forme :
$$n_1 \leqslant \sqrt{5} < n_1 + \frac{1}{4} \quad \text{donc} \quad 4n_1 \leqslant 4\sqrt{5} < 4n_1 + 1.$$
Puisque la fonction carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on veut que :
$$(4n_1)^2 \leqslant \underbrace{\left(4\sqrt{5}\right)^2}_{=16\times 5=80} < (4n_1+1)^2.$$
Or $8^2 = 64 < 80 < 81 = 9^2$. Il suffit donc de prendre $4n_1 = 8$, c'est-à-dire $n_1 = 2$. De même, on cherche un encadrement de $\sqrt{10}$ de la forme :
$$n_2 \leqslant \sqrt{10} < n_2 + \frac{1}{4} \quad \text{donc} \quad 4n_2 \leqslant 4\sqrt{10} < 4n_2 + 1 \quad \text{donc} \quad (4n_2)^2 \leqslant \underbrace{\left(4\sqrt{10}\right)^2}_{=16\times 10=160} < (4n_2+1)^2.$$
Or $12^2 = 144 < 160 < 169 = 13^2$. Il suffit donc de prendre $4n_2 = 12$, c'est-à-dire $n_2 = 3$.

Synthèse. Puisque $64 < 80 < 81$, on a d'après la stricte croissance de la fonction racine carrée :
$$8 < 4\sqrt{5} < 9 \quad \text{donc} \quad 2 < \sqrt{5} < \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}.$$
De même, puisque $144 < 160 < 169$, on a :
$$12 < 4\sqrt{10} < 13 \quad \text{donc} \quad 3 < \sqrt{10} < \frac{13}{4} = 3 + \frac{1}{4}.$$
Par conséquent :
$$\underbrace{3\times 2 + 3}_{=9} < 3\sqrt{5} + \sqrt{10} < \underbrace{3\times\left(2 + \frac{1}{4}\right) + \left(3 + \frac{1}{4}\right)}_{=9+1=10}.$$
Ainsi, on a montré que $9 \leqslant \alpha < 10$. On en déduit que $\boxed{\lfloor\alpha\rfloor = 9}$.

Exercice 3

Résoudre l'inéquation suivante d'inconnue x réelle :

$$\left|2x^2-5x-3\right| \leqslant x^2+3.$$

► On commence par déterminer le signe de l'expression $2x^2-5x-3$ pour se débarrasser de la valeur absolue. On reconnaît un polynôme du second degré de discriminant $\Delta=(-5)^2-4\times 2\times(-3)=49>0$. Il admet donc deux racines : $(5+\sqrt{49})/4=(5+7)/4=3$ et $(5-\sqrt{49})/4=-1/2$. D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-1/2$		3		$+\infty$
$2x^2-5x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On raisonne par disjonction des cas.
1^er^ cas : $x\in]-\infty,-1/2]\cup[3,+\infty[$. Alors :

$$\begin{aligned}\Big|\underbrace{2x^2-5x-3}_{\geqslant 0}\Big| \leqslant x^2+3 &\iff 2x^2-5x-3\leqslant x^2+3\\ &\iff x^2-5x-6\leqslant 0.\end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme du second degré de discriminant $\Delta=(-5)^2-4\times(-6)=49>0$. Il admet donc deux racines : $(5+\sqrt{49})/2=(5+7)/2=6$ et $(5-\sqrt{49})/2=-1$. Puisqu'il est négatif entre ses deux racines, on en déduit que l'ensemble des solutions dans ce cas est :

$$\Big(]-\infty,-1/2]\cup[3,+\infty[\Big)\cap[-1,6]=\boxed{[-1,-1/2]\cup[3,6]}.$$

2^e^ cas : $x\in[-1/2,3]$. Alors :

$$\begin{aligned}\Big|\underbrace{2x^2-5x-3}_{\leqslant 0}\Big| \leqslant x^2+3 &\iff -(2x^2-5x-3)\leqslant x^2+3\\ &\iff 0\leqslant 3x^2-5x\\ &\iff 3x\left(x-\frac{5}{3}\right)\geqslant 0.\end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme du second degré qui admet deux racines : 0 et $5/3$. Puisqu'il est négatif entre ses deux racines, on en déduit que l'ensemble des solutions dans ce cas est :

$$[-1/2,3]\cap(]-\infty,0]\cup[5/3,+\infty[)=\boxed{[-1/2,0]\cup[5/3,3]}.$$

Conclusion. Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\Big([-1,-1/2]\cup[3,6]\Big)\cup\Big([-1/2,0]\cup[5/3,3]\Big)=\boxed{[-1,0]\cup[5/3,6]}.$$

Problème 2

On munit l'ensemble $\mathbb{R}_+^*=]0,+\infty[$ d'une nouvelle opération appelée ***somme parallèle****, notée $/\!/$, et définie pour tout $a>0$ et tout $b>0$ par :*

$$a/\!/b=\frac{ab}{a+b}.$$

1. *Justifier la réponse à chacune des questions suivantes.*

(a) *La somme parallèle est-elle commutative ?*

▶ Soient $a > 0$ et $b > 0$. On a :

$$a /\!\!/ b = \frac{ab}{a+b} = \frac{ba}{b+a} = b /\!\!/ a \quad \text{par commutativité de la somme et du produit des nombres réels..}$$

On en déduit que $\boxed{\text{la somme parallèle est commutative}}$.

(b) *La somme parallèle est-elle associative ?*

▶ Soient $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$. On a :

$$\begin{aligned}(a /\!\!/ b) /\!\!/ c &= \left(\frac{ab}{a+b}\right) /\!\!/ c \\ &= \frac{\left(\frac{ab}{a+b}\right) c}{\left(\frac{ab}{a+b}\right) + c} \\ &= \frac{\frac{abc}{a+b}}{\frac{ab + c(a+b)}{a+b}} \\ &= \frac{abc}{ab+ac+bc}.\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}a /\!\!/ (b /\!\!/ c) &= a /\!\!/ \left(\frac{bc}{b+c}\right) \\ &= \frac{a\left(\frac{bc}{b+c}\right)}{a + \left(\frac{bc}{b+c}\right)} \\ &= \frac{\frac{abc}{b+c}}{\frac{a(b+c)+bc}{b+c}} \\ &= \frac{abc}{ab+ac+bc}.\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$(a /\!\!/ b) /\!\!/ c = \frac{abc}{ab+ac+bc} = a /\!\!/ (b /\!\!/ c).$$

On en déduit que $\boxed{\text{la somme parallèle est associative}}$.

(c) *La somme parallèle admet-elle un élément neutre ?*

▶ Soit $a > 0$. Si $b > 0$ est un élément neutre, alors :

$$\begin{aligned}a /\!\!/ b = a &\iff \frac{ab}{a+b} = a \\ &\iff ab = a(a+b) \\ &\iff ab = a^2 + ab \\ &\iff 0 = a^2 \\ &\iff a = 0 \quad \text{ce qui est absurde car } a > 0.\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\text{la somme parallèle n'admet pas d'élément neutre}}$.

2. *Montrer que le produit est distributif sur la somme parallèle.*

▶ Soient $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$. On a :

$$\begin{aligned} a(b /\!/ c) &= a\left(\frac{bc}{b+c}\right) \\ &= \frac{abc}{b+c}. \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} (ab) /\!/ (ac) &= \frac{abac}{ab+ac} \\ &= \frac{a(abc)}{a(b+c)} \\ &= \frac{abc}{b+c}. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$a(b /\!/ c) = \frac{abc}{b+c} = (ab) /\!/ (ac).$$

On en déduit que $\boxed{\text{le produit est distributif sur la somme parallèle}}$.

Pour la suite de l'énoncé, on fixe $t \in \mathbb{R}$ et on pose $E_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y = t\}$.

3. *Soient $a > 0$ et $b > 0$.*

   (a) *Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + b(t - x)^2$.*

   ▶ On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) &= ax^2 + b(t-x)^2 \\ &= ax^2 + b(t-x)^2 \\ &= ax^2 + b(t^2 - 2tx + x^2) \\ &= (a+b)x^2 - 2btx + bt^2. \end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme du second degré, de coefficient dominant $a + b > 0$. Donc f admet un minimum en

$$x_{\min} = \frac{-(-2bt)}{2(a+b)} = \frac{bt}{a+b}$$

qui vaut :

$$\begin{aligned} f(x_{\min}) &= f\left(\frac{bt}{a+b}\right) \\ &= (a+b)\left(\frac{bt}{a+b}\right)^2 - 2bt\left(\frac{bt}{a+b}\right) + bt^2 \\ &= \frac{b^2t^2}{a+b} - \frac{2b^2t^2}{a+b} + \frac{bt^2(a+b)}{a+b} \\ &= \frac{b^2t^2 - 2b^2t^2 + abt^2 + b^2t^2}{a+b} \\ &= \frac{abt^2}{a+b} = \left(\frac{ab}{a+b}\right)t^2 = (a /\!/ b)t^2. \end{aligned}$$

On en déduit le tableau des variations de f.

x	$+\infty$		$\dfrac{bt}{a+b}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$(a /\!\!/ b)t^2$	$\nearrow$	$+\infty$

(b) En déduire que :

$$\inf\left\{ax^2+by^2 \,\middle|\, (x,y)\in E_t\right\} = (a /\!\!/ b)t^2.$$

Cette borne inférieure est-elle le plus petit élément ?

▶ Si $(x,y)\in E_t$, on a $x+y=t$ donc $y=t-x$. Par conséquent :

$$\forall (x,y)\in E_t, \quad ax^2+by^2 = ax^2+b(t-x)^2 = f(x).$$

On en déduit que :

$$\left\{ax^2+by^2 \,\middle|\, (x,y)\in E_t\right\} = \left\{f(x) \,\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\}.$$

Or :

$$\left\{f(x) \,\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\} = \left[(a /\!\!/ b)t^2, +\infty\right[\quad \text{d'après le résultat de la question précédente.}$$

Par conséquent :

$$\inf\left\{ax^2+by^2 \,\middle|\, (x,y)\in E_t\right\} = \inf\left[(a /\!\!/ b)t^2, +\infty\right[= \boxed{(a /\!\!/ b)t^2}.$$

De plus, on a vu à la question précédente que le minimum de f est atteint pour $x_{\min} = \frac{bt}{a+b}$. Donc cette borne inférieure est atteinte pour $(x,y) = \left(\frac{bt}{a+b}, t-\frac{bt}{a+b}\right)\in E_t$. On en déduit que $\boxed{\text{cette borne inférieure est le plus petit élément}}$.

4. *Soient $a_1>0$, $a_2>0$, $b_1>0$ et $b_2>0$. À l'aide du résultat de la question précédente, montrer que :*

$$(a_1 /\!\!/ b_1)t^2 + (a_2 /\!\!/ b_2)t^2 \leqslant \Big((a_1+a_2) /\!\!/ (b_1+b_2)\Big)t^2.$$

▶

> *Question difficile mais classique. Il faut bien avoir compris la définition de la borne inférieure (le plus grand des minorants), prendre son temps pour trouver des inégalités les unes après les autres, et raisonner dans le bon ordre.*

D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$(a_1 /\!\!/ b_1)t^2 = \inf\left\{a_1x^2+b_1y^2 \,\middle|\, (x,y)\in E_t\right\}.$$

Puisque la borne inférieure est le plus grand des minorants, $(a_1 /\!\!/ b_1)t^2$ est un minorant particulier. Donc :

$$\forall (x,y)\in E_t, \quad (a_1 /\!\!/ b_1)t^2 \leqslant a_1x^2+b_1y^2.$$

En raisonnant de même, on a :

$$\forall (x,y)\in E_t, \quad (a_2 /\!\!/ b_2)t^2 \leqslant a_2x^2+b_2y^2.$$

En sommant ces deux inégalités, on obtient :

$$\begin{aligned}\forall (x,y)\in E_t, \quad (a_1 /\!\!/ b_1)t^2 + (a_2 /\!\!/ b_2)t^2 &\leqslant \left(a_1x^2+b_1y^2\right) + \left(a_2x^2+b_2y^2\right)\\ &= (a_1+a_2)x^2 + (b_1+b_2)y^2.\end{aligned}$$

On en déduit que $(a_1/\!\!/b_1)t^2+(a_2/\!\!/b_2)t^2$ est un minorant de l'ensemble des $(a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)y^2$ pour n'importe quelles valeurs des paramètres $(x,y)\in E_t$. Or le plus grand minorant de cet ensemble est égal, d'après le résultat de la question précédente, à :

$$\inf\left\{(a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)y^2\,\middle|\,(x,y)\in E_t\right\}=\Big((a_1+a_2)/\!\!/(b_1+b_2)\Big)t^2.$$

Puisque ce plus grand minorant est supérieur ou égal au minorant $(a_1/\!\!/b_1)t^2+(a_2/\!\!/b_2)t^2$, on a bien montré que :

$$\boxed{(a_1/\!\!/b_1)t^2+(a_2/\!\!/b_2)t^2\leqslant\Big((a_1+a_2)/\!\!/(b_1+b_2)\Big)t^2}.$$

5. *Démontrer par récurrence que pour tout entier $n\geqslant 2$ et tous réels strictement positifs $a_1,a_2,\dots,a_n$ et $b_1,b_2,\dots,b_n$, on a :*

$$(a_1/\!\!/b_1)+(a_2/\!\!/b_2)+\cdots+(a_n/\!\!/b_n)\leqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)/\!\!/(b_1+b_2+\cdots+b_n).$$

► Pour tout entier $n\geqslant 2$, on note $P(n)$ l'assertion :

«pour tous réels strictement positifs $a_1,a_2,\dots,a_n$ et $b_1,b_2,\dots,b_n$,
$(a_1/\!\!/b_1)+(a_2/\!\!/b_2)+\cdots+(a_n/\!\!/b_n)\leqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)/\!\!/(b_1+b_2+\cdots+b_n)$».

On raisonne par récurrence.
Initialisation. Pour $n=2$, on fixe des réels strictement positifs a_1,a_2 et b_1,b_2. Montrons que :

$$(a_1/\!\!/b_1)+(a_2/\!\!/b_2)\leqslant(a_1+a_2)/\!\!/(b_1+b_2).$$

On sait d'après le résultat de la question précédente que :

$$(a_1/\!\!/b_1)t^2+(a_2/\!\!/b_2)t^2\leqslant\Big((a_1+a_2)/\!\!/(b_1+b_2)\Big)t^2$$

où t était un réel quelconque fixé. En particulier pour $t=1$, on en déduit bien que $P(2)$ est vraie.
Hérédité. On fixe un entier $n\geqslant 2$ et on suppose que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. On commence par fixer des réels strictement positifs $a_1,a_2,\dots,a_n,a_{n+1}$ et $b_1,b_2,\dots,b_n,b_{n+1}$. Montrons que :

$$(a_1/\!\!/b_1)+(a_2/\!\!/b_2)+\cdots+(a_n/\!\!/b_n)+(a_{n+1}/\!\!/b_{n+1})\leqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1})/\!\!/(b_1+b_2+\cdots+b_n+b_{n+1}).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on sait déjà que :

$$(a_1/\!\!/b_1)+(a_2/\!\!/b_2)+\cdots+(a_n/\!\!/b_n)\leqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)/\!\!/(b_1+b_2+\cdots+b_n).$$

En additionnant $a_{n+1}/\!\!/b_{n+1}$ de chaque côté de l'inégalité, on en déduit :

$$\begin{aligned}&(a_1/\!\!/b_1)+(a_2/\!\!/b_2)+\cdots+(a_n/\!\!/b_n)+(a_{n+1}/\!\!/b_{n+1})\\ \leqslant\ &\underbrace{(a_1+a_2+\cdots+a_n)}_{=a'_1}/\!\!/\underbrace{(b_1+b_2+\cdots+b_n)}_{=b'_1}+(\underbrace{a_{n+1}}_{=a'_2}/\!\!/\underbrace{b_{n+1}}_{=b'_2}).\end{aligned}$$

On pose $a'_1=a_1+a_2+\cdots+a_n$, $b'_1=b_1+b_2+\cdots+b_n$, $a'_2=a_{n+1}$ et $b'_2=b_{n+1}$. En raisonnant comme dans l'initialisation, on peut montrer :

$$(a'_1/\!\!/b'_1)+(a'_2/\!\!/b'_2)\leqslant(a'_1+a'_2)/\!\!/(b'_1+b'_2).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}&\underbrace{(a_1+a_2+\cdots+a_n)}_{=a'_1}/\!\!/\underbrace{(b_1+b_2+\cdots+b_n)}_{=b'_1}+(\underbrace{a_{n+1}}_{=a'_2}/\!\!/\underbrace{b_{n+1}}_{=b'_2})\\ \leqslant\ &\underbrace{(a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1})}_{=a'_1+a'_2}/\!\!/\underbrace{(b_1+b_2+\cdots+b_n+b_{n+1})}_{b'_1+b'_2}.\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}&(a_1 /\!\!/ b_1) + (a_2 /\!\!/ b_2) + \cdots + (a_n /\!\!/ b_n) + (a_{n+1} /\!\!/ b_{n+1})\\ \leqslant&(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) /\!\!/ (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + (a_{n+1} /\!\!/ b_{n+1})\\ \leqslant&(a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}) /\!\!/ (b_1 + b_2 + \cdots + b_n + b_{n+1}).\end{aligned}$$

Par transitivité de l'inégalité, on en déduit que $P(n+1)$ est vraie. On a donc bien montré :

$$\forall n \geqslant 2, \quad P(n) \implies P(n+1).$$

Conclusion. D'après le principe de récurrence simple, on en déduit que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{pour tout entier } n \geqslant 2 \text{ et tous réels strictement positifs } a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ et } b_1, b_2, \ldots, b_n,\\ (a_1 /\!\!/ b_1) + (a_2 /\!\!/ b_2) + \cdots + (a_n /\!\!/ b_n) \leqslant (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) /\!\!/ (b_1 + b_2 + \cdots + b_n).\end{array}}$$

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 6 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 3\big(2u_{n+1} - 3u_n\big).$$

Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = (an + b)c^n$.

▶ On raisonne par analyse-synthèse pour déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

- Analyse. Si $u_n = (an + b)c^n$ pour tout entier $n \geqslant 0$, alors on a en particulier pour $n = 0$:

$$0 = u_0 = (a \times 0 + b)c^0 = b \quad \text{donc} \quad b = 0.$$

De même, on a pour $n = 1$:

$$6 = u_1 = (a \times 1 + b)c^1 = ac \quad \text{donc} \quad a = \frac{6}{c}.$$

De plus, on a pour $n = 2$:

$$u_2 = 3\big(2u_1 - 3u_0\big) = 3(12 - 0) = 36,$$

par conséquent :

$$36 = u_2 = (a \times 2 + b)c^2 = \left(\frac{6}{c} \times 2 + 0\right)c^2 = 12c \quad \text{donc} \quad c = \frac{36}{12} = 3 \quad \text{et} \quad a = \frac{6}{3} = 2.$$

On peut également vérifier ses résultats avec $n = 3$. D'une part :

$$u_3 = 3\big(2u_2 - 3u_1\big) = 3(72 - 18) = 162$$

et d'autre part :

$$(a \times 3 + b)c^3 = (2 \times 3 + 0)3^3 = 6 \times 27 = 162.$$

Par contre, ceci n'est pas une preuve que le résultat est vraie pour toutes les valeurs de l'entier $n \geqslant 0$. Il faut le démontrer dans la synthèse.

- Synthèse. On pose $\boxed{a = 2,\ b = 0 \text{ et } c = 3}$. Montrons par récurrence double que $u_n = 2n \times 3^n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

— *Initialisation.* On a :

$$2 \times 0 \times 3^0 = 0 = u_0 \quad \text{et} \quad 2 \times 1 \times 3^1 = 6 = u_1$$

donc la récurrence double est initialisée.

— *Hérédité.* On suppose que $u_n = 2n \times 3^n$ et $u_{n+1} = 2(n+1) \times 3^{n+1}$ pour un entier $n \geqslant 0$ fixé. Alors :

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 3\Big(2u_{n+1} - 3u_n\Big) \quad \text{d'après la relation de récurrence de l'énoncé} \\
&= 3\Big(2 \times 2(n+1) \times 3^{n+1} - 3 \times 2n \times 3^n\Big) \quad \text{d'après les hypothèses de récurrence} \\
&= 3\Big(4(n+1) \times 3 - 6n\Big) \times 3^n \quad \text{en factorisant par } 3^n \\
&= \Big(12n + 12 - 6n\Big) \times 3 \times 3^n \\
&= \Big(6n + 12\Big) \times 3^{n+1} \\
&= \Big(2n + 4\Big) \times 3 \times 3^{n+1} \quad \text{en factorisant par } 3 \\
&= 2(n+2) \times 3^{n+2} \quad \text{en factorisant par } 2.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a montré que si $u_n = 2n \times 3^n$ et $u_{n+1} = 2(n+1) \times 3^{n+1}$ alors $u_{n+2} = 2(n+2) \times 3^{n+2}$. De plus, cette implication est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

— *Conclusion.* D'après le principe de récurrence double, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \; u_n = 2n \times 3^n}.$$

Finalement, on a bien trouvé $\boxed{(a, b, c) = (2, 0, 3)}$ tel que $u_n = (an + b)c^n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.