Corrigé du DS n° 1 de mathématiques

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+5}{x-2}$. Déterminer les ensembles suivants :

$$\mathscr{E}_1 = \Big\{ f(x) \mid x \in]-7,1[\Big\} \quad \textit{et} \quad \mathscr{E}_2 = \Big\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [12,14[\Big\}.$$

► La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \quad f'(x) = \frac{2x(x-2)-(x^2+5)\times 1}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}.$$

On reconnaît au numérateur un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-5) = 36 > 0$. Donc le numérateur s'annule en $(4+\sqrt{36})/2 = 5$ et en $(4-\sqrt{36})/2 = -1$. De plus, il est strictement négatif sur $]-1,5[$ et strictement positif sur $]-\infty,-1[\cup]5,+\infty[$. Puisque $(x-2)^2 > 0$ pour tout $x \neq 2$, on en déduit le tableau des variations de f.

x	$-\infty$	-7		-1		1	2	3	$6-\sqrt{7}$	5	$6+\sqrt{7}$	11		$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0	$-$		‖		$-$	0	$+$			
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-6 ↗		-2	↘	-6 ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘ 14	↘ 12	↘ 10	↗ 12	↗ 14	↗	$+\infty$

car :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\frac{5}{x}}{1-\frac{2}{x}} = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\frac{5}{x}}{1-\frac{2}{x}} = +\infty$$

$$f(-1) = \frac{(-1)^2+5}{-1-2} = -2 \qquad f(5) = \frac{5^2+5}{5-2} = 10$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{x^2+5}{x-2} = -\infty \qquad \lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} \frac{x^2+5}{x-2} = +\infty$$

On a $f(-7) = \dfrac{(-7)^2+5}{-7-2} = -6$ et $f(1) = \dfrac{1^2+5}{1-2} = -6$. On déduit du tableau des variations de f que :

$$\mathscr{E}_1 = \Big\{ f(x) \mid x \in]-7,1[\Big\} = \boxed{]-6,-2]}.$$

Soyez précis avec les bornes des intervalles : -6 est exclus car $]-7,1[$ est un intervalle ouvert mais -2 est inclus car $-1 \in]-7,1[$.

Pour déterminer $\mathscr{E}_2$, on résout les deux équations suivantes :

- $f(x)=12 \iff \dfrac{x^2+5}{x-2}=12 \iff x^2+5=12(x-2) \iff x^2-12x+29=0$
  On obtient une équation du second degré de discriminant $\Delta=(-12)^2-4\times 29=28>0$ qui admet pour solutions $x=(12+\sqrt{28})/2=(12+2\sqrt{7})/2=6+\sqrt{7}$ et $x=6-\sqrt{7}$.
- $f(x)=14 \iff \dfrac{x^2+5}{x-2}=14 \iff x^2+5=14(x-2) \iff x^2-14x+33=0$
  On obtient une équation du second degré de discriminant $\Delta=(-14)^2-4\times 33=64>0$ qui admet pour solutions $x=(14+\sqrt{64})/2=(14+8)/2=11$ et $x=(14-8)/2=3$.

On déduit du tableau des variations de f que :

$$\mathscr{E}_2=\left\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)\in[12,14[\right\}=\boxed{\left]3,6-\sqrt{7}\right]\cup\left[6+\sqrt{7},11\right[}.$$

Problème 1

Ce problème propose d'étudier pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$ l'équation suivante d'inconnue $z\in\mathbb{C}$:

$$nz^n=z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z^3+z^2+z+1. \qquad (E_n)$$

1. *Résoudre les équations (E_1) et (E_2).*

   ▶ On a :

   $$(E_1) \iff 1z^1=z^0 \iff \boxed{z=1}$$

   et :

   $$(E_2) \iff 2z^2=z^1+z^0 \iff 2z^2-z-1=0.$$

   On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta=(-1)^2-4\times 2\times(-1)=9>0$. D'où :

   $$(E_2) \iff \left(z=\frac{1+\sqrt{9}}{2\times 2} \text{ ou } z=\frac{1-\sqrt{9}}{2\times 2}\right) \iff \boxed{z=1 \text{ ou } z=-\frac{1}{2}}.$$

2. *Déterminer un nombre $u\in\mathbb{C}$ solution de (E_n) pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$.*

   ▶ Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. On a :

   $$\underbrace{1^{n-1}+1^{n-2}+\cdots+1^3+1^2+1+1}_{n \text{ termes}}=\underbrace{1+1+\cdots+1+1+1+1+1}_{n \text{ termes}}=n=n\times 1^n.$$

   Ainsi le nombre $\boxed{u=1}$ est solution de (E_n) pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$.

3. (a) *Montrer que l'équation (E_3) est équivalente à*

   $$(z-u)(az^2+bz+c)=0$$

   où $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ sont trois nombres à déterminer.

   ▶ D'après le résultat de la question précédente, on cherche trois nombres $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tels que :

   $$(E_3) \iff (z-1)(az^2+bz+c)=0.$$

   - Analyse. On a :

     $$(E_3) \iff 3z^3=z^2+z^1+z^0 \iff 3z^3-z^2-z-1=0$$

     et :

     $$(z-1)(az^2+bz+c)=0 \iff az^3+(b-a)z^2+(c-b)z-c=0.$$

     En identifiant les coefficients, il suffit de choisir $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tels que :

     $$\begin{cases} a=3\\ b-a=-1\\ c-b=-1\\ -c=-1\end{cases} \iff \begin{cases} a=3\\ b=-1+a=2\\ c=-1+b=1\\ c=1\end{cases}.$$

- Synthèse. On pose $\boxed{\text{(a,b,c)=(3,2,1)}}$. En reprenant les calculs effectués en analyse, on a :

$$\begin{aligned}(z-1)(az^2+bz+c)=0 &\iff az^3+(b-a)z^2+(c-b)z-c=0\\ &\iff 3z^3-z^2-z-1=0 \iff (E_3).\end{aligned}$$

On a donc bien montré que (E_3) est équivalente à $\boxed{(z-1)(3z^2+2z+1)=0}$.

(b) Résoudre l'équation (E_3).

▶ On a d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned}(E_3) &\iff (z-1)(3z^2+2z+1)=0\\ &\iff \Big(z-1=0 \text{ ou } 3z^2+2z+1=0\Big) \quad \text{d'après l'intégrité de la multiplication.}\end{aligned}$$

On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta=2^2-4\times 3=-8<0$. L'équation $3z^2+2z+1=0$ admet donc pour solutions $z=(-2+i\sqrt{8})/6=(-1+i\sqrt{2})/3$ et $z=(-1-i\sqrt{2})/3$. Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E_3) est :

$$\boxed{\left\{1, -\frac{1}{3}+i\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}-i\frac{\sqrt{2}}{3}\right\}}.$$

Pour la suite du problème, on fixe un entier $n\in\mathbb{N}^\star$.

4. *Dans cette question, on fixe $z\in\mathbb{C}\setminus\{u\}$ une solution de l'équation (E_n) et on suppose que $|z|>1$.*

   (a) Montrer que :

$$|z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z^3+z^2+z+1|<n|z|^n.$$

▶ On a :

$$\begin{aligned}&|z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z^2+z+1|\\ \leqslant&|z^{n-1}|+|z^{n-2}|+\cdots+|z^2|+|z|+|1| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire}\\ =&|z|^{n-1}+|z|^{n-2}+\cdots+|z|^2+|z|+1\\ <&|z|^{n-1}\times|z|+|z|^{n-2}\times|z|^2+\cdots+|z|^2\times|z|^{n-2}+|z|\times|z|^{n-1}+1\times|z|^n \quad \text{car } |z|>1\\ =&|z|^n+|z|^n+\cdots+|z|^n+|z|^n+|z|^n\\ =&n|z|^n.\end{aligned}$$

On a donc bien montré que :

$$\boxed{|z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z^3+z^2+z+1|<n|z|^n}.$$

   (b) Que peut-on en déduire ?

▶ En reprenant le résultat de la question précédente, on a :

$$n|z|^n>|\underbrace{z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z^3+z^2+z+1}_{=nz^n \quad \text{car } z \text{ est solution de } (E_n)}|=|nz^n|=n|z|^n \quad \text{ce qui est absurde.}$$

Par conséquent, nous venons de démontrer par l'absurde que si $z\in\mathbb{C}\setminus\{u\}$ est une solution de l'équation (E_n) alors $\boxed{|z|\leqslant 1}$.

5. *Dans cette question, on fixe $z\in\mathbb{C}\setminus\{u\}$ une solution de l'équation (E_n) et on suppose que $|z|=1$. On note θ un argument de z.*

(a) *Montrer que :*

$$ne^{in\theta} = \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)} e^{i(n-1)\theta/2}.$$

► Puisque $|z| = 1$ et $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$, on a : $z = e^{i\theta}$. En réinjectant cette expression dans l'équation (E_n), on obtient :

$$\begin{aligned}
n(e^{i\theta})^n &= (e^{i\theta})^{n-1} + (e^{i\theta})^{n-2} + \cdots + (e^{i\theta})^3 + (e^{i\theta})^2 + e^{i\theta} + 1 \\
\text{donc}\quad ne^{in\theta} &= \underbrace{(e^{i\theta})^{n-1} + (e^{i\theta})^{n-2} + \cdots + (e^{i\theta})^3 + (e^{i\theta})^2 + (e^{i\theta})^1 + (e^{i\theta})^0}_{\text{somme des termes d'une suite géométrique de raison } e^{i\theta} = z \neq u = 1} \\
&= \frac{(e^{i\theta})^n - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{in\theta} - e^{i0}}{e^{i\theta} - e^{i0}} \\
&= \frac{2i\sin((n\theta - 0)/2)e^{i(n\theta+0)/2}}{2i\sin((\theta - 0)/2)e^{i(\theta+0)/2}} \quad \text{à l'aide d'une factorisation par l'angle moitié} \\
&= \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)} e^{i(n\theta/2 - \theta/2)} = \boxed{\frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)} e^{i(n-1)\theta/2}}.
\end{aligned}$$

Pensez à justifier que la raison est différente de 1 avant d'appliquer la formule de la somme des termes d'une suite géométrique.

$$q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & si\ q \neq 1 \\ n+1 & si\ q = 1 \end{cases}$$

(b) *En déduire que :*

$$ne^{i(n+1)\theta/2} = \frac{1}{\tan(\theta/2)} \sin((n+1)\theta/2) - \cos((n+1)\theta/2).$$

► On a :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tan(\theta/2)} \sin((n+1)\theta/2) - \cos((n+1)\theta/2) \\
=&\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \sin(n\theta/2 + \theta/2) - \cos(n\theta/2 + \theta/2) \quad \text{d'après le théorème de Thalès} \\
=&\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\Big(\cos(n\theta/2)\sin(\theta/2) + \sin(n\theta/2)\cos(\theta/2)\Big) - \Big(\cos(n\theta/2)\cos(\theta/2) - \sin(n\theta/2)\sin(\theta/2)\Big) \\
&\qquad\qquad \text{d'après les formules d'addition de sinus et cosinus} \\
=&\cos(n\theta/2)\cos(\theta/2) + \sin(n\theta/2)\frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} - \cos(n\theta/2)\cos(\theta/2) + \sin(n\theta/2)\sin(\theta/2) \\
=&\sin(n\theta/2)\frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} + \frac{\sin^2(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\Big(\underbrace{\cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2)}_{=1}\Big) \\
=&\frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \quad \text{d'après le théorème de Pythagore} \\
=&\frac{ne^{in\theta}}{e^{i(n-1)\theta/2}} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
=&ne^{i(n\theta - (n-1)\theta/2)} = ne^{i(n+1)\theta/2}.
\end{aligned}$$

Finalement, on a bien montré que :

$$\boxed{ne^{i(n+1)\theta/2} = \frac{1}{\tan(\theta/2)} \sin((n+1)\theta/2) - \cos((n+1)\theta/2)}.$$

(c) *Montrer que θ est nul modulo $2\pi/(n+1)$ et aboutir à une absurdité.*

▶ On déduit du résultat de la question précédente que $ne^{i(n+1)\theta/2}$ est un nombre réel, donc que son argument $(n+1)\theta/2$ est nul modulo π. Autrement dit, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$(n+1)\frac{\theta}{2} = 0 + k\pi \quad \text{donc} \quad \theta = 0 + k\frac{2\pi}{n+1}.$$

Ainsi, on a bien montré que $\boxed{\theta \text{ est nul modulo } 2\pi/(n+1)}$. En reportant $\theta = 2k\pi/(n+1)$ dans le résultat de la question précédente, on obtient :

$$ne^{ik\pi} = \frac{1}{\tan(k\pi/(n+1))}\sin(k\pi) - \cos(k\pi).$$

Or $e^{ik\pi} = (-1)^k$, $\sin(k\pi) = 0$ et $\cos(k\pi) = (-1)^k$ d'après le cercle trigonométrique. Donc :

$$n(-1)^k = 0 - (-1)^k = -(-1)^k.$$

En divisant par $(-1)^k \neq 0$, on en déduit que $n = -1$ ce qui est $\boxed{\text{absurde}}$.

6. *Que peut-on conclure des questions 2, 4 et 5 ?*

▶ On a montré à la question 2 que $u = 1$ est solution de l'équation (E_n) et à la question 4 que les autres solutions sont de module inférieur ou égal à 1. À la question 5, nous venons de démontrer par l'absurde que si $z \in \mathbb{C} \setminus \{u\}$ est une solution de l'équation (E_n) alors $|z| \neq 1$. Finalement, nous avons démontré que

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{toutes les solutions de l'équation } (E_n) \text{ sont de module} \\ \text{strictement inférieur à 1, sauf la solution } u = 1.\end{array}}$$

Exercice 2

Résoudre les équations et les inéquations suivantes d'inconnue x réelle.

(I_1) $|x^2 + 3x + 1| \geqslant |2x + 3|$

▶ L'inéquation (I_1) est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. On reconnaît à gauche de l'inéquation un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 3^2 - 4 = 5 > 0$. L'équation $x^2 + 3x + 1 = 0$ admet donc pour solutions $x = (-3 + \sqrt{5})/2$ et $x = (-3 - \sqrt{5})/2$. De l'autre côté de l'inéquation, on a : $2x + 3 \geqslant 0 \iff x \geqslant -3/2$. De plus, $(-3 + \sqrt{5})/2 > -1/2 > -3/2$ et $(-3 - \sqrt{5})/2 < -5/2 < -3/2$ (car $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$). On obtient donc le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^2+3x+1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$2x+3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

- <u>1^{er} cas</u> : $x \in]-\infty, (-3 - \sqrt{5})/2]$. Alors :

$$\begin{aligned}(I_1) &\iff x^2 + 3x + 1 \geqslant -(2x+3) \\ &\iff x^2 + 5x + 4 \geqslant 0.\end{aligned}$$

On reconnaît une inéquation du second degré de discriminant $\Delta = 5^2 - 4 \times 4 = 9 > 0$. L'équation $x^2 + 5x + 4 = 0$ admet donc pour solutions $x = (-5 + \sqrt{9})/2 = -1$ et $x = (-5 - \sqrt{9})/2 = -4$. Or $(-3 + \sqrt{5})/2 > -1/2 > -1$ (car $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$) et $(-3 - \sqrt{5})/2 > -3 > -4$ (car $\sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$).

x	$-\infty$		-4		$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$		$-\frac{3}{2}$		-1		$\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^2+5x+4		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

On en déduit, dans le cas où $x \in]-\infty, (-3-\sqrt{5})/2]$, que :

$$(I_1) \iff x \in]-\infty, -4]\,.$$

- <u>2e cas</u> : $x \in](-3-\sqrt{5})/2, -3/2]$. Alors :

$$\begin{aligned}(I_1) &\iff -(x^2+3x+1) \geqslant -(2x+3)\\ &\iff x^2+x-2 \leqslant 0.\end{aligned}$$

On reconnaît une inéquation du second degré de discriminant $\Delta = 1-4\times(-2) = 9 > 0$. L'équation $x^2+x-2=0$ admet donc pour solutions $x = (-1+\sqrt{9})/2 = 1$ et $x = (-1-\sqrt{9})/2 = -2$. Or $(-3+\sqrt{5})/2 < 0 < 1$ (car $\sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$) et $(-3-\sqrt{5})/2 < -5/2 < -2$ (car $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$).

x	$-\infty$		$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$		-2		$-\frac{3}{2}$		$\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	

On en déduit, dans le cas où $x \in](-3-\sqrt{5})/2, -3/2]$, que :

$$(I_1) \iff x \in \left[-2, -\frac{3}{2}\right].$$

- <u>3e cas</u> : $x \in]-3/2, (-3+\sqrt{5})/2]$. Alors :

$$\begin{aligned}(I_1) &\iff -(x^2+3x+1) \geqslant 2x+3\\ &\iff x^2+5x+4 \leqslant 0.\end{aligned}$$

En reprenant l'étude du 1er cas, on en déduit, dans le cas où $x \in]-3/2, (-3+\sqrt{5})/2]$, que :

$$(I_1) \iff x \in \left]-\frac{3}{2}, -1\right].$$

- <u>4e cas</u> : $x \in](-3+\sqrt{5})/2, +\infty[$. Alors :

$$\begin{aligned}(I_1) &\iff x^2+3x+1 \geqslant 2x+3\\ &\iff x^2+x-2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

En reprenant l'étude du 2e cas, on en déduit, dans le cas où $x \in](-3+\sqrt{5})/2, +\infty[$, que :

$$(I_1) \iff x \in [1, +\infty[\,.$$

- <u>Conclusion</u>. Finalement, l'ensemble des solutions de (I_1) est :

$$]-\infty,-4] \cup \left[-2, -\frac{3}{2}\right] \cup \left]-\frac{3}{2}, -1\right] \cup [1,+\infty[= \boxed{]-\infty,-4] \cup [-2,-1] \cup [1,+\infty[}.$$

Il est également possible de résoudre (I_1) en utilisant la croissance de la fonction carrée sur $[0,+\infty[$ pour se débarasser des valeurs absolues :

$$\begin{aligned}(I_1) &\iff \left(x^2+3x+1\right)^2 \geqslant (2x+3)^2\\ &\iff \left(x^2+3x+1\right)^2 - (2x+3)^2 \geqslant 0\\ &\iff \Big(\left(x^2+3x+1\right)+(2x+3)\Big)\Big(\left(x^2+3x+1\right)-(2x+3)\Big) \geqslant 0\\ &\iff \left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+x-2\right) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Puis il suffit d'étudier le signe de la fonction $f : x \mapsto (x^2+5x+4)(x^2+x-2)$.

(I_2) $x^{(x^3)} \geqslant x^{4x}$

▶ Puisque les exposants x^3 et $4x$ sont des nombres réels, on a d'après la définition des puissances :

$$x^{(x^3)} = \exp\left(x^3 \ln(x)\right) \quad \text{et} \quad x^{4x} = \exp\left(4x \ln(x)\right).$$

Ainsi l'inéquation (I_2) est bien définie seulement pour $x > 0$ et on a :

$$\begin{aligned}
(I_2) &\iff \exp\left(x^3 \ln(x)\right) \geqslant \exp\left(4x \ln(x)\right) \\
&\iff x^3 \ln(x) \geqslant 4x \ln(x) \quad \text{car la fonction exp est strictement croissante} \\
&\iff \left(x^3 - 4x\right) \ln(x) \geqslant 0 \\
&\iff x\left(x^2 - 4\right) \ln(x) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

On étudie le signe de la fonction $f : x \mapsto x(x^2 - 4)\ln(x) = x(x+2)(x-2)\ln(x)$ sur $]0, +\infty[$.

x	0		1		2		$+\infty$
$x(x+2)$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que l'ensemble des solutions de (I_2) est $\boxed{]0, 1] \cup [2, +\infty[}$.

(I_3) $\left\lfloor x + \sqrt{2x+3} \right\rfloor = 4$

▶ L'inéquation (I_3) est bien définie seulement pour $2x+3 \geqslant 0 \iff x \geqslant -3/2$. D'après la définition de la partie entière, on a :

$$(I_3) \iff 4 \leqslant x + \sqrt{2x+3} < 5 \iff \Bigg(\underbrace{\sqrt{2x+3} \geqslant 4 - x}_{1^{\text{re}} \text{ inéquation}} \text{ et } \underbrace{\sqrt{2x+3} < 5 - x}_{2^{\text{e}} \text{ inéquation}}\Bigg).$$

Attention avant d'élever au carré pour simplifier la racine : il faut d'abord isoler la racine d'un côté de l'inéquation (sinon elle ne se simplifie pas) puis vérifier que l'autre côté de l'inéquation est positif pour pouvoir utiliser la croissance de la fonction carrée sur $[0, +\infty[$.

- 1^{re} inéquation. On a : $4 - x \geqslant 0 \iff x \leqslant 4$.
  — *1er cas* : $x \in [-3/2, 4]$. Alors :

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x+3} \geqslant 4 - x &\iff 2x + 3 \geqslant (4-x)^2 \\
&\qquad \text{car la fonction carrée est strictement croissante sur } [0, +\infty[\\
&\iff 2x + 3 \geqslant 16 - 8x + x^2 \\
&\iff x^2 - 10x + 13 \leqslant 0.
\end{aligned}$$

On reconnaît une inéquation du second degré de discriminant $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 13 = 48 > 0$. L'équation $x^2 - 10x + 13 = 0$ admet donc pour solutions $x = (10 + \sqrt{48})/2 = 5 + 2\sqrt{3}$ et $x = 5 - 2\sqrt{3}$. Or $5 - 2\sqrt{3} > 1 > -3/2$ (car $\sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$) et $5 - 2\sqrt{3} < 3 < 4$ (car $\sqrt{3} > \sqrt{1} = 1$).

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$5-2\sqrt{3}$		4		$5+2\sqrt{3}$		$+\infty$
$x^2 - 10x + 13$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

On en déduit, dans le cas où $x \in [-3/2, 4]$, que :

$$\sqrt{2x+3} \geqslant 4-x \iff x \in \left[5-2\sqrt{3}, 4\right].$$

— *2e cas* : $x \in]4, +\infty[$. Alors $\sqrt{2x+3} \geqslant 4-x$ est toujours vraie car $\sqrt{2x+3} \geqslant 0 > 4-x$.

— *Conclusion de la 1re inéquation.* On en déduit que :

$$\sqrt{2x+3} \geqslant 4-x \iff x \in \left[5-2\sqrt{3}, 4\right] \cup]4, +\infty[= \boxed{\left[5-2\sqrt{3}, +\infty\right[}.$$

- 2e inéquation. On a : $5-x \geqslant 0 \iff x \leqslant 5$.

— *1er cas* : $x \in [-3/2, 5]$. Alors :

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+3} < 5-x &\iff 2x+3 < (5-x)^2 \\ &\ \text{car la fonction carrée est strictement croissante sur } [0, +\infty[\\ &\iff 2x+3 < 25-10x+x^2 \\ &\iff x^2-12x+22 > 0. \end{aligned}$$

On reconnaît une inéquation du second degré de discriminant $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 22 = 56 > 0$. L'équation $x^2-12x+22 = 0$ admet donc pour solutions $x = (12+\sqrt{56})/2 = 6+\sqrt{14}$ et $x = 6-\sqrt{14}$. Or $6-\sqrt{14} > 2 > -3/2$ (car $\sqrt{14} < \sqrt{16} = 4$) et $6-\sqrt{14} < 3 < 5$ (car $\sqrt{14} > \sqrt{9} = 3$).

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$6-\sqrt{14}$		5		$6+\sqrt{14}$		$+\infty$
$x^2-12x+22$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

On en déduit, dans le cas où $x \in [-3/2, 5]$, que :

$$\sqrt{2x+3} < 5-x \iff x \in \left[-\frac{3}{2}, 6-\sqrt{14}\right[.$$

— *2e cas* : $x \in]5, +\infty[$. Alors $\sqrt{2x+3} < 5-x$ n'est jamais vraie car $\sqrt{2x+3} \geqslant 0 > 5-x$.

— *Conclusion de la 2e inéquation.* On en déduit que :

$$\sqrt{2x+3} < 5-x \iff x \in \boxed{\left[-\frac{3}{2}, 6-\sqrt{14}\right[}.$$

- Conclusion. On a $5-2\sqrt{3} < 5-2\times 3/2 = 2$ (car $\sqrt{3} = \sqrt{9/3} > \sqrt{9/4} = 3/2$) et $6-\sqrt{14} > 2$ (car $\sqrt{14} < \sqrt{16} = 4$). Donc $5-2\sqrt{3} < 6-\sqrt{14}$. On en déduit que l'ensemble des solutions (I_3) est :

$$\left[5-2\sqrt{3}, +\infty\right[\cap \left[-\frac{3}{2}, 6-\sqrt{14}\right[= \boxed{\left[5-2\sqrt{3}, 6-\sqrt{14}\right[}.$$

(I_4) $6\sin^2(x)+2 \geqslant 7\sin(x)$

▶ L'inéquation (I_4) est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = \sin(x)$. Alors :

$$(I_4) \iff 6X^2+2 \geqslant 7X \iff 6X^2-7X+2 \geqslant 0.$$

On reconnaît une inéquation du second degré de discriminant $\Delta = (-7)^2 - 4\times 6\times 2 = 1 > 0$. Par conséquent, l'équation $6X^2-7X+2 = 0$ admet pour solutions $X = (7+\sqrt{1})/12 = 2/3$ et $X = (7-\sqrt{1})/12 = 1/2$. On en déduit que :

$$(I_4) \iff \left(X \leqslant \frac{1}{2} \text{ ou } X \geqslant \frac{2}{3}\right) \iff \left(\sin(x) \leqslant \frac{1}{2} \text{ ou } \sin(x) \geqslant \frac{2}{3}\right).$$

D'après le cercle trigonométrique, on obtient :

$$\sin(x) \leqslant \frac{1}{2} \iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[0+2k\pi, \frac{\pi}{6}+2k\pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}+2k\pi, 2\pi+2k\pi\right] \right)$$
$$\sin(x) \geqslant \frac{2}{3} \iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)+2k\pi, \pi-\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)+2k\pi\right]$$

On peut aussi écrire le premier ensemble sous la forme plus simple :

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[0+2k\pi, \tfrac{\pi}{6}+2k\pi\right] \cup \left[\tfrac{5\pi}{6}+2k\pi, 2\pi+2k\pi\right] \right) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\tfrac{5\pi}{6}+2k\pi, \tfrac{13\pi}{6}+2k\pi\right].$$

Le plus important est de savoir utiliser le cercle trigonométrique pour résoudre des inéquations et de savoir écrire des ensembles à l'aide d'une grande union.

On en déduit que l'ensemble des solutions de (I_4) est :

$$\boxed{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[2k\pi, \frac{\pi}{6}+2k\pi\right] \cup \left[\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)+2k\pi, \pi-\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)+2k\pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}+2k\pi, 2(k+1)\pi\right] \right)}.$$

(I_5) $\dfrac{2x+m}{x+3} \geqslant 1$ *où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre fixé.*

▶ L'inéquation (I_5) est bien définie seulement pour $x+3 \neq 0 \iff x \neq -3$. On a :

$$\begin{aligned}(I_5) &\iff \frac{2x+m}{x+3} - 1 \geqslant 0\\ &\iff \frac{2x+m-(x+3)}{x+3} \geqslant 0\\ &\iff \frac{x+(m-3)}{x+3} \geqslant 0.\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{cases} x+(m-3) \geqslant 0 \iff x \geqslant -(m-3) = 3-m \\ x+3 \geqslant 0 \iff x \geqslant -3. \end{cases}$$

- <u>1er cas</u> : $3-m < -3 \iff m > 6$. On obtient alors le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		$3-m$		-3		$+\infty$
$x+(m-3)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+(m-3)}{x+3}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

On en déduit, dans le cas où $m > 6$, que :

$$(I_5) \iff]-\infty, 3-m] \cup]-3, +\infty[.$$

- <u>2e cas</u> : $3-m = -3 \iff m = 6$. Alors (I_5) est toujours vraie car :

$$\frac{x+(m-3)}{x+3} = 1 > 0.$$

- <u>3e cas</u> : $3-m > -3 \iff m < 6$. On obtient alors le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		-3		$3-m$		$+\infty$
$x+(m-3)$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x+(m-3)}{x+3}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

On en déduit, dans le cas où $m<6$, que :

$$(I_5) \iff]-\infty,-3[\cup[3-m,+\infty[.$$

- Conclusion. Finalement, l'ensemble des solutions de (I_5) est :

$$\boxed{\begin{cases}]-\infty,3-m]\cup]-3,+\infty[& \text{si } m>6 \\ \mathbb{R} & \text{si } m=6 \\ ]-\infty,-3[\cup[3-m,+\infty[& \text{si } m<6 \end{cases}}.$$

Problème 2

On dit qu'une fonction réelle f est lipschitzienne *sur un intervalle $I\subset\mathbb{R}$ s'il existe une constante $K\geqslant 0$ telle que :*

$$\forall (x,y)\in I^2,\quad |f(x)-f(y)|\leqslant K|x-y|.$$

1. *On rappelle qu'une fonction affine est une fonction de la forme $g:x\mapsto \alpha x+\beta$ où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.*

   (a) *Montrer que la fonction $g:x\mapsto 3x-2$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.*

   ▶ On cherche une constante $K\geqslant 0$ telle que :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad |g(x)-g(y)|\leqslant K|x-y|.$$

   On raisonne par analyse-synthèse.

   - Analyse. Soit $(x,y)\mathbb{R}^2$. On a :

$$|g(x)-g(y)|=|(3x-2)-(3y-2)|=|3x-3y|=|3(x-y)|=3|x-y| \quad \text{car } 3>0.$$

   - Synthèse. On pose $\boxed{K=3}$. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. En reprenant les calculs de l'analyse, on a :

$$|g(x)-g(y)|=3|x-y|=K|x-y|.$$

   On a donc bien trouvé une constante $K\geqslant 0$ telle que :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad |g(x)-g(y)|\leqslant K|x-y|.$$

   On en déduit bien que $\boxed{\text{la fonction } g:x\mapsto 3x-2 \text{ est lipschitzienne sur } \mathbb{R}}$.

   (b) *Plus généralement, montrer que toute fonction affine est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.*

   ▶ Soit $g:x\mapsto \alpha x+\beta$ une fonction affine où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a :

$$|g(x)-g(y)|=|(\alpha x+\beta)-(\alpha y+\beta)|=|\alpha x-\alpha y|=|\alpha(x-y)|=|\alpha||x-y|.$$

   En raisonnant comme dans la question précédente en posant $\boxed{K=|\alpha|\geqslant 0}$, on obtient que la fonction $g:x\mapsto\alpha x+\beta$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Puisque ceci est vrai pour toute fonction affine $g:x\mapsto\alpha x+\beta$, on en déduit bien que $\boxed{\text{toute fonction affine est lipschitzienne sur } \mathbb{R}}$.

2. (a) *Montrer que la fonction $h_{-1}:x\mapsto 1/x$ est lipschitzienne sur $[1,+\infty[$.*

   ▶ On cherche une constante $K\geqslant 0$ telle que :

$$\forall (x,y)\in[1,+\infty[,\quad |h_{-1}(x)-h_{-1}(y)|\leqslant K|x-y|.$$

   On raisonne par analyse-synthèse.

- Analyse. Soit $(x, y) \in [1, +\infty[^2$. On a :

$$|h_{-1}(x) - h_1(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y}{xy} - \frac{x}{xy}\right| = \left|\frac{y-x}{xy}\right| = \frac{|y-x|}{|xy|} = \frac{|x-y|}{xy} \quad \text{car } \begin{cases} x \geqslant 1 > 0 \\ y \geqslant 1 > 0 \end{cases}.$$

Or $\frac{1}{xy} \leqslant 1$ car $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 1$.

- Synthèse. On pose $\boxed{K = 1}$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En reprenant les calculs de l'analyse, on a :

$$|h_{-1}(x) - h_{-1}(y)| = \frac{|x-y|}{xy} \leqslant |x-y| = K|x-y| \quad \text{car } x \geqslant 1 \text{ et } y \geqslant 1.$$

On a donc bien trouvé une constante $K \geqslant 0$ telle que :

$$\forall (x, y) \in [1, +\infty[^2, \quad |h_{-1}(x) - h_{-1}(y)| \leqslant K|x-y|.$$

On en déduit bien que $\boxed{\text{la fonction } h_{-1} : x \mapsto 1/x \text{ est lipschitzienne sur } [1, +\infty[}$.

(b) i. *Montrer que si la fonction $h_{-1} : x \mapsto 1/x$ est lipschitzienne sur $]0, 1]$ alors :*

$$\exists K > 0, \ \forall x \in]0, 1[, \ Kx \geqslant 1.$$

► On suppose que la fonction $h_{-1} : x \mapsto 1/x$ est lipschitzienne sur $]0, 1]$ et on cherche une constante $K > 0$ telle que :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad Kx \geqslant 1.$$

On raisonne par analyse-synthèse.

- Analyse. Puisqu'on a supposé que $h_{-1} : x \mapsto 1/x$ est lipschitzienne sur $]0, 1]$, on sait qu'il existe une constante $K' \geqslant 0$ telle que :

$$\forall (x, y) \in]0, 1]^2, \quad |h_{-1}(x) - h_{-1}(y)| \leqslant K'|x-y|.$$

Attention : la constante K' fournie par la définition du fait que h_{-1} est lipschitzienne sur $]0, 1]$ est a priori différente de la constante K cherchée. Pour éviter de s'embrouiller, il est donc utile de lui donner un autre nom (par exemple K', mais n'importe quel nom de variable différent de K convient).

Soit $(x, y) \in]0, 1]^2$. On a en reprenant les calculs de la question précédente :

$$|h_{-1}(x) - h_{-1}(y)| = \frac{|x-y|}{xy} \quad \text{donc} \quad \frac{|x-y|}{xy} \leqslant K'|x-y|.$$

Attention : pour simplifier par le facteur $|x-y|$ des deux côtés de l'inégalité, il faut justifier que ce facteur est non nul. Puisque ce n'est pas toujours le cas (x peut être égal à y), il est nécessaire d'être plus spécifique dans le choix des variables x et y fixées.

Si on choisit $x \in]0, 1[$ et $y = 1$, on obtient :

$$\frac{|x-1|}{x} \leqslant K'|x-1| \quad \text{donc} \quad \frac{1}{x} \leqslant K' \quad \text{car } |x-1| \neq 0 \text{ (puisque } x \neq 1).$$

On en déduit que $K'x \geqslant 1$ car $x > 0$.

- Synthèse. On pose $\boxed{K = K'}$. En reprenant les calculs de l'analyse, on a démontré que :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad Kx = K'x \geqslant 1.$$

Attention : le raisonnement n'est pas fini. Il fallait trouver une constante $K > 0$. Or la constante K' est seulement supérieure ou égale à 0.

Montrons que $K > 0$. On a déjà que $K = K' \geqslant 0$. Supposons par l'absurde que $K = 0$. Alors pour tout $x \in]0,1[$: $0 = Kx \geqslant 1$ ce qui est absurde. Par conséquent $K > 0$. Finalement, on a bien démontré que :

$$\boxed{\exists K > 0, \quad \forall x \in]0,1[, \quad Kx \geqslant 1}.$$

ii. Que peut-on en déduire ?

▶ On remarque que l'assertion démontrée à la question précédente est absurde. En effet, si on choisit $x \in]0,1[$ strictement plus petit que $1/K$ on obtient :

$$1 \leqslant Kx < K\frac{1}{K} = 1 \quad \text{ce qui est absurde.}$$

On en déduit que nous avons démontré par l'absurde que $\boxed{\text{la fonction } h_{-1} : x \mapsto 1/x \text{ n'est pas lipschitzienne sur }]0,1]}$.

(c) La fonction $h_{-1} : x \mapsto 1/x$ est-elle lipschitzienne sur $]0,+\infty[$? Justifier.

▶ On suppose par l'absurde que la fonction $h_{-1} : x \mapsto 1/x$ est lipschitzienne sur $]0,+\infty[$. Donc on sait qu'il existe une constante $K \geqslant 0$ telle que :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2, \quad |h_{-1}(x) - h_{-1}(y)| \leqslant K|x-y|.$$

En particulier, si on choisit $(x,y) \in]0,1]^2$ (car $]0,1] \subset]0,+\infty[$) on a trouvé une constante $K \geqslant 0$ telle que :

$$\forall (x,y) \in]0,1]^2, \quad |h_{-1}(x) - h_{-1}(y)| \leqslant K|x-y|.$$

Cela signifie que la fonction h_{-1} est pas lipschitzienne sur $]0,1]$ ce qui est absurde puisque nous avons démontré le contraire dans la question précédente. Par l'absurde, on peut donc en déduire que $\boxed{\text{la fonction } h_{-1} : x \mapsto 1/x \text{ n'est pas lipschitzienne sur }]0,+\infty[}$.

3. (a) Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs la négation de «f est lipschitzienne sur I».

▶ L'assertion «f est lipschitzienne sur I» s'écrit avec des quantificateurs :

$$\exists K \geqslant 0, \quad \forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|.$$

Sa négation s'écrit donc :

$$\boxed{\forall K \geqslant 0, \quad \exists (x,y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| > K|x-y|}.$$

(b) Montrer que la fonction $h_{1/2} : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0,1]$. (Indication : on pourra étudier ce qu'il se passe pour $y = 0$).

▶ Il suffit de montrer que l'assertion obtenue à la question précédente est vérifiée. Soit $K \geqslant 0$. On cherche deux réels $(x,y) \in [0,1]^2$ tels que :

$$|h_{1/2}(x) - h_{1/2}(y)| > K|x-y|.$$

On raisonne par analyse-synthèse.

- Analyse. Si on choisit $y = 0$, on cherche alors un réel $x \in [0,1]$ tel que :

$$\begin{aligned} & |h_{1/2}(x) - h_{1/2}(y)| > K|x-y| \\ \iff & \left|\sqrt{x} - \sqrt{0}\right| > K|x-0| \\ \iff & \sqrt{x} > Kx \quad \text{car } x \geqslant 0. \end{aligned}$$

On remarque que $x=0$ ne convient pas (sinon $0>0$ est absurde). On peut donc supposer que $x \in]0,1]$. Alors :

$$|h_{1/2}(x)-h_{1/2}(y)|>K|x-y| \iff \sqrt{x}>Kx \iff 1>K\frac{x}{\sqrt{x}}=K\sqrt{x}.$$

Si $K=0$ alors $1>K\sqrt{x}=0$ est vrai pour tout $x\in]0,1]$. Si $K>0$ alors on a :

$$|h_{1/2}(x)-h_{1/2}(y)|>K|x-y| \iff 1>K\sqrt{x} \iff \sqrt{x}<\frac{1}{K} \iff x<\frac{1}{K^2}$$

car la fonction carrée est strictement croissante.

- Synthèse. On pose $\boxed{y=0}$. Si $K=0$ alors on pose $\boxed{\text{n'importe quel } x\in]0,1]}$. Si $K>0$ alors on pose $\boxed{x\in]0,1] \text{ strictement plus petit que } 1/K^2}$. En reprenant les calculs de l'analyse, on a :

$$|h_{1/2}(x)-h_{1/2}(y)|>K|x-y| \quad \text{car} \quad 1>K\sqrt{x}.$$

On a donc bien trouvé deux réels $(x,y)\in[0,1]^2$ tels que cette inégalité stricte est vraie. De plus, ceci est vrai pour tout $K\geqslant 0$. Ainsi, l'assertion obtenue à la question précédente est bien vérifiée et on peut en déduire que $\boxed{\text{la fonction } h_{1/2}: x\mapsto\sqrt{x} \text{ n'est pas lipschitzienne sur } [0,1]}$.

Plus précisément, on peut poser :

$$y=0 \quad \text{et} \quad x=\begin{cases} 1 & \text{si } K=0 \\ \max\{1,\frac{1}{2K^2}\} & \text{si } K>0. \end{cases}$$

(c) *La fonction $h_2: x\mapsto x^2$ est-elle lipschitzienne sur $\mathbb{R}$? Justifier.*

▶ On raisonne comme dans la question précédente. Soit $K\geqslant 0$.

- Analyse. On choisit $y=0$ et on cherche un réel $x\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} & |h_2(x)-h_2(y)|>K|x-y| \\ \iff & \left|x^2-0^2\right|>K|x-0| \\ \iff & x^2>K|x|. \end{aligned}$$

Si on suppose que $x>0$, on obtient :

$$|h_2(x)-h_2(y)|>K|x-y| \iff x^2>K|x|=Kx \iff x>K.$$

- Synthèse. On pose $\boxed{y=0}$ et $\boxed{x>K}$. En reprenant les calculs de l'analyse, on a donc bien trouvé deux réels $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tels que :

$$|h_2(x)-h_2(y)|>K|x-y|.$$

De plus, ceci est vrai pour tout $K\geqslant 0$. Ainsi, l'assertion obtenue à la question 3(a) est bien vérifiée et on peut en déduire que $\boxed{\text{la fonction } h_2: x\mapsto x^2 \text{ n'est pas lipschitzienne sur } \mathbb{R}}$.

Plus précisément, on peut poser $y=0$ et $x=K+1$.

4. *Soit f une fonction réelle définie sur un segment $[a,b]\subset\mathbb{R}$ (où $a<b$). Le but de cette question est de démontrer que si f est lipschitzienne sur $[a,b]$ alors f est bornée sur $[a,b]$, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes $(m,M)\in\mathbb{R}^2$ telles que $m\leqslant f(x)\leqslant M$ pour tout $x\in[a,b]$.*

(a) *Montrer que :*

$$\forall x\in[a,b], \quad |f(x)|\leqslant|f(x)-f(a)|+|f(a)| \quad \text{et} \quad |x-a|\leqslant(b-a).$$

▶ Soit $x\in[a,b]$. On a :

$$|f(x)|=|f(x)-f(a)+f(a)|\leqslant|f(x)-f(x)|+|f(a)| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire}$$

et :

$$\overbrace{|x-a| = (x-a)}^{\text{car } x \geqslant a} \underbrace{\geqslant (b-a)}_{\text{car } x \leqslant b}.$$

Puisque ces inégalités sont vraies pour un réel $x \in [a,b]$ fixé, elles sont vraies pour tout $x \in [a,b]$. D'où :

$$\boxed{\forall x \in [a,b], \quad |f(x)| \leqslant |f(x)-f(a)| + |f(a)| \quad \text{et} \quad |x-a| \leqslant (b-a)}.$$

(b) *Conclure.*

▶ On suppose que f est lipschitzienne sur $[a,b]$. Montrons que f est bornée sur $[a,b]$. On cherche donc deux constantes $(m,M) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall x \in [a,b], \quad m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

On raisonne par analyse synthèse.

- Analyse. Puisqu'on a supposé que f est lipschitzienne sur $[a,b]$, on sait qu'il existe une constante $K \geqslant 0$ telle que :

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2, \quad |f(x)-f(y)| \leqslant K|x-y|.$$

Soit $x \in [a,b]$. On a :

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leqslant |f(x)-f(a)| + |f(a)| \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\ &\leqslant K|x-a| + |f(a)| \quad \text{car } f \text{ est lipschitzienne sur } [a,b] \\ &\leqslant K(b-a) + |f(a)| \quad \text{d'après le résultat de la question précédente.} \end{aligned}$$

Par définition de la valeur absolue, on en déduit que :

$$-\Big(K(b-a)+|f(a)|\Big) \leqslant f(x) \leqslant K(b-a)+|f(a)|.$$

- Synthèse. On pose $\boxed{m = -(K(b-a)+|f(a)|}$ et $\boxed{M = K(b-a)+|f(a)}$. En reprenant les calculs de l'analyse, on a démontré que :

$$\forall x \in [a,b], \quad m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

On en déduit bien que $\boxed{\text{si } f \text{ est lipschitzienne sur } [a,b] \text{ alors } f \text{ est bornée sur } [a,b]}$.

(c) *À l'aide d'un exemple précédent, que peut-on dire de la réciproque ? Justifier.*

▶ On considère l'exemple de la fonction $h_{1/2} : x \mapsto \sqrt{x}$. On a démontré à la question 3(b) que $h_{1/2}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0,1]$. Pourtant, la fonction $h_{1/2}$ est bornée sur $[0,1]$ car :

$$\forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1.$$

Par conséquent, $\boxed{\text{la réciproque de l'implication démontrée à la question précédente est fausse}}$.

5. *Le but de cette question est de démontrer que la somme de deux fonctions lipschitziennes sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est aussi lipschitzienne sur I. Pour cela, on fixe deux fonctions f_1 et f_2 lipschitziennes sur I. Montrer que f_1+f_2 est lipschitzienne sur I.*

▶ On cherche une constante $K \geqslant 0$ telle que :

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \Big|(f_1(x)+f_2(x)) - (f_1(y)+f_2(y))\Big| \leqslant K|x-y|.$$

On raisonne par analyse-synthèse.

- Analyse. Puisque f_1 et f_2 sont lipschitziennes sur I, on sait qu'il existe deux constantes $K_1 \geqslant 0$ et $K_2 \geqslant 0$ telles que :

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \begin{cases} |f_1(x) - f_1(y)| \leqslant K_1|x-y| \\ |f_2(x) - f_2(y)| \leqslant K_2|x-y| \end{cases}$$

Attention : les constantes K_1 et K_2 fournies par la définition du fait que f_1 et f_2 sont lipschitziennes sur I sont différentes (et a priori différente de la constante K cherchée). Pour éviter de s'embrouiller, il est donc utile de leur donner des noms différents.

Soit $(x,y) \in I^2$. On a :

$$\begin{aligned} & \Big|(f_1(x)+f_2(x)) - (f_1(y)+f_2(y))\Big| \\ =& \Big|f_1(x) - f_1(y) + f_2(x) - f_2(y)\Big| \\ \leqslant & |f_1(x)-f_1(y)| + |f_1(x)-f_1(y)| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\ \leqslant & K_1|x-y| + K_2|x-y| \quad \text{car } f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont lipschitziennes sur } I \\ =& (K_1+K_2)|x-y|. \end{aligned}$$

- Synthèse. On pose $\boxed{K = K_1 + K_2}$. En reprenant les calculs de l'analyse, on a bien trouvé une constante $K \geqslant 0$ telle que :

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \Big|(f_1(x)+f_2(x)) - (f_1(y)+f_2(y))\Big| \leqslant (K_1+K_2)|x-y| = K|x-y|.$$

On en déduit que $\boxed{f_1 + f_2 \text{ est lipschitzienne sur } I}$.

6. *À l'aide d'exemples précédents, que peut-on dire de l'assertion «le produit de deux fonctions lipschitziennes sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est aussi lipschitzienne sur I» ? Justifier.*

▶ On a montré à la question 3(c) que la fonction $h_2 : x \mapsto x^2$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Or la fonction h_2 est égale au produit de la fonction affine $g : x \mapsto x$ par elle-même. Or on a montré à la question 1(b) que la fonction affine $g : x \mapsto x$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, l'assertion «le produit de deux fonctions lipschitziennes sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est aussi lipschitzienne sur I» est $\boxed{\text{fausse}}$.

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_0 = 1 = u_1 = 1 \quad \textit{et} \quad \forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 2(u_{n+1} - 2u_n).$$

Montrer qu'il existe $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout entier $n \geqslant 0$ on a $u_n = \rho^n \cos(n\theta)$.

▶ On raisonne par analyse-synthèse pour déterminer $(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2$.

- Analyse. Si $u_n = \rho^n \cos(n\theta)$ pour tout entier $n \geqslant 0$, alors on a en particulier pour $n = 1$:

$$1 = u_1 = \rho\cos(\theta).$$

De plus, on a pour $n = 2$:

$$u_2 = 2(u_1 - 2u_0) = 2(1-2) = -2 \quad \text{et} \quad u_2 = \rho^2\cos(2\theta) = \rho^2(2\cos^2(\theta) - 1)$$

d'après la formule de duplication du cosinus. On en déduit que :

$$-2 = 2\Big[\underbrace{\rho\cos(\theta)}_{=1}\Big]^2 - \rho^2 = 2 - \rho^2 \iff \rho^2 = 4 \iff (\rho = 2 \text{ ou } \rho = -2).$$

Si $\rho = 2$, on a alors :

$$1 = 2\cos(\theta) \iff \cos(\theta) = \frac{1}{2} \iff \Big(\theta \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \text{ ou } \theta \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]\Big).$$

Si $\rho = -2$ on obtient de même $\theta \equiv 2\pi/3[2\pi]$ ou $\theta \equiv -2\pi/3[2\pi]$. On a donc deux infinités de choix possibles pour θ pour chacun des deux choix possibles de ρ. Ce qui fait en tout quatre infinités de choix possibles pour le couple (ρ, θ). Mais il ne s'agit pas ici de trouver tous les couples (ρ, θ) possibles : il suffit seulement d'en trouver au moins un. Ne perdez donc pas de temps dans l'analyse : dès que vous avez trouvé au moins un couple (ρ, θ) possible (le plus simple), passez rapidement à la synthèse. En fait, n'importe quel couple parmi les quatre infinités de choix possibles convient grâce aux propriétés de la fonction cosinus.

- Synthèse. On pose $\boxed{\rho = 2 \text{ et } \theta = \pi/3}$. Montrons par récurrence double que pour tout entier $n \geqslant 0$ on a $u_n = \rho^n \cos(n\theta) = 2^n \cos(n\pi/3)$.

  — *Initialisation*. On a :

$$2^0 \cos(0) = 1 = u_0 \quad \text{et} \quad 2^1 \cos(\pi/3) = 2\frac{1}{2} = 1 = u_1$$

  donc la récurrence double est initialisée.

  — *Hérédité*. On suppose que $u_n = 2^n \cos(n\pi/3)$ et $u_{n+1} = 2^{n+1} \cos((n+1)\pi/3)$ pour un entier $n \geqslant 0$ fixé. Alors :

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 2(u_{n+1} - 2u_n) \quad \text{d'après la relation de récurrence de l'énoncé} \\
&= 2\Big(2^{n+1} \cos((n+1)\pi/3) - 2 \times 2^n \cos(n\pi/3)\Big) \quad \text{d'après les hypothèses de récurrence} \\
&= 2^{n+2}\Big(\cos(n\pi/3 + \pi/3) - \cos(n\pi/3)\Big) \\
&= 2^{n+2}\Big(\cos(n\pi/3)\cos(\pi/3) - \sin(n\pi/3)\sin(\pi/3) - \cos(n\pi/3)\Big) \\
&\qquad \text{d'après la formule d'addition du cosinus} \\
&= 2^{n+2}\left(\cos(n\pi/3)\frac{1}{2} - \sin(n\pi/3)\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos(n\pi/3)\right) \\
&= 2^{n+2}\left(-\frac{1}{2}\cos(n\pi/3) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(n\pi/3)\right) = -2^{n+1}\Big(\cos(n\pi/3) + \sqrt{3}\sin(n\pi/3)\Big).
\end{aligned}$$

  D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
2^{n+2}\cos((n+2)\pi/3) &= 2^{n+2}\cos(n\pi/3 + 2\pi/3) \\
&= 2^{n+2}\Big(\cos(n\pi/3)\cos(2\pi/3) - \sin(n\pi/3)\sin(2\pi/3)\Big) \\
&\qquad \text{d'après la formule d'addition du cosinus} \\
&= 2^{n+2}\left(\cos(n\pi/3)\left(-\frac{1}{2}\right) - \sin(n\pi/3)\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= -2^{n+1}\Big(\cos(n\pi/3) + \sqrt{3}\sin(n\pi/3)\Big).
\end{aligned}$$

  Par conséquent, on a montré que si $u_n = 2^n \cos(n\pi/3)$ et $u_{n+1} = 2^{n+1}\cos((n+1)\pi/3)$ alors $u_{n+2} = 2^{n+2}\cos((n+2)\pi/3)$. De plus, cette implication est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

  — *Conclusion*. D'après le principe de récurrence double, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \geqslant 0,\ u_n = 2^n \cos(n\pi/3)}.$$

Finalement, on a bien trouvé $\boxed{(\rho, \theta) = (2, \pi/3)}$ tel que pour tout entier $n \geqslant 0$ on a $u_n = \rho^n \cos(n\theta)$.