DS n$^{\text{o}}$ 2 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de documents est interdit.
Il est recommandé de lire l'ensemble de l'énoncé attentivement et patiemment.
Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en mentionnant les hypothèses que vous avez été amené à formuler.
Le soin de la présentation, la qualité de la rédaction, ainsi que la rigueur, la clarté et la concision des raisonnements constitueront un facteur important d'appréciation de la copie.

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes en fonction de $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-2k}{k(n+1-k)}$ en inversant l'ordre de sommation.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{2}{k}\right)$ en reconnaissant une somme télescopique.
3. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{j}{i}$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Problème 1

Dans tout ce problème, on fixe un réel $\sigma \in]0,1[$ et on s'intéresse aux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définies par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$, de $u_1 \in \mathbb{R}$ et de la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geqslant 0,\ \ u_{n+2} = \sigma u_{n+1} + (1-\sigma)\min(1, u_n).$$

1. **[Informatique]**
   (a) En utilisant l'instruction `if`, écrire une fonction `min(x,y)` qui renvoie le minimum de `x` et `y`.
   (b) À l'aide de la fonction `min`, écrire une fonction `termeSuivant(sigma,un,unp1)` qui prend en arguments la variable `sigma` contenant le réel σ et les variables `un` et `unp1` contenant les termes u_n et u_{n+1}, et qui renvoie la valeur du terme u_{n+2}.
   (c) À l'aide de la fonction `termeSuivant`, écrire une fonction `terme(n,sigma,u0,u1)` qui prend en arguments la variable `n` contenant l'entier $n \geqslant 0$, la variable `sigma` contenant le réel σ et les variables `u0` et `u1` contenant les termes u_0 et u_1, et qui renvoie la valeur du terme u_n.
2. Dans cette question, on suppose que $u_2 \leqslant 1$.
   (a) Montrer que $u_n \leqslant 1$ pour tout entier $n \geqslant 2$.
   (b) Quel type de suite usuelle reconnaît-on pour $(u_n)_{n\geqslant 2}$?
   (c) Pour tout entier $n \geqslant 2$, exprimer u_n en fonction de n, σ, u_2 et u_3.
   (d) En déduire que :
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\sigma u_1 + (1-\sigma)(\min(1,u_0)+\min(1,u_1))}{2-\sigma}.$$
3. Dans cette question, on suppose que $u_2 > 1$.
   (a) Montrer que $u_1 > 1$.
   (b) Montrer que $u_n > 1$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
   (c) Quel type de suite usuelle reconnaît-on pour $(u_n)_{n\geqslant 2}$?
   (d) Pour tout entier $n \geqslant 2$, exprimer u_n en fonction de n, σ et u_2.
   (e) En déduire que u_n tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.
4. **[Informatique]** À l'aide des fonctions précédentes, écrire une fonction `limite(sigma,u0,u1)` qui prend en arguments la variable `sigma` contenant le réel σ et les variables `u0` et `u1` contenant les termes u_0 et u_1, et qui renvoie la valeur de la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x réelle.

(I_1) $x^{(x^4)} \leqslant x^{3x}$

(I_2) $6\cos(x) + 7 \leqslant 8\sin(x)$

(I_3) $\sin(7x) \leqslant \sin(5x)$

Problème 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $\Phi_n = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (i+j)$ et $\Psi_n = \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j)$.

1. Montrer que $\Phi_2 \neq \Psi_2$.
2. **[Informatique]** On considère la fonction `mystere` écrite ci-dessous.

```
def mystere(i,n):
    p=1
    for j in range(1,n+1):
        p = p*(i+j)
    return p
```

   (a) Que calcule la fonction `mystere` ?

   (b) En utilisant la fonction `mystere`, écrire une fonction `phi` qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ et renvoie la valeur de Φ_n.

   (c) En vous inspirant des fonctions précédentes, écrire une fonction `psi` qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ et renvoie la valeur de Ψ_n.

Pour la suite du problème, on fixe $n \in \mathbb{N}^\star$.

3. En simplifiant chaque membre à l'aide de factorielles, montrer qu'on a pour tout $i \in \mathbb{N}^\star$:

$$\prod_{j=1}^{n}(i+j) = \left(\binom{n+i+1}{n+1} - \binom{n+i}{n+1}\right) n!.$$

4. En déduire que $\Phi_n = \dfrac{(2n+1)!}{(n+1)!} - n!$.
5. **[Informatique]**

   (a) Écrire une fonction `fact` qui prend en argument un entier $k \in \mathbb{N}$ et renvoie la valeur de $k!$.

   (b) À l'aide de la fonction `fact`, écrire une fonction `phi2` similaire à la fonction `phi` mais utilisant le résultat de la question 4.

6. Montrer que $\Psi_n = C_n \prod_{i=1}^n \left(\frac{n+1}{2} + i\right)$ où C_n est un réel à déterminer en fonction de n et dont l'expression ne contient ni le symbole $\sum$ ni le symbole $\prod$.
7. Dans cette question, on suppose que n est impair et on pose $n = 2k+1$ où $k \in \mathbb{N}$.

   (a) Simplifier $\prod_{i=1}^{2k+1}(k+1+i)$ à l'aide de factorielles.

   (b) En déduire que $\Psi_n = n^n \dfrac{((3n+1)/2)!}{((n+1)/2)!}$.

8. Dans cette question, on suppose que n est pair et on pose $n = 2k$ où $k \in \mathbb{N}^\star$.

   (a) En séparant les indices pairs et impairs, montrer que :

$$\prod_{\ell=2}^{4k+1}(2k+\ell) = 4^{2k}\frac{(3k)!}{k!}\prod_{i=1}^{2k}\left(k+\tfrac{1}{2}+i\right).$$

   (b) En déduire que $\Psi_n = \left(\dfrac{n}{4}\right)^n \dfrac{(3n+1)!(n/2)!}{(n+1)!(3n/2)!}$.

9. **[Informatique]** On rappelle que l'instruction `n%2` est égale à `0` si `n` est pair et `1` si `n` est impair. À l'aide de la fonction `fact`, écrire une fonction `psi2` similaire à la fonction `psi` mais utilisant les résultats des questions 7 et 8.

Exercice 3

Soit $x \in [-1,1]$. Montrer que $\arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$.