DS n° 2 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de documents est interdit.
Il est recommandé de lire l'ensemble de l'énoncé attentivement et patiemment.
Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en mentionnant les hypothèses que vous avez été amené à formuler.
Le soin de la présentation, la qualité de la rédaction, ainsi que la rigueur, la clarté et la concision des raisonnements constitueront un facteur important d'appréciation de la copie.

Exercice 1

Résoudre l'équation suivante d'inconnue x réelle :

$$\left\lfloor 2x + \sqrt{3x-5} \right\rfloor = 4.$$

Informatique

On utilisera seulement le langage Python en indiquant soigneusement les indentations utilisées.

1. Écrire une fonction `absolue` qui prend en argument un réel et qui renvoie sa valeur absolue.
2. On considère la fonction ci-dessous.

```
def riddle(x):
    if x>=0:
        n=0
        while n+1<x:
            n=n+1
        return n
    else:
        n=0
        while n-1>x:
            n=n-1
        return n
```

   (a) Que renvoie la commande `riddle(0)` ?

   (b) Que renvoient les commandes `riddle(3.14)` et `riddle(-3.14)` ?

   (c) Que renvoient les commandes `riddle(99.9)` et `riddle(-99.9)` ?

   (d) Que renvoient les commandes `riddle(5)` et `riddle(-5)` ?

   (e) Que renvoient les commandes `riddle(42)` et `riddle(-42)` ?

   (f) Corriger la fonction `riddle` pour écrire une fonction `floor` qui prend en argument un réel et qui renvoie sa partie entière.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 4}{u_n^2 + 1}$ pour tout $n \geqslant 0$. Écrire une fonction `suite` qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie le terme u_n.

Exercice 2

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Simplifier $\dfrac{1}{2}\cos(\theta) - \dfrac{2}{3}\sin(\theta)$.
2. Linéariser $\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)$.
3. Factoriser $\cos(57\theta) - \cos(27\theta)$.

Problème 1

Le but de ce problème est de simplifier l'expression de la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3x - x^3}{2}\right).$$

1. Soit $y \in [-1, 1]$. Rappeler la définition de $\arcsin(y)$.
2. On pose la fonction $g : x \mapsto \dfrac{3x - x^3}{2}$.
   (a) Dresser le tableau des variations de g en précisant les images de -2 et $+2$.
   (b) En déduire l'ensemble de définition de f.
3. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.
   (b) Trouver deux constantes réelles $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ telles que : $\forall x \in [-2, 2],\ \sin(a \arcsin(bx)) = g(x)$.
4. Dans cette question, on fixe $x \in [-1, 1]$.
   (a) À l'aide du cercle trigonométrique, déterminer un encadrement de $3\arcsin(x/2)$.
   (b) Déduire des résultats précédents que $f(x) = \arcsin(x/2)$.
5. Soit $x \in]1, 2]$. En vous inspirant de la question précédente, montrer que $f(x) = \dfrac{\pi}{3} - \arcsin(x/2)$.
6. Déterminer une expression similaire pour $f(x)$ lorsque $x \in [-2, -1[$.

Exercice 3

Écrire le nombre complexe suivant sous forme algébrique :

$$\left(\frac{6 + \sqrt{6} + i\left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)}{4\sqrt{3} + i2\sqrt{6}}\right)^{43}.$$

Problème 2

Le but de ce problème est de résoudre l'équation suivante d'inconnue z complexe :

$$\overline{z} = z^2 - 3z + 7. \tag{E1}$$

1. (a) Montrer que (E1) n'admet pas de solutions réelles.
   (b) (E1) admet-elle des solutions imaginaires pures ?
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que z est solution de (E1) si et seulement si $\overline{z}$ aussi.
3. Soit $z \in \mathbb{C}$ une solution de (E1). Montrer qu'alors z est solution de l'équation suivante :
$$z = z^4 - 6z^3 + 20z^2 - 33z + 35. \tag{E2}$$
4. (a) Vérifier que $z_1 = 2 + i\sqrt{3}$ est solution de de (E2). Qu'en est-il de $z_2 = 2 - i\sqrt{3}$?
   (b) Déterminer une équation du second degré, notée (E3), dont les solutions sont z_1 et z_2.
5. Trouver deux constantes réelles $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^4 - 6z^3 + 20z^2 - 34z + 35 = \left(z^2 - 4z + 7\right)\left(z^2 + az + b\right).$$
6. Résoudre (E2).
7. En déduire les solutions de (E1).