Corrigé du DS n° 2 de mathématiques et d'informatique

Exercice 1

Le but de cet exercice est de démontrer que :

$$\forall x \in]-1,1], \quad \arccos(x) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right).$$

1. *Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ sur $]-1,1]$.*

▶ La fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$ est définie comme un quotient de racines. De plus la fonction racine $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Or :

$$1-x>0 \iff x<1 \quad \text{et} \quad 1+x>0 \iff x>-1.$$

Donc la fonction f est dérivable sur $]-1,1[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

Attention : la fonction f n'est pas dérivable en 1 car la fonction racine $t \mapsto \sqrt{t}$ n'est pas dérivable en 0 ! ! Il faut toujours bien justifier qu'une fonction est dérivable avant de la dériver.

On a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in]-1,1[, \quad f'(x) &= \frac{\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}\sqrt{1+x} - \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}\sqrt{1-x}}{\left(\sqrt{1+x}\right)^2} \\
&= \frac{\dfrac{-\left(\sqrt{1+x}\right)^2 - \left(\sqrt{1-x}\right)^2}{2\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}}{1+x} \\
&= \frac{-(1+x)-(1-x)}{2\sqrt{(1-x)(1+x)}(1+x)} \\
&= \frac{\overbrace{-1}^{<0}}{\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{>0}\underbrace{(1+x)}_{\substack{>0 \\ \text{car } x>-1}}} < 0.
\end{aligned}$$

On en déduit le tableau des variations de f :

x	-1		1
$f'(x)$	‖	$-$	‖
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0

car :

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{\overbrace{\sqrt{1-x}}^{\to\sqrt{2}>0}}{\underbrace{\sqrt{1+x}}_{\to 0^+}} = +\infty \quad \text{et} \quad f(1) = \frac{\sqrt{1-1}}{\sqrt{1+1}} = 0.$$

2. *En déduire l'ensemble des valeurs de* $2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$ *lorsque* x *parcourt* $]-1,1]$.

▶ D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$\left\{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \;\middle|\; x \in]-1,1]\right\} = \left\{f(x) \;\middle|\; x\in]-1,1]\right\} = [0,+\infty[.$$

De plus, la fonction arctan associe à chaque $t\in\mathbb{R}$ l'unique angle $\theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ tel que $\tan(\theta)=t$. On déduit du cercle trigonométrique que si t parcourt $[0,+\infty[$ alors $\theta=\arctan(t)$ parcourt $[0,\frac{\pi}{2}[$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}\left\{2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) \;\middle|\; x\in]-1,1]\right\} &= \left\{2\arctan(t) \;\middle|\; t\in [0,+\infty[\right\} \\ &= \left\{2\theta \;\middle|\; \theta \in [0,\tfrac{\pi}{2}[\right\} \\ &= \boxed{[0,\pi[}.\end{aligned}$$

3. *Soit* $\theta\in[0,\pi[$. *Exprimer* $\cos(\theta)$ *en fonction de* $\tan(\theta/2)$.

▶ On a :

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \cos\left(2\times\tfrac{\theta}{2}\right) \\ &= \cos^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right) && \text{d'après la formule de duplication du cosinus} \\ &= \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} && \text{d'après le théorème de Pythagore} \\ &= \frac{1-\dfrac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}}{1+\dfrac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} && \text{car } \cos^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\neq 0 \text{ puisque } \tfrac{\theta}{2}\in[0,\tfrac{\pi}{2}[\\ &= \frac{1-\left(\dfrac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^2} \\ &= \boxed{\frac{1-\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}} && \text{d'après le théorème de Thalès.}\end{aligned}$$

4. *Conclure.*

▶ Soit $x\in]-1,1]$. Par définition, $\arccos(x)$ est l'unique angle $\theta\in[0,\pi]$ tel que $\cos(\theta)=x$. On pose $\theta = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$. Vérifions que $\theta\in[0,\pi]$ et que $\cos(\theta)=x$. D'après le résultat de la question

2, on a $\theta = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) \in [0,\pi[$ donc en particulier $\theta \in [0,\pi]$. De plus, on a d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \frac{1-\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \frac{1-\tan^2\left(\frac{2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)}{2}\right)} \quad \text{par définition de } \theta \\
&= \frac{1-\left(\tan\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right)\right)^2}{1+\left(\tan\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)\right)\right)^2} \\
&= \frac{1-\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2}{1+\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2} \quad \text{par définition de la fonction arctangente} \\
&= \frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}} = \frac{(1+x)-(1-x)}{(1+x)+(1-x)} = \frac{2x}{2} = x.
\end{aligned}$$

On en déduit bien que $\theta = \arccos(x)$ par définition de la fonction arccosinus. Puisque ceci est vrai pour tout $x \in]-1,1]$, on a bien montré que :

$$\boxed{\forall x \in]-1,1], \quad \arccos(x) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)}.$$

Exercice 2

Simplifier les sommes et les produits suivants en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{4}{2k+1}\right)$ *en reconnaissant une somme télescopique.*

► On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{4}{2k+1}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{2k+1+4}{2k+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Big[\ln(2k+5) - \ln(2k+1)\Big]
\end{aligned}$$

Il faut comprendre les simplifications dans sa tête ou au brouillon pour déterminer les termes restants :

$$= \Big[\underbrace{\ln(7)}_{(*)} - \ln(3)\Big] + \Big[\underbrace{\ln(9)}_{(**)} - \ln(5)\Big] + \Big[\underbrace{\ln(11)} - \underbrace{\ln(7)}_{(*)}\Big] + \Big[\underbrace{\ln(13)} - \underbrace{\ln(9)}_{(**)}\Big] + \dots$$

$$\dots + \Big[\underbrace{\ln(2n+1)}_{(***)} - \underbrace{\ln(2n-3)}\Big] + \Big[\ln(2n+3) - \underbrace{\ln(2n-1)}\Big] + \Big[\ln(2n+5) - \underbrace{\ln(2n+1)}_{(***)}\Big].$$

$$\begin{aligned}
&= -\ln(3) - \ln(5) + \ln(2n+3) + \ln(2n+5) \quad \text{après simplifications} \\
&= \boxed{\ln\left(\frac{(2n+3)(2n+5)}{15}\right)}.
\end{aligned}$$

2. $\prod_{k=1}^{n} \exp\left(\binom{n}{k}\right)$ *à l'aide de la formule du binôme de Newton.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} \exp\left(\binom{n}{k}\right) &= \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\right) \quad \text{par propriété de la fonction exponentielle}\\
&= \exp\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} - \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1}\right) \quad \text{par associativité de la somme}\\
&= \exp\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} - 1\right) \quad \text{car } 1^x = 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}\\
&= \exp\left((1+1)^n - 1\right) \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton}\\
&= \boxed{\exp\left(2^n - 1\right)}.
\end{aligned}$$

Attention : la somme de la formule du binôme de Newton commence à l'indice $k=0$ et non à $k=1$. Pensez à vérifier rapidement vos résultats pour des petits valeurs de n. Par exemple pour $n=1$:

$$\prod_{k=1}^{1} \exp\left(\binom{1}{k}\right) = \exp\left(\underbrace{\binom{1}{1}}_{=1}\right) = e = \exp\left(2^1 - 1\right) \quad \textit{alors que} \quad \exp\left(2^1\right) = e^2 \neq e.$$

3. $\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor^2$ *en séparant les indices pairs et impairs.*

▶ On a en séparant les indices pairs et impairs :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor \frac{k+1}{2}\right\rfloor^2 &= \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{n}\left\lfloor \frac{k+1}{2}\right\rfloor^2 + \sum_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{n}\left\lfloor \frac{k+1}{2}\right\rfloor^2\\
&= \sum_{1 \leqslant 2\ell \leqslant n}\left\lfloor \frac{2\ell+1}{2}\right\rfloor^2 + \sum_{1 \leqslant 2\ell+1 \leqslant n}\left\lfloor \frac{2\ell+1+1}{2}\right\rfloor^2\\
&= \sum_{\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant \frac{n}{2}}\left\lfloor \ell + \tfrac{1}{2}\right\rfloor^2 + \sum_{0 \leqslant \ell \leqslant \frac{n-1}{2}}\lfloor \ell + 1\rfloor^2\\
&= \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}\ell^2 + \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor}(\ell+1)^2 \quad \text{par définition de la partie entière}\\
&= \frac{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor\left(\lfloor \frac{n}{2}\rfloor + 1\right)\left(2\lfloor \frac{n}{2}\rfloor + 1\right)}{6} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor + 1} j^2 \quad \text{en posant le décalage d'indice } j = \ell + 1\\
&= \frac{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor\left(\lfloor \frac{n}{2}\rfloor + 1\right)\left(2\lfloor \frac{n}{2}\rfloor + 1\right)}{6} + \frac{\left(\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor + 1\right)\left(\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor + 1 + 1\right)\left(2\left(\lfloor \frac{n-1}{2} + 1\right)\rfloor + 1\right)}{6}\\
&= \frac{1}{6}\Big(\lfloor \tfrac{n}{2}\rfloor\left(\lfloor \tfrac{n}{2}\rfloor + 1\right)\left(2\lfloor \tfrac{n}{2}\rfloor + 1\right) + \left(\lfloor \tfrac{n-1}{2}\rfloor + 1\right)\left(\lfloor \tfrac{n-1}{2}\rfloor + 2\right)\left(2\lfloor \tfrac{n-1}{2}\rfloor + 3\right)\Big).
\end{aligned}$$

On raisonne ensuite par disjonction de cas pour simplifier le résultat.

1er cas : n est pair. Alors $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n}{2}$ et $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = \frac{n}{2} - 1$ donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor^2 &= \frac{1}{6}\Big(\tfrac{n}{2}\left(\tfrac{n}{2}+1\right)\left(2\tfrac{n}{2}+1\right) + \tfrac{n}{2}\left(\tfrac{n}{2}+1\right)\left(2\tfrac{n}{2}+1\right)\Big) \\
&= \frac{2n(n+2)(n+1)}{6 \times 4} \\
&= \boxed{\frac{n(n+1)(n+2)}{12}}.
\end{aligned}$$

2e cas : n est impair. Alors $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{n-1}{2}$ et $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor = \frac{n-1}{2}$ donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor^2 &= \frac{1}{6}\Big(\tfrac{n-1}{2}\left(\tfrac{n-1}{2}+1\right)\left(2\tfrac{n-1}{2}+1\right) + \left(\tfrac{n-1}{2}+1\right)\left(\tfrac{n-1}{2}+2\right)\left(2\tfrac{n-1}{2}+3\right)\Big) \\
&= \frac{(n+1)}{6 \times 4}\Big((n-1)n + (n+3)(n+2)\Big) \\
&= \frac{(n+1)}{24}\Big(2n^2 + 4n + 6\Big) \\
&= \boxed{\frac{(n+1)(n^2+2n+3)}{12}}.
\end{aligned}$$

4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right)$ *en inversant l'ordre du produit.*

► On a :

$$\begin{aligned}
P &= \prod_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) \\
&= \prod_{\ell=1}^{n} \tan\left(\frac{(n+1-\ell)\pi}{2(n+1)}\right) && \text{en posant l'inversion de l'ordre du produit} \\
& && \ell = n+1-k \iff k = n+1-\ell \\
&= \prod_{\ell=1}^{n} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\ell\pi}{2(n+1)}\right) \\
&= \prod_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\tan\left(\frac{\ell\pi}{2(n+1)}\right)} && \text{par propriété de la fonction tangente} \\
&= \frac{1}{\prod_{\ell=1}^{n} \tan\left(\frac{\ell\pi}{2(n+1)}\right)} && \text{par multiplicativité du produit} \\
&= \frac{1}{P} && \text{car l'indice du produit est une variable muette.}
\end{aligned}$$

On en déduit que $P^2 = 1$ donc que $P = -1$ ou $P = 1$. Or on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$0 < k < n+1 \quad \text{donc} \quad 0 < \frac{k\pi}{2(n+1)} < \frac{\pi}{2} \quad \text{donc} \quad \tan\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) > 0 \quad \text{d'après le cercle trigonométrique.}$$

Ainsi, P est un produit de facteurs strictement positifs. On en déduit que $P = 1$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{k\pi}{2(n+1)}\right) = 1}.$$

Exercice 3

On fixe $n \in \mathbb{N}$ dans cet exercice et on pose : $R = \displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ 0 \leqslant j \leqslant n}} 3^{i+j}$ et $T = \displaystyle\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} 3^{i+j}$.

1. ***[Informatique]***

(a) *Écrire en Python une fonction* `somme(x,k,p)` *qui prend en arguments un réel x et deux entiers naturels k et p puis qui renvoie la valeur de la somme $\sum_{\ell=0}^{p} x^{k+\ell}$.*

▶ Par exemple :

```
def sommme(x,k,p):
    S=0
    for l in range(p+1):
        S=S+x**(k+l)
    return S
```

Attention : la commande `range(p)` *renvoie la liste des p premiers entiers en commençant par 0, c'est-à-dire $0, 1, 2, \dots, (p-1)$. Pour obtenir la liste des $p+1$ entiers de 0 à p, il faut donc utiliser la commande* `range(p+1)`.

On peut également utiliser la formule de la somme des termes d'une suite géométrique de raison x :

$$\sum_{\ell=0}^{p} x^{k+\ell} = x^k \frac{1-x^{p+1}}{1-x}.$$

Mais attention : cette formule est valable seulement pour $x \neq 1$!! Si $x = 1$, la somme est égale à $p+1$. On peut donc écrire la fonction `somme` *à l'aide des commandes* `if` *et* `else` *pour réaliser une disjonction de cas. Par exemple :*

```
def somme(x,k,p):
    if x==1:
        return p+1
    else:
        return (x**k)*(1-x**(p+1))/(1-x)
```

(b) *En utilisant la fonction* `somme` *de la question précédente, écrire deux fonctions* `sommeR` *et* `sommeT` *qui prennent en argument l'entier n puis qui revoient la valeur des sommes R et T respectivement.*

▶ On a :

$$R = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant n}} 3^{i+j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} 3^{i+j} \quad \text{et} \quad T = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 3^{i+j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} 3^{i+j}.$$

On reconnaît des sommes doubles : sur un Rectangle d'indices pour R et sur un Triangle d'indices pour T.

Par exemple :

```
def sommeR(n):
    S=0
    for j in range(n+1):
        S=S+somme(3,j,n)
    return S
```

```
def sommeT(n):
    S=0
    for j in range(n+1):
        S=S+somme(3,j,j)
    return S
```

2. *Calculer R.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
R &= \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}} 3^{i+j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} 3^{i+j}\\
&= \sum_{j=0}^{n}\left(3^j\frac{3^{n+1}-1}{3-1}\right) \quad \text{en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison 3}\\
&= \frac{3^{n+1}-1}{2}\sum_{j=0}^{n}3^j \quad \text{par linéarité de la somme}\\
&= \frac{3^{n+1}-1}{2}3^0\frac{3^{n+1}-1}{3-1} \quad \text{en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison 3}\\
&= \boxed{\frac{\left(3^{n+1}-1\right)^2}{4}}.
\end{aligned}$$

3. *Calculer T.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 3^{i+j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} 3^{i+j}\\
&= \sum_{j=0}^{n}\left(3^j\frac{3^{j+1}-1}{3-1}\right) \quad \text{en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison 3}\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{n}3^{2j+1}-\sum_{j=0}^{n}3^j\right) \quad \text{par linéarité de la somme}\\
&= \frac{1}{2}\left(3\sum_{j=0}^{n}9^j-3^0\frac{3^{n+1}-1}{3-1}\right) \quad \text{par linéarité et en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison 3}\\
&= \frac{1}{2}\left(3\times 9^0\frac{9^{n+1}-1}{9-1}-\frac{3^{n+1}-1}{2}\right) \quad \text{en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison 9}\\
&= \frac{1}{16}\left(3.9^{n+1}-3-4.3^{n+1}+4\right)\\
&= \boxed{\frac{3\times 9^{n+1}-4\times 3^{n+1}+1}{16}}.
\end{aligned}$$

Exercice 4

Le but de cet exercice est de calculer la limite de la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n\geqslant 1,\quad p_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right).$$

1. *Calculer p_1, p_2 et p_3.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
p_1 &= \prod_{k=1}^{1}\left(1+\frac{k}{1^2}\right)=\left(1+\frac{1}{1}\right)=\boxed{2},\\
p_2 &= \prod_{k=1}^{2}\left(1+\frac{k}{2^2}\right)=\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{2}{4}\right)=\frac{5\times 3}{4\times 2}=\boxed{\frac{15}{8}},\\
\text{et}\quad p_3 &= \prod_{k=1}^{3}\left(1+\frac{k}{3^2}\right)=\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{2}{9}\right)\left(1+\frac{3}{9}\right)=\frac{10\times 11\times 4}{9\times 9\times 3}=\boxed{\frac{440}{243}}.
\end{aligned}$$

2. *[**Informatique**] Écrire en Python une fonction* `produit` *qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ puis qui renvoie la valeur de p_n.*

▶ Par exemple :

```
def produit(n):
    P=1
    for k in range(1,n+1):
        P=P*(1+k/n**2)
    return P
```

Pour la suite de l'énoncé, on pose $s_n = \ln(p_n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

3. *Écrire les termes de la suite $(s_n)_{n\geqslant 1}$ à l'aide du symbole Σ.*

▶ On a :

$$\forall n \geqslant 1, \quad s_n = \ln(p_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right) = \boxed{\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)}$$

par propriété de la fonction logarithme.

4. *Montrer que :*

$$\forall x > 0, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

▶ On pose les fonctions $f : x \mapsto \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$ et $g : x \mapsto x - \ln(1+x)$. Les fonctions f et g sont dérivables sur $]0,+\infty[$ comme sommes et composées de fonctions usuelles. De plus :

$$\forall x > 0, \quad \begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - \left(1 - \dfrac{2x}{2}\right) = \dfrac{1}{1+x} - 1 + x = \dfrac{1+(-1+x)(1+x)}{1+x} = \dfrac{\overbrace{x^2}^{>0}}{\underbrace{1+x}_{\substack{>0 \\ \text{car } x>0}}} > 0 \\[2em] g'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1+x-1}{1+x} = \dfrac{\overbrace{x}^{>0}}{\underbrace{1+x}_{\substack{>0 \\ \text{car } x>0}}} > 0. \end{cases}$$

On en déduit les tableaux de variations de f et g :

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$0 \nearrow$
$g(x)$	$0 \nearrow$

car :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\ln(1+x)}_{\to \ln(1)=0} - \underbrace{\left(x - \frac{x^2}{2}\right)}_{\to 0} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{x}_{\to \ln(1)=0} - \underbrace{\ln(1+x)}_{\to 0} = 0.$$

Les limites en $+\infty$ sont inutiles, mais on peut montrer qu'elles sont égales à $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées.

On en déduit que f et g sont minorées par 0, c'est-à-dire que $f(x)\ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\geqslant 0$ et $g(x)=x-\ln(1+x)\geqslant 0$ pour tout $x>0$. Par conséquent, on a bien montré que :

$$\boxed{\forall x>0,\quad x-\frac{x^2}{2}\leqslant \ln(1+x)\leqslant x}.$$

5. *En déduire que :*

$$\forall n\geqslant 1,\quad \frac{(n+1)(6n^2-2n-1)}{6n^3}\leqslant s_n\leqslant \frac{n+1}{2n}.$$

▶ Soient $n\geqslant 1$ et $k\in[\![1,n]\!]$. En appliquant le résultat de la question précédent à $x=\frac{k}{n^2}>0$, on obtient :

$$\underbrace{\frac{k}{n^2}-\frac{\left(\frac{k}{n^2}\right)^2}{2}}_{=\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}}\leqslant \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\leqslant \frac{k}{n^2}.$$

En sommant toutes ces inégalités pour k allant de 1 à n, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}\right)\leqslant \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)}_{=s_n}\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}.$$

On reconnaît un encadrement de s_n d'après le résultat de la question 3. On simplifie le majorant et le minorant à l'aide de calculs de sommes :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}&=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k &&\text{par linéarité de la somme}\\
&=\frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)}{2} &&\text{en reconnaissant la somme des premiers entiers}\\
&=\frac{n+1}{2n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{et}\quad \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}\right)&=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n}k^2 &&\text{par linéarité de la somme}\\
&=\frac{n+1}{2n}-\frac{1}{2n^4}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} &&\text{d'après le calcul précédent et en reconnaissant la somme des premiers carrés}\\
&=\frac{n+1}{2n}-\frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}\\
&=\frac{(n+1)}{12n^3}\Big(6n^2-(2n+1)\Big)\\
&=\frac{(n+1)(6n^2-2n-1)}{12n^3}.
\end{aligned}$$

On remplaçant ces expressions dans l'encadrement de s_n, on obtient bien :

$$\boxed{\forall n\geqslant 1,\quad \frac{(n+1)(6n^2-2n-1)}{12n^3}\leqslant s_n\leqslant \frac{n+1}{2n}}.$$

6. *Conclure.*

▶ On a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0}}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\text{et}\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)(6n^2-2n-1)}{12n^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\Big(1+\overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0}\Big)\Big(6-\overbrace{\frac{2}{n}}^{\to 0}-\overbrace{\frac{1}{n^2}}^{\to 0}\Big)}{12}=\frac{1\times 6}{12}=\frac{1}{2}.$$

D'après le théorème de limite par encadrement et le résultat de la question précédente, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{1}{2}.$$

Or on a posé $s_n = \ln(p_n)$ pour tout $n \geqslant 1$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} \exp\Big(\ln(p_n)\Big) = \lim_{n\to+\infty} \exp(s_n) = \exp\left(\tfrac{1}{2}\right) = \boxed{\sqrt{e}}.$$

Exercice 5

Résoudre l'équation suivante d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(24\theta) + \cos(25\theta) + \cos(26\theta) + \cdots + \cos(41\theta) + \cos(42\theta) = 0.$$

▶ On a pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\cos(24\theta) + \cos(25\theta) + \cos(26\theta) + \cdots + \cos(41\theta) + \cos(42\theta)\\
=&\sum_{k=24}^{42} \cos(k\theta)\\
=&\sum_{k=24}^{42} \operatorname{Re}\left(e^{k\theta}\right) \quad \text{par définition de la fonction cosinus}\\
=&\operatorname{Re}\left(\sum_{k=24}^{42} \left(e^{i\theta}\right)^k\right) \quad \text{par propriétés de la partie réelle et de la puissance.}
\end{aligned}$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta}$. De plus, si $e^{i\theta} = 1$ alors :

$$\cos(24\theta) + \cos(25\theta) + \cos(26\theta) + \cdots + \cos(41\theta) + \cos(42\theta) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=24}^{42} \left(e^{i\theta}\right)^k\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=24}^{42} 1\right) = 19 \neq 0.$$

Autrement dit, les valeurs de θ telles que $e^{i\theta} = 1$ ne sont pas solutions de l'équation. On peut donc supposer que $e^{i\theta} \neq 1$ et alors :

N'oubliez pas de distinguer deux cas pour une somme des termes d'une suite géométrique : lorsque la raison est égale à 1 (dans ce cas la suite est constante) et lorsque la raison est différente de 1 (dans ce cas on peut appliquer la formule).

$$\begin{aligned}
&\cos(24\theta) + \cos(25\theta) + \cos(26\theta) + \cdots + \cos(41\theta) + \cos(42\theta)\\
=&\operatorname{Re}\left(\sum_{k=24}^{42} \left(e^{i\theta}\right)^k\right)\\
=&\operatorname{Re}\left(\left(e^{i\theta}\right)^{24} \frac{1-\left(e^{i\theta}\right)^{19}}{1-e^{i\theta}}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{i24\theta} \frac{e^{i0} - e^{i19\theta}}{e^{i0} - e^{i\theta}}\right)\\
=&\operatorname{Re}\left(e^{i24\theta} \frac{2i\sin\left(\frac{0-19\theta}{2}\right) e^{i\frac{0+19\theta}{2}}}{2i\sin\left(\frac{0-\theta}{2}\right) e^{i\frac{0+\theta}{2}}}\right) \quad \text{d'après une factorisation par l'angle moitié}\\
=&\operatorname{Re}\left(e^{i24\theta} \frac{\sin(19\theta/2)\, e^{i19\theta/2}}{\sin(\theta/2)\, e^{i\theta/2}}\right) \quad \text{car la fonction sinus est impaire}\\
=&\operatorname{Re}\left(\frac{\sin(19\theta/2)}{\sin(\theta/2)} e^{i\overbrace{\left(24+\frac{19}{2}-\frac{1}{2}\right)}^{=33}\theta}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\sin(19\theta/2)}{\sin(\theta/2)} (\cos(33\theta) + i\sin(33\theta))\right)\\
=&\frac{\sin(19\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \cos(33\theta).
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
& \cos(24\theta)+\cos(25\theta)+\cos(26\theta)+\cdots+\cos(41\theta)+\cos(42\theta)=0 \\
\iff & \frac{\sin(19\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\cos(33\theta)=0 \\
\iff & \sin(19\theta/2)=0 \quad \text{ou} \quad \cos(33\theta)=0 \quad \text{par intégrité du produit} \\
\iff & \frac{19\theta}{2}\equiv 0\ [\pi] \quad \text{ou} \quad 33\theta\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi] \quad \text{d'après le cercle trigonométrique} \\
\iff & \theta\equiv 0\ \left[\tfrac{2\pi}{19}\right] \quad \text{ou} \quad \theta\equiv\frac{\pi}{66}\ \left[\tfrac{\pi}{33}\right].
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{\left\{\tfrac{2k\pi}{19}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\tfrac{\pi}{66}+\tfrac{k\pi}{33}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}}.$$

Ce qui donne un total de $19+66=85$ solutions principales dans l'intervalle $[0,2\pi[$.

Exercice 6

On considère la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$a_0=a_1=3 \quad \textit{et} \quad \forall n\geqslant 0,\ a_{n+2}=2a_{n+1}-9a_n+16.$$

1. ***[Informatique]** On considère la fonction ci-dessous.*

```
def n1port3koua(n):
    a=3
    b=3
    for k in range(n):
        c=2*b-9*a+16
        b=c
        a=b
    return b
```

(a) *Que renvoie la commande* `n1port3koua(0)` *?*

▶ Dans l'ordre, la fonction exécute les opérations suivantes :
— les variables `a` et `b` prennent la valeur 3,
— la boucle `for` est itérée 0 fois,
— la fonction renvoie la valeur de `b`, c'est-à-dire $\boxed{3}$.

(b) *Que renvoie la commande* `n1port3koua(1)` *?*

▶ Dans l'ordre, la fonction exécute les opérations suivantes :
— les variables `a` et `b` prennent la valeur 3,
— la boucle `for` est itérée 1 fois,
— la variable `c` prend la valeur $2\times 3-9\times 3+16=-5$,
— la variable `b` prend la valeur -5,
— la variable `a` prend la valeur -5,
— la fonction renvoie la valeur de `b`, c'est-à-dire $\boxed{-5}$.

(c) *Que renvoie la commande* `n1port3koua(2)` *?*

▶ Dans l'ordre, la fonction exécute les opérations suivantes :
— les variables `a` et `b` prennent la valeur 3,
— la boucle `for` est itérée 2 fois,
— la variable `c` prend la valeur $2\times 3-9\times 3+16=-5$,
— la variable `b` prend la valeur -5,
— la variable `a` prend la valeur -5,
— la variable `c` prend la valeur $2\times(-5)-9\times(-5)+16=51$,

— la variable `b` prend la valeur 51,
— la variable `a` prend la valeur 51,
— la fonction renvoie la valeur de `b`, c'est-à-dire $\boxed{51}$.

(d) Corriger la fonction `n1port3koua` *pour écrire une fonction* `suite` *qui prend en argument un entier $n \geqslant 0$ puis qui renvoie la valeur de a_n.*

▶

On constate deux problèmes en répondant aux questions précédentes :
— *La commande* `n1port3koua(1)` *renvoie a_2 au lieu de a_1. Au début du programme, les variables* `a` *et* `b` *prennent les valeurs de a_0 et a_1 respectivement. Ainsi, après n itérations de la boucle* `for`*, les variables* `a` *et* `b` *auront pour valeur a_n et a_{n+1}. Pour obtenir la valeur de a_n, la fonction doit donc renvoyer la valeur de la variable* `a` *et non de la variable* `b`*.*
— *La commande* `n1port3koua(2)` *renvoie $2a_2 - 9a_2 + 16$ au lieu de $a_2 - 9a_1 + 16$. Au début de la k-ième itération de la boucle* `for`*, si les variables* `a` *et* `b` *ont pour valeur a_k et a_{k+1} respectivement alors elles prendront la même valeur de $a_{k+2} = 2a_{k+1} - 9a_k + 16$. Pour corriger le calcul de la prochaine itération, les variables* `a` *et* `b` *doivent prendre les valeurs a_{k+1} et a_{k+2}.*

Par exemple :

```
def suite(n):
    a=3
    b=3
    for k in range(n):
        c=2*b-9*a+16
        a=b
        b=c
    return a
```

2. Montrer qu'il existe un réel α tel que $(u_n = a_n + \alpha)_{n\geqslant 0}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

▶ On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse. On cherche un réel α tel que $(u_n = a_n + \alpha)_{n\geqslant 0}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On a pour tout $n \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= a_{n+2} + \alpha \quad \text{par définition de la suite } (u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= 2a_{n+1} - 9a_n + 16 + \alpha \quad \text{par définition de la suite } (a_n)_{n\geqslant 0} \\ &= 2(u_{n+1} - \alpha) - 9(u_n - \alpha) + 16 + \alpha \quad \text{par définition de la suite } (u_n)_{n\geqslant 0} \\ &= 2u_{n+1} - 9u_n + 16 + 8\alpha. \end{aligned}$$

Ainsi, il suffit que $16 + 8\alpha = 0 \iff \alpha = -2$.
Synthèse. On pose $\boxed{\alpha = -2}$. Vérifions que $(u_n = a_n + \alpha = a_n - 2)_{n\geqslant 0}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. D'après le calcul effectué dans l'analyse, on a :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 9u_n.$$

On reconnaît bien une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On a donc bien trouvé un réel $\boxed{\alpha = -2}$ tel que $(u_n = a_n + \alpha = a_n - 2)_{n\geqslant 0}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

3. Exprimer u_n en fonction de $n \geqslant 0$.

▶ D'après ce qu'on a trouvé à la question précédente, l'équation caractéristique associée à la suite récurrente linéaire d'ordre 2 $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est :

$$q^2 = 2q - 9 \iff q^2 - 2q + 9 = 0.$$

Son discriminant vaut $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 9 = -32 < 0$. Elle admet donc deux racines complexes conjuguées : $\frac{2+i\sqrt{32}}{2} = 1+i2\sqrt{2}$ et $1-i2\sqrt{2}$. Écrivons ces racines complexe sous forme exponentielle. On a :

$$\left|1+i2\sqrt{2}\right| = \sqrt{1^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1+8} = 3.$$

Puisque la partie imaginaire de $1+i2\sqrt{2} = 3\left(\frac{1}{3} + i\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ est positive, on en déduit que son argument est congru à $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ modulo 2π. Ainsi :

$$1+i2\sqrt{2} = 3e^{i\arccos(1/3)} \quad \text{et} \quad 1-i2\sqrt{2} = 3e^{-i\arccos(1/3)}.$$

Puisque la partie réelle est positive, on aurait aussi pu choisir comme argument $\arcsin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$*. En fait,* $\arccos\left(\frac{1}{3}\right) = \arcsin\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ *comme on peut le constater sur un cercle trigonométrique.*

Ainsi, d'après le théorème des suites récurrentes linéaires d'ordre 2, on sait qu'il existe deux constantes $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n = 3^n \left(A\cos\left(n\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right) + B\sin\left(n\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right).$$

Pour déterminer les constantes A et B, on utilise les premiers termes de la suite. Pour $n = 0$, on a $u_0 = a_0 + \alpha = 3 - 2 = 1$ donc :

$$1 = \underbrace{3^0}_{=1}\left(A\underbrace{\cos\left(0\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)}_{=\cos(0)=1} + B\underbrace{\sin\left(0\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)}_{=\sin(0)=0}\right) = A.$$

On en déduit que $A = 1$. De même, pour $n = 1$ on a $u_1 = a_1 + \alpha = 3 - 2 = 1$ donc :

$$1 = \underbrace{3^1}_{=3}\left(\underbrace{A}_{=1}\underbrace{\cos\left(1\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)}_{=\cos(\arccos(1/3))=1/3} + B\underbrace{\sin\left(1\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)}_{=\sin(\arccos(1/3))=2\sqrt{2}/3}\right) = 1 + \tfrac{2\sqrt{2}}{3}B.$$

On en déduit que $B = 0$. Finalement, on obtient :

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad u_n = 3^n\cos\left(n\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)}.$$

4. *En déduire l'expression de a_n en fonction de $n \geqslant 0$.*

► Puisque $(u_n = a_n + \alpha = a_n - 2)_{n\geqslant 0}$ d'après le résultat de la question 2, on a d'après le résultat de la question précédente :

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad a_n = u_n + 2 = 3^n\cos\left(n\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right) + 2}.$$

Exercice 7

Une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est dite de Cauchy lorsque pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \geqslant 1$ à partir duquel deux termes quelconques de la suite sont séparés d'au plus ε, autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \geqslant 1, \quad \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad (n \geqslant N \text{ et } p \geqslant N) \implies \left|u_n - u_p\right| \leqslant \varepsilon.$$

Montrer que la suite $\left(u_n = \frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy.

► Soit $\varepsilon > 0$. On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse. On cherche un rang $N \geqslant 1$ tel que :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad (n \geqslant N \text{ et } p \geqslant N) \implies \left|u_n - u_p\right| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. On suppose que $n \geqslant N$ et $p \geqslant N$. Alors :

$$\left|u_n - u_p\right| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right| = \left|\frac{p-n}{np}\right| = \frac{|p-n|}{np}.$$

Si $p \leqslant n$, on obtient :

$$\left|u_n - u_p\right| = \frac{p-n}{np} \leqslant \frac{p}{np} = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N}.$$

De même, si $n \leqslant p$:

$$\left|u_n - u_p\right| = \frac{n-p}{np} \leqslant \frac{n}{np} = \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{N}.$$

Ainsi $|u_n - u_p| \leqslant 1/N$ dans tous les cas. Il suffit donc de choisir un rang $N \geqslant 1$ tel que $1/N \leqslant \varepsilon$ afin que $|u_n - u_p| \leqslant \varepsilon$ par transitivité. Or :

$$\frac{1}{N} \leqslant \varepsilon \iff N \geqslant \frac{1}{\varepsilon}.$$

On ne peut pas poser $N = 1/\varepsilon$ car on cherche un rang entier. Mais il suffit de prendre un entier supérieur à $1/\varepsilon$, par exemple en utilisant la partie entière.

Synthèse. On pose $\boxed{N = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1}$. Alors N est bien un entier supérieur ou égal à 1. Vérifions que :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad (n \geqslant N \text{ et } p \geqslant N) \implies \left|u_n - u_p\right| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. On suppose que $n \geqslant N$ et $p \geqslant N$. On a en reprenant les calculs effectués dans l'analyse :

$$\left|u_n - u_p\right| \leqslant \frac{1}{N}.$$

Or on a par définition de la partie entière :

$$\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{\varepsilon} < \underbrace{\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1}_{=N} \quad \text{donc} \quad \varepsilon > \frac{1}{N}.$$

Par transitivité, on en déduit que $|u_n - u_p| \leqslant \varepsilon$. On a donc bien trouvé un rang $N \geqslant 1$ tel que :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad (n \geqslant N \text{ et } p \geqslant N) \implies \left|u_n - u_p\right| \leqslant \varepsilon.$$

Puisque ceci est vrai pour un $\varepsilon > 0$ quelconque, c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$. Finalement, on a bien montré que $\boxed{\text{la suite } \left(u_n = \frac{1}{n}\right)_{n \geqslant 1} \text{ est de Cauchy}}$.