Corrigé du DS n° 2 de mathématiques et d'informatique

Exercice 1

Résoudre l'équation suivante d'inconnue x réelle :

$$\left\lfloor 2x+\sqrt{3x-5}\right\rfloor = 4.$$

► Puisque la fonction racine carrée est définie sur $[0,+\infty[$, l'équation est bien définie pour les valeurs de l'inconnue qui vérifient $3x-5 \geqslant 0 \iff \boxed{x \geqslant \frac{5}{3}}$. D'après la définition de la partie entière, on a :

$$\begin{aligned}(E) : \left\lfloor 2x+\sqrt{3x-5}\right\rfloor = 4 &\iff 4 \leqslant 2x+\sqrt{3x-5} < 5 \\ &\iff \Big(\underbrace{\sqrt{3x-5} \geqslant 4-2x}_{1^{\text{re}}\text{ inéquation}} \text{ et } \underbrace{\sqrt{3x-5} < 5-2x}_{2^{\text{e}}\text{ inéquation}}\Big).\end{aligned}$$

Attention avant d'élever au carré pour simplifier la racine : il faut d'abord isoler la racine d'un côté de l'inéquation (sinon elle ne se simplifie pas) puis vérifier que l'autre côté de l'inéquation est positif pour pouvoir utiliser la croissance de la fonction carrée sur $[0,+\infty[$.

- 1^re^ inéquation. On a : $4-2x \geqslant 0 \iff x \leqslant 2$. On raisonne par disjonction de cas.
  — *1^er^cas* : $x \in \left[\frac{5}{3}, 2\right]$. Alors :

$$\begin{aligned}\sqrt{3x-5} \geqslant 4-2x &\iff 3x-5 \geqslant (4-2x)^2 \\ &\qquad \text{car la fonction carrée est strictement croissante sur } [0,+\infty[\\ &\iff 3x-5 \geqslant 16-16x+4x^2 \\ &\iff 4x^2-19x+21 \leqslant 0.\end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = (-19)^2 - 4\times 4\times 21 = 25 > 0$

N'hésitez pas à poser vos calculs au brouillon et utiliser les identités remarquables pour gagner du temps :

$$19^2 = (20-1)^2 = 400-40+1 = 361$$

$$\textit{et} \quad 4\times 4\times 21 = 16(20+1) = 320+16 = 336$$

qui admet pour racines $(19+\sqrt{25})/8 = 3$ et $(19-\sqrt{25})/8 = 7/4$. On a le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$\frac{7}{4}$		2		3		$+\infty$
$4x^2-19x+21$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

On en déduit que dans le cas où $x \in \left[\frac{5}{3}, 2\right]$:

$$\sqrt{3x-5} \geqslant 4-2x \iff x \in \left[\frac{7}{4}, 2\right].$$

— *2^e^ cas* : $x \in]2,+\infty[$. Alors la 1^re^ inéquation est toujours vérifiée car $\sqrt{3x-5} \geqslant 0$ et $4-2x < 0$.

— *Conclusion de la 1re inéquation.* On en déduit que :

$$\sqrt{3x-5} \geqslant 4-2x \iff x \in \left[\frac{7}{4}, 2\right] \cup]2,+\infty[= \boxed{\left[\frac{7}{4},+\infty\right[}.$$

- 2e inéquation. On a : $5-2x \geqslant 0 \iff x \leqslant \frac{5}{2}$. On raisonne par disjonction de cas.

— *1er cas :* $x \in \left[\frac{5}{3}, \frac{5}{2}\right]$. Alors :

$$\begin{aligned} \sqrt{3x-5} < 5-2x &\iff 3x-5 < (5-2x)^2 \\ &\qquad \text{car la fonction carrée est strictement croissante sur } [0,+\infty[\\ &\iff 3x-5 < 25-20x+4x^2 \\ &\iff 4x^2-23x+30 > 0. \end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = (-23)^2 - 4\times 4\times 30 = 49 > 0$ qui admet pour racines $(23+\sqrt{49})/8 = 15/4$ et $(23-\sqrt{49})/8 = 2$. On a le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		2		$\frac{5}{2}$		$\frac{15}{4}$		$+\infty$
$4x^2-23x+30$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

On en déduit que dans le cas où $x \in \left[\frac{5}{3}, \frac{5}{2}\right]$:

$$\sqrt{3x-5} < 5-2x \iff x \in \left[\frac{5}{3}, 2\right[.$$

— *2e cas :* $x \in \left]\frac{5}{2},+\infty\right[$. Alors la 2e inéquation n'est jamais vérifiée car $\sqrt{3x-5} \geqslant 0$ et $5-2x<0$.

— *Conclusion de la 2e inéquation.* On en déduit que :

$$\sqrt{3x-5} < 5-2x \iff x \in \left[\frac{5}{3}, 2\right[\cup \emptyset = \boxed{\left[\frac{5}{3}, 2\right[}.$$

- Conclusion. Finalement, l'ensemble des solutions de (E_3) est :

$$\left[\frac{7}{4},+\infty\right[\cap \left[\frac{5}{3}, 2\right[= \boxed{\left[\frac{7}{4}, 2\right[}.$$

Informatique

On utilisera seulement le langage Python en indiquant soigneusement les indentations utilisées.

1. *Écrire une fonction* `absolue` *qui prend en argument un réel et qui renvoie sa valeur absolue.*

▶ Par exemple :

```
def absolue(x):
    if x>=0:
        return x
    else:
        return -x
```

2. *On considère la fonction ci-dessous.*

```
def riddle(x):
    if x>=0:
        n=0
        while n+1<x:
            n=n+1
        return n
    else:
        n=0
        while n-1>x:
            n=n-1
        return n
```

(a) *Que renvoie la commande* `riddle(0)` *?*

▶ Si `x=0` alors le test `if` est vérifié (car `x>=0`) mais pas la condition `while` (car `n=0` donc `n+1=1` est supérieur à `x=0`). Ainsi, la valeur de `n` n'est pas changée et $\boxed{\texttt{riddle(0) renvoie 0}}$.

(b) *Que renvoient les commandes* `riddle(3.14)` *et* `riddle(-3.14)` *?*

▶ Si `x=3.14` alors on obtient en appliquant pas à pas la fonction `riddle` :

— `x` est positif donc le test `if` est vérifié, on continue sans lire ce qui se trouve après `else`,
— `n` prend la valeur `0`,
— `n+1=1` est strictement inférieur à `x` donc la condition `while` est vérifiée, on continue,
— `n` prend la valeur `n+1=1`,
— `n+1=2` est strictement inférieur à `x` donc la condition `while` est vérifiée, on continue,
— `n` prend la valeur `n+1=2`,
— `n+1=3` est strictement inférieur à `x` donc la condition `while` est vérifiée, on continue,
— `n` prend la valeur `n+1=3`,
— `n+1=4` est supérieur à `x` donc la condition `while` n'est pas vérifiée, on sort de la boucle,
— on renvoie `n=3`.

Donc $\boxed{\texttt{riddle(3.14) renvoie 3}}$. De même, on obtient si `x=-3.14` :

— `x` est strictement négatif donc le test `if` n'est pas vérifié, on va directement à ce qui se trouve après `else` sans lire ce qui se trouve avant,
— `n` prend la valeur `0`,
— `n-1=-1` est strictement supérieur à `x` donc la condition `while` est vérifiée, on continue,
— `n` prend la valeur `n-1=-1`,
— `n-1=-2` est strictement supérieur à `x` donc la condition `while` est vérifiée, on continue,
— `n` prend la valeur `n-1=-2`,
— `n-1=-3` est strictement supérieur à `x` donc la condition `while` est vérifiée, on continue,
— `n` prend la valeur `n-1=-3`,
— `n-1=-4` est inférieur à `x` donc la condition `while` n'est pas vérifiée, on sort de la boucle,
— on renvoie `n=-3`.

Donc $\boxed{\texttt{riddle(-3.14) renvoie -3}}$.

(c) *Que renvoient les commandes* `riddle(99.9)` *et* `riddle(-99.9)` *?*

▶ En généralisant le fonctionnement de la fonction `riddle` détaillé à la question précédente, on obtient que $\boxed{\texttt{riddle(99.9) renvoie 99}}$ et que $\boxed{\texttt{riddle(-99.9) renvoie -99}}$.

On reconnaît la partie entière lorsque `x` *est positif car* $\lfloor 3,14 \rfloor = 3$ *et* $\lfloor 99,9 \rfloor = 99$. *Par contre,* $\lfloor -3,14 \rfloor = -4 \neq -3$ *et* $\lfloor -99,9 \rfloor = -100 \neq -99$ *donc on reconnaît* $\lfloor \mathtt{x} \rfloor + 1$ *lorsque* `x` *est strictement négatif.*

(d) *Que renvoient les commandes* `riddle(5)` *et* `riddle(-5)` *?*

▶ Si `x=5` alors, en reprenant le fonctionnement de la fonction `riddle` détaillé à la question 2(b), la condition `while` ne sera pas vérifiée lorsque `n=4` car `n+1=5` est égal à `x`. Donc $\boxed{\texttt{riddle(5) renvoie 4}}$. De même, si `x=-5`, la condition `while` ne sera pas vérifiée lorsque `n=-4` car `n-1=-5` est égal à `x`. Donc $\boxed{\texttt{riddle(-5) renvoie -4}}$.

(e) *Que renvoient les commandes* `riddle(42)` *et* `riddle(-42)` *?*

▶ En généralisant le fonctionnement de la fonction `riddle` détaillé à la question 2(b), on obtient que $\boxed{\texttt{riddle(42) renvoie 41}}$ et que $\boxed{\texttt{riddle(-42) renvoie -41}}$.

On reconnaît toujours $\lfloor \mathtt{x} \rfloor + 1$ *lorsque* `x` *est strictement négatif. Par contre, on reconnaît* $\lfloor \mathtt{x} \rfloor - 1$ *lorsque* `x` *est un entier strictement positif (et* $\lfloor \mathtt{x} \rfloor$ *lorsque* `x` *est un réel strictement positif qui n'est pas entier).*

(f) *Corriger la fonction* `riddle` *pour écrire une fonction* `floor` *qui prend en argument un réel et qui renvoie sa partie entière.*

▶ Par exemple :

```
def floor(x):
    if x>=0:
        n=0
        while n+1<=x:
            n=n+1
        return n
    else:
        n=0
        while n>x:
            n=n-1
        return n
```

Pour trouver cette fonction, il faut bien comprendre les erreurs observées aux questions précédentes ($\lfloor \mathtt{x} \rfloor + 1$ au lieu de $\lfloor \mathtt{x} \rfloor$ lorsque `x` est strictement négatif et $\lfloor \mathtt{x} \rfloor - 1$ au lieu de $\lfloor \mathtt{x} \rfloor$ lorsque `x` est un réel strictement positif qui n'est pas entier) puis de trouver ce qu'il faut changer dans la fonction `riddle` (la condition `n>x` au lieu de `n-1>x` lorsque `x` est strictement négatif et la condition `n+1<=x` au lieu de `n+1<x` lorsque `x` est positif). N'hésitez pas à faire des essais de modification de la fonction `riddle` puis à vérifier vos essais avec des exemples comme aux questions précédentes. On peut également retrouver les modifications à effectuer à l'aide de la définition de la partie entière $\mathtt{n} = \lfloor \mathtt{x} \rfloor$:

$$\lfloor \mathtt{x} \rfloor \leqslant \mathtt{x} < \lfloor \mathtt{x} \rfloor + 1.$$

Ainsi, lorsque `x` est positif, on continue la boucle `while` tant que $\mathtt{x} < \mathtt{n} + 1$ n'est pas vérifiée, c'est-à-dire tant que `n+1<=x`. De même, lorsque `x` est strictement négatif, on continue la boucle `while` tant que $\mathtt{n} \leqslant \mathtt{x}$ n'est pas vérifiée, c'est-à-dire tant que `n>x`.

3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 4}{u_n^2 + 1}$ pour tout $n \geqslant 0$. Écrire une fonction `suite` qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie le terme u_n.*

   ▶ Par exemple :

```
def suite(n):
    u=1
    for i in range(n):
        u=(3*u+4)/(u**2+1)
    return u
```

Exercice 2

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. *Simplifier $\dfrac{1}{2}\cos(\theta) - \dfrac{2}{3}\sin(\theta)$.*

   ▶ On cherche deux réels r et φ tels que :

$$\frac{1}{2}\cos(\theta) - \frac{2}{3}\sin(\theta) = r\cos(\theta + \varphi).$$

D'après la formule d'addition du cosinus, on a :

$$r\cos(\theta+\varphi) = r\Big(\cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi)\Big) = \underbrace{r\cos(\varphi)}_{=1/2}\cos(\theta) - \underbrace{r\sin(\varphi)}_{=2/3}\sin(\theta).$$

Ainsi, on veut que $r\cos(\varphi) = 1/2$ et que $r\sin(\varphi) = 2/3$. Or :

$$\Big(r\cos(\varphi)\Big)^2 + \Big(r\sin(\varphi)\Big)^2 = r^2\Big(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\Big) = r^2 \quad \text{d'après le théorème de Pythagore.}$$

On en déduit que :

$$r^2 = \big(r\cos(\varphi)\big)^2 + \big(r\sin(\varphi)\big)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{4}{9} = \frac{25}{36}.$$

Il suffit par exemple de choisir :

$$r = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}.$$

Par conséquent, on veut que :

$$\frac{5}{6}\cos(\varphi) = \frac{1}{2} \iff \cos(\varphi) = \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad \frac{5}{6}\sin(\varphi) = \frac{2}{3} \iff \sin(\varphi) = \frac{4}{5}.$$

D'après le cercle trigonométrique, on a :

$$\cos(\varphi) = \frac{3}{5} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \left(\varphi = \arccos\left(\tfrac{3}{5}\right) + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \varphi = -\arccos\left(\tfrac{3}{5}\right) + 2k\pi\right)$$

$$\text{et} \quad \sin(\varphi) = \frac{4}{5} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \left(\varphi = \arcsin\left(\tfrac{4}{5}\right) + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \varphi = \pi - \arcsin\left(\tfrac{4}{5}\right) + 2k\pi\right).$$

De plus, les valeurs $-\arccos\left(\frac{3}{5}\right) + 2k\pi$ ne conviennent pas car $\sin(\varphi) = \frac{4}{5} > 0$, et les valeurs $\pi - \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + 2k\pi$ ne conviennent pas car $\cos(\varphi) = \frac{3}{5} > 0$. On en déduit que :

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ \varphi = \arccos\left(\tfrac{3}{5}\right) + 2k\pi = \arcsin\left(\tfrac{4}{5}\right) + 2k\pi.$$

Aidez vous d'un schéma du cercle trigonométrique pour ces raisonnements de résolution d'équations trigonométriques.

Il suffit par exemple de choisir $k = 0$ et donc $\varphi = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$. Finalement, on obtient que :

$$\boxed{\frac{1}{2}\cos(\theta) - \frac{2}{3}\sin(\theta) = \frac{5}{6}\cos\left(\theta + \arccos\left(\tfrac{3}{5}\right)\right)}.$$

2. *Linéariser $\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)$.*

▶ On utilise les formules d'Euler :

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}.$$

Donc :

$$\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 = \frac{-1}{32}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^3 \left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^2 \quad \text{car } i^2 = -1.$$

De plus, on a pour tous nombres complexes a et b :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{car les propriétés de calculs dans } \mathbb{C} \text{ sont les mêmes que ceux dans } \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad (a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) &= (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \end{aligned}$$

Nous apprendrons bientôt à calculer beaucoup plus rapidement $(a+b)^n$ pour toute puissance entière $n \geqslant 2$.

En remplaçant a par $e^{i\theta}$ et b par $e^{-i\theta}$ ou par $-e^{-i\theta}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) &= \frac{-1}{32}\left(e^{i3\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-i3\theta}\right)\left(e^{i2\theta}-2+e^{-i2\theta}\right)\\
&= \frac{-1}{32}\Big(e^{i5\theta}-2e^{i3\theta}+e^{i\theta}+3e^{i3\theta}-6e^{i\theta}+3e^{-i\theta}\\
&\qquad +3e^{i\theta}-6e^{-i\theta}+3e^{-i3\theta}+e^{-i\theta}-2e^{-i3\theta}+e^{-i5\theta}\Big)\\
&= \frac{-1}{32}\Big(\underbrace{e^{i5\theta}+e^{-i5\theta}}_{=2\cos(5\theta)}+\underbrace{e^{i3\theta}+e^{-i3\theta}}_{=2\cos(3\theta)}-2\underbrace{\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)}_{=2\cos(\theta)}\Big)\\
&= \frac{-1}{32}\Big(2\cos(5\theta)+2\cos(3\theta)-4\cos(\theta)\Big) \quad \text{d'après les formules d'Euler}\\
&= \boxed{\frac{-1}{16}\cos(5\theta)-\frac{1}{16}\cos(3\theta)+\frac{1}{8}\cos(\theta)}.
\end{aligned}$$

3. *Factoriser* $\cos(57\theta)-\cos(27\theta)$.

▶ On a :

$$\cos(57\theta)-\cos(27\theta)=\mathrm{Re}\left(e^{i57\theta}-e^{i27\theta}\right) \quad \text{car } e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta).$$

De plus, on a en utilisant une factorisation par l'angle moitié :

$$\begin{aligned}
e^{i57\theta}-e^{i27\theta} &= e^{i42\theta}\left(e^{i15\theta}-e^{-i15\theta}\right) \quad \text{car } \frac{57+27}{2}=42,\ 57-42=15 \text{ et } 27-42=-15\\
&= e^{i42\theta}2i\sin(15\theta) \quad \text{d'après les formules d'Euler}\\
&= \Big(\cos(42\theta)+i\sin(42\theta)\Big)2i\sin(15\theta)\\
&= 2i\cos(42\theta)\sin(15\theta)-2\sin(42\theta)\sin(15\theta) \quad \text{car } i^2=-1\\
&= \underbrace{-2\sin(15\theta)\sin(42\theta)}_{\text{partie réelle}}+i\underbrace{2\sin(15\theta)\cos(42\theta)}_{\text{partie imaginaire}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\cos(57\theta)-\cos(27\theta)=\boxed{-2\sin(15\theta)\sin(42\theta)}.$$

Problème 1

Le but de ce problème est de simplifier l'expression de la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3x-x^3}{2}\right).$$

1. *Soit* $y\in[-1,1]$. *Rappeler la définition de* $\arcsin(y)$.

▶ $\boxed{\theta=\arcsin(y) \text{ est l'unique solution appartenant à } [-\pi/2,\pi/2] \text{ de l'équation } \sin(\theta)=y}$.

2. *On pose la fonction* $g : x \mapsto \dfrac{3x-x^3}{2}$.

   (a) *Dresser le tableau des variations de* g *en précisant les images de* -2 *et* $+2$.

   ▶ $g : x\mapsto \frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x^3$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale (de degré 3). On a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad g'(x)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x^2=\frac{3}{2}(1-x^2)=\frac{3}{2}(1-x)(1+x).$$

   On en déduit le tableau des variations de g :

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
$1-x$				$+$		$+$	0	$-$			
$1+x$				$-$	0	$+$		$+$			
$g'(x)$				$-$	0	$+$	0	$-$			
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

car $g(-2) = \frac{3\times(-2)-(-8)}{2} = 1$, $g(-1) = \frac{-3+1}{2} = -1$, $g(1) = \frac{3-1}{2} = 1$ et $g(2) = \frac{3\times 2-8}{2} = -1$.

On peut aussi remarquer que g est une fonction impaire car :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(-x) = \frac{3(-x)-(-x^3)}{2} = \frac{-3x+x^3}{2} = -\frac{3x-x^3}{2} = -g(x).$$

On en déduit que la courbe représentative de g est symétrique par rapport à l'origine (en particulier $g(0)=0$) et qu'il suffit donc d'étudier les variations de g sur $[0,+\infty[$ (puis de compléter sur $]-\infty,0[$ par symétrie)

.

(b) *En déduire l'ensemble de définition de f.*

▶ Puisque la fonction arcsinus est définie sur $[-1,1]$, $f(x) = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3x-x^3}{2}\right)$ est défini si et seulement si $g(x) = \frac{3x-x^3}{2}$ appartient à $[-1,1]$. Par conséquent, l'ensemble de définition de f est égal à :

$\Big\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in [-1,1]\Big\} = \boxed{[-2,2]}$ d'après le tableau des variations de la question précédente.

3. (a) *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.*

▶ On sait que $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ pour tout $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ d'après le calcul effectué dans la question 2 de l'exercice 2. Donc :

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta)+i\sin(3\theta) &= \Big(\cos(\theta)+i\sin(\theta)\Big)^3 \quad \text{d'après la formule de Moivre}\\
&= \cos^3(\theta)+3\cos^2(\theta)i\sin(\theta)-3\cos(\theta)\sin^2(\theta)-i\sin^3(\theta)\\
&= \underbrace{\cos^3(\theta)-3\cos(\theta)\sin^2(\theta)}_{\text{partie réelle}}+i\underbrace{3\cos^2(\theta)\sin(\theta)-\sin^3(\theta)}_{\text{partie imaginaire}}.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\sin(3\theta) = 3\cos^2(\theta)\sin(\theta)-\sin^3(\theta)$.

On peut aussi retrouver ce résultat avec les formules d'addition de cosinus et sinus mais c'est plus long. Ce n'est pas fini : l'énoncé demande seulement des $\sin(\theta)$, il faut donc se débarrasser du $\cos^2(\theta)$.

On sait que $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$ d'après le théorème de Pythagore, donc :

$$\sin(3\theta) = 3\Big(1-\sin^2(\theta)\Big)\sin(\theta)-\sin^3(\theta) = \boxed{3\sin(\theta)-4\sin^3(\theta)}.$$

(b) *Trouver deux constantes réelles $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ telles que : $\forall x\in[-2,2]$, $\sin(a\arcsin(bx)) = g(x)$.*

▶ On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse. On cherche a et b telles que pour tout $x \in [-2,2]$:

$$\sin(a\arcsin(bx)) = g(x) = \frac{3x-x^3}{2} = \frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x^3.$$

Essayons avec $a=3$ pour pouvoir utiliser le résultat de la question précédente :

Pensez à utiliser les questions précédentes. Il y a toujours une logique dans l'ordre de progression des questions d'un problème.

$$\begin{aligned}\sin(3\arcsin(bx)) &= 3\sin(\arcsin(bx)) - 4\sin^3(\arcsin(bx))\\ &= 3bx - 4(bx)^3 \quad \text{car } \sin(\arcsin(bx)) = bx \text{ par définition de } \arcsin(bx)\\ &= \underbrace{3b}_{=3/2}x - \underbrace{4b^3}_{=1/2}x^3.\end{aligned}$$

Il suffit donc que $3b = 3/2$ et $4b^3 = 1/2$. Or :

$$3b = \frac{3}{2} \iff b = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 4b^3 = \frac{1}{2} \iff b^3 = \frac{1}{8} \iff b = \frac{1}{2}.$$

Vérifiez bien les deux équations obtenues pour b. Si on avait obtenu des valeurs de b différentes, on aurait dû poursuivre l'analyse (par exemple en testant d'autres valeurs de a).

Synthèse. On pose $\boxed{a = 3}$ et $\boxed{b = 1/2}$. D'après les calculs effectués en analyse, on a bien :

$$\forall x \in [-2, 2], \quad \boxed{\sin\left(3\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = g(x)}.$$

4. *Dans cette question, on fixe $x \in [-1, 1]$.*

(a) *À l'aide du cercle trigonométrique, déterminer un encadrement de $3\arcsin(x/2)$.*

▶ Puisque $x \in [-1, 1]$, on a $x/2 \in [-1/2, 1/2]$. D'après les valeurs remarquables de la fonction sinus, on sait que $\arcsin(1/2) = \pi/6$ et $\arcsin(-1/2) = -\pi/6$. En reportant ces valeurs sur le cercle trigonométrique, on en déduit que :

$$-\frac{\pi}{6} \leqslant \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant \frac{\pi}{6} \quad \text{donc} \quad \underbrace{-\frac{3\pi}{6}}_{=-\pi/2} \leqslant 3\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant \underbrace{\frac{3\pi}{6}}_{=\pi/2}.$$

Aidez vous d'un schéma du cercle trigonométrique !

On en déduit que $\boxed{3\arcsin(x/2) \in [-\pi/2, \pi/2]}$.

(b) *Déduire des résultats précédents que $f(x) = \arcsin(x/2)$.*

▶ On a montré à la question 3(b) que $\theta = 3\arcsin(x/2)$ est une solution de l'équation $\sin(\theta) = g(x)$. De plus, on a montré à la question précédente que cette solution appartient à $[-\pi/2, \pi/2]$. Or on sait, par définition de arcsinus (rappelée à la question 1), que $\arcsin(g(x))$ est l'unique solution appartenant à $[-\pi/2, \pi/2]$ de cette équation. On en déduit que $3\arcsin(x/2) = \arcsin(g(x))$. Par conséquent :

$$\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3}\arcsin\big(g(x)\big) = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3x - x^3}{2}\right) = f(x).$$

On en déduit bien que $\boxed{f(x) = \arcsin(x/2)}$ lorsque $x \in [-1, 1]$.

5. *Soit $x \in]1, 2]$. En vous inspirant de la question précédente, montrer que $f(x) = \dfrac{\pi}{3} - \arcsin(x/2)$.*

▶ On raisonne comme à la question précédente. $\theta = 3\arcsin(x/2)$ est toujours une solution de l'équation $\sin(\theta) = g(x)$ d'après le résultat de la question 3(b). Par contre, puisque $x \in]1, 2]$, on a $x/2 \in]1/2, 1]$ et donc $\arcsin(x/2) \in]\pi/6, \pi/2]$ d'après le cercle trigonométrique. On en déduit que cette solution appartient à $]\pi/2, 3\pi/2]$ et donc que $3\arcsin(x/2) = \pi - \arcsin(g(x))$ d'après le cercle trigonométrique. Par conséquent :

$$f(x) = \frac{1}{3}\arcsin(g(x)) = \frac{1}{3}\left(\pi - 3\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \boxed{\frac{\pi}{3} - \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{lorsque } x \in]1, 2].$$

6. *Déterminer une expression similaire pour $f(x)$ lorsque $x \in [-2, -1[$.*

▶ On raisonne comme aux deux questions précédentes. Puisque $x \in [-2, -1[$, on a $x/2 \in [-1, -1/2[$ et donc $\arcsin(x/2) \in [-\pi/2, -\pi/6[$ d'après le cercle trigonométrique. On en déduit que $3\arcsin(x/2)$ appartient à $[-3\pi/2, -\pi/2[$ et donc que $3\arcsin(x/2) = -\pi - \arcsin(g(x))$ d'après le cercle trigonométrique. Par conséquent :

$$f(x) = \frac{1}{3}\arcsin(g(x)) = \frac{1}{3}\left(-\pi - 3\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \boxed{\frac{-\pi}{3} - \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{lorsque } x \in [-2, -1[.$$

Ce résultat est cohérent avec celui de la question 5. En effet, puisque g, et donc f, sont des fonctions impaires, on a pour $x \in [-2, -1[$:

$$f(x) = -f(\underbrace{-x}_{\in]1,2]}) = -\left(\frac{\pi}{3} - \arcsin\left(\frac{-x}{2}\right)\right) = \frac{-\pi}{3} - \arcsin\left(\frac{x}{2}\right).$$

Exercice 3

Écrire le nombre complexe suivant sous forme algébrique :

$$\left(\frac{6 + \sqrt{6} + i\left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)}{4\sqrt{3} + i2\sqrt{6}}\right)^{43}.$$

▶ On commence par simplifier le nombre complexe sous la puissance :

$$\begin{aligned}
\frac{6 + \sqrt{6} + i\left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)}{4\sqrt{3} + i2\sqrt{6}} &= \frac{\left(6 + \sqrt{6} + i\left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)\right)\left(4\sqrt{3} - i2\sqrt{6}\right)}{\left(4\sqrt{3} + i2\sqrt{6}\right)\left(4\sqrt{3} - i2\sqrt{6}\right)} \\
&= \frac{24\sqrt{3} - i12\sqrt{6} + 4\sqrt{18} - i2\sqrt{36} + i12\sqrt{6} + 6\sqrt{12} - i8\sqrt{9} - 4\sqrt{18}}{16 \times 3 + 4 \times 6} \\
&= \frac{\left(24\sqrt{3} + 12\sqrt{2} + 12\sqrt{3} - 12\sqrt{2}\right) + i\left(-12\sqrt{6} - 12 + 12\sqrt{6} - 24\right)}{72} \\
&= \frac{36\sqrt{3} - i36}{72} = \frac{\sqrt{3} - i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \\
&= \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) = e^{-i\pi/6}.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{6 + \sqrt{6} + i\left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)}{4\sqrt{3} + i2\sqrt{6}}\right)^{43} &= \left(e^{-i\pi/6}\right)^{43} = e^{-i\pi 43/6} = e^{-i\pi(42+1)/6} = e^{-i7\pi} \times e^{-i\pi/6} \\
&= -1 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) \quad \text{d'après les valeurs remarquables sur le cercle trigonométrique} \\
&= \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Problème 2

Le but de ce problème est de résoudre l'équation suivante d'inconnue z complexe :

$$\overline{z} = z^2 - 3z + 7. \tag{E1}$$

1. (a) *Montrer que (E1) n'admet pas de solutions réelles.*

► On raisonne par l'absurde en supposant que (E1) admet une solution réelle qu'on note $z = x$. Puisque $x \in \mathbb{R}$, on a $\overline{z} = x$ et donc :

$$x = x^2 - 3x + 7 \quad \text{par conséquent} \quad x^2 - 4x + 7 = 0.$$

Ainsi, x est solution d'une équation du second degré dont le discriminant est égal à :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 7 = -12 < 0.$$

Cette équation n'admet donc pas de solution réelle ce qui contredit l'existence de x. Par l'absurde, on en déduit que $\boxed{\text{(E1) n'admet pas de solutions réelles}}$.

(b) *(E1) admet-elle des solutions imaginaires pures ?*

► Soit z une solution imaginaire pure de (E1). Donc z est de la forme $z = iy$ où $y \in \mathbb{R}$. On a $\overline{z} = -iy$ et donc :

$$-iy = (iy)^2 - 3(iy) + 7 = -y^2 - i3y + 7 \quad \text{par conséquent} \quad \left(-y^2 + 7\right) + i \underbrace{(y - 3y)}_{=-2y} = 0.$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire, on en déduit que $-y^2 + 7 = 0$ et $-2y = 0$. La deuxième équation donne $y = 0$ et on obtient une absurdité en réinjectant cette valeur dans la première équation car $-0^2 + 7 = 7 \neq 0$. En raisonnant par l'absurde comme à la question précédente, on en déduit que $\boxed{\text{(E1) n'admet pas de solutions imaginaires pures}}$.

2. *Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que z est solution de (E1) si et seulement si $\overline{z}$ aussi.*

► On raisonne par double implication.

$\Longrightarrow$ On suppose que z est solution de (E1). Donc :

$$\overline{z} = z^2 - 3z + 7.$$

D'après les propriétés du conjugué, on a :

$$\overline{\overline{z}} = \overline{z^2 - 3z + 7} = \overline{z^2} - \underbrace{\overline{3z}}_{=\overline{3} \times \overline{z}} + \overline{7} = \overline{z}^2 - 3\overline{z} + 7.$$

Ainsi, on a bien montré que $\overline{z}$ est solution de (E1).

$\Longleftarrow$ On suppose que $\overline{z}$ est solution de (E1). En raisonnant comme pour l'implication précédente, on peut montrer que $\overline{\overline{z}} = z$ est solution de (E1).

<u>Conclusion</u>. Par double implication, en déduit que :

$$\boxed{z \text{ est solution de (E1)} \iff \overline{z} \text{ est solution de (E1)}}.$$

L'argument clef de cette réponse est que $\overline{z^2 - 3z + 7} = \overline{z}^2 - 3\overline{z} + 7$. Plus généralement, on peut montrer que si P est un polynôme à coefficients réels, alors $\overline{P(z)} = P\left(\overline{z}\right)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

3. *Soit $z \in \mathbb{C}$ une solution de (E1). Montrer qu'alors z est solution de l'équation suivante :*

$$z = z^4 - 6z^3 + 20z^2 - 33z + 35. \tag{E2}$$

► On a :

$$\begin{aligned}
z &= \overline{\overline{z}} \quad \text{par propriété du conjugué} \\
&= \overline{z^2 - 3z + 7} \quad \text{car } z \text{ est solution de (E1)} \\
&= \overline{z}^2 - 3\overline{z} + 7 \quad \text{par propriétés du conjugué} \\
&= \left(z^2 - 3z + 7\right)^2 - 3\left(z^2 - 3z + 7\right) + 7 \\
&= \left(z^4 - 3z^3 + 7z^2 - 3z^3 + 9z^2 - 21z + 7z^2 - 21z + 49\right) - 3z^2 + 9z - 21 + 7 \\
&= z^4 - 6z^3 + 20z^2 - 33z + 35.
\end{aligned}$$

On a bien montré que $\boxed{z \text{ est solution de (E2)}}$.

4. (a) *Vérifier que $z_1 = 2 + i\sqrt{3}$ est solution de de (E2). Qu'en est-il de $z_2 = 2 - i\sqrt{3}$?*

► On a :

$$\begin{aligned}
&z_1 = 2 + i\sqrt{3},\\
&z_1^2 = \left(2 + i\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 4i\sqrt{3} - 3 = 1 + i4\sqrt{3},\\
&z_1^3 = z_1^2 \times z_1 = \left(1 + i4\sqrt{3}\right)\left(2 + i\sqrt{3}\right) = 2 + i\sqrt{3} + i8\sqrt{3} - 4\sqrt{9} = -10 + i9\sqrt{3},\\
&z_1^4 = \left(z_1^2\right)^2 = \left(1 + i4\sqrt{3}\right)^2 = 1 + i8\sqrt{3} - 48 = -47 + i8\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
&z_1^4 - 6z_1^3 + 20z_1^2 - 33z_1 + 35\\
=&-47 + i8\sqrt{3} - 6\left(-10 + i9\sqrt{3}\right) + 20\left(1 + i4\sqrt{3}\right) - 33\left(2 + i\sqrt{3}\right) + 35\\
=&-47 + i8\sqrt{3} + 60 - i54\sqrt{3} + 20 + i80\sqrt{3} - 66 - i33\sqrt{3} + 35\\
=&\,2 + i\sqrt{3} = z_1.
\end{aligned}$$

On a bien vérifié que $\boxed{z_1 \text{ est solution de (E2)}}$. De plus, on a d'après les propriétés du conjugué :

$$z_2 = \overline{z_1} = \overline{z_1^4 - 6z_1^3 + 20z_1^2 - 33z_1 + 35} = \overline{z_1}^4 - 6\overline{z_1}^3 + 20\overline{z_1}^2 - 33\overline{z_1} + 35 = z_2^4 - 6z_2^3 + 20z_2^2 - 33z_2 + 35.$$

Donc $\boxed{z_2 \text{ est aussi solution de (E2)}}$.

Ne perdez pas de temps en calculs inutiles. Ici les propriétés du conjugué permet d'éviter de refaire les mêmes calculs avec z_2 que ceux avec z_1.

(b) *Déterminer une équation du second degré, notée (E3), dont les solutions sont z_1 et z_2.*

► On sait que z_1 et z_2 sont solutions d'une équation du second degré de la forme :

$$z_2 - Sz + P = 0 \quad \text{où} \quad \begin{cases} S = z_1 + z_2 = z_1 + \overline{z_1} + 2\mathrm{Re}\,(z_1) = 4,\\ P = z_1 z_2 = z_1\overline{z_1} = |z_1|^2 = 2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 = 7. \end{cases}$$

L'équation obtenue est donc :

$$\boxed{z^2 - 4z + 7 = 0}. \tag{E3}$$

5. *Trouver deux constantes réelles $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :*

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^4 - 6z^3 + 20z^2 - 34z + 35 = \left(z^2 - 4z + 7\right)\left(z^2 + az + b\right).$$

► On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse. On cherche $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
z^4 - 6z^3 + 20z^2 - 34z + 35 &= \left(z^2 - 4z + 7\right)\left(z^2 + az + b\right)\\
&= z^4 + az^3 + bz^2 - 4z^3 - 4az^2 - 4b + 7z^2 + 7az + 7b\\
&= z^4 + (a - 4)\,z^3 + (b - 4a + 7)\,z^2 + (-4b + 7a) + 7b.
\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de degré 3, on obtient que $a - 4 = -6$ donc $a = -2$; et en identifiant les coefficients constants, on obtient que $7b = 35$ donc $b = 5$.
Synthèse. On pose $\boxed{a = -2}$ et $\boxed{b = 5}$. D'après les calculs de l'analyse, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\left(z^2 - 4z + 7\right)\left(z^2 + az + b\right) &= z^4 + \underbrace{(a - 4)}_{=-2-4}z^3 + \underbrace{(b - 4a + 7)}_{=5+8+7}z^2 + \underbrace{(-4b + 7a)}_{-20-14} + \underbrace{7b}_{=35}\\
&= z^4 - 6z^3 + 20z^2 - 34z + 35.
\end{aligned}$$

On peut également vérifier les coefficients de degré 2 et 1 dans l'analyse. Dans ce cas, il est inutile de perdre du temps à le refaire dans la synthèse.

Finalement, on a montré que :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^4 - 6z^3 + 20z^2 - 34z + 35 = \left(z^2 - 4z + 7\right)\left(z^2 - 2z + 5\right)}.$$

6. *Résoudre (E2).*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\text{(E2)} &\iff z = z^4 - 6z^3 + 20z^2 - 33z + 35 \\
&\iff z^4 - 6z^3 + 20z^2 - 34z + 35 = 0 \\
&\iff \left(z^2 - 4z + 7\right)\left(z^2 - 2z + 5\right) \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&\iff z^2 - 4z + 7 = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 - 2z + 5 = 0 \quad \text{par intégrité.}
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
z^2 - 4z + 7 = 0 &\iff \text{(E3)} \\
&\iff z = z_1 \quad \text{ou} \quad z = z_2 \quad \text{d'après le résultat de la question 4(b)} \\
&\iff z = 2 + i\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad z = 2 - i\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Inutile de perdre du temps à calculer le discriminant pour résoudre cette équation du second degré. Pensez à utiliser les résultats des questions précédentes.

Pour la deuxième équation, on reconnaît une équation du second degré dont le discriminant est égal à :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 < 0.$$

On obtient donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z^2 - 2z + 5 = 0 \iff z = \frac{-(-2) + i\sqrt{|-16|}}{2} = \frac{2 + i\overbrace{\sqrt{16}}^{=4}}{2} = 1 + 2i \quad \text{ou} \quad z = 1 - 2i.$$

Finalement, on en déduit que (E2) admet quatre solutions :

$$\boxed{\text{(E2)} \iff z \in \left\{2 + i\sqrt{3}, 2 - i\sqrt{3}, 1 + 2i, 1 - 2i\right\}}.$$

7. *En déduire les solutions de (E1).*

▶

Attention à la logique de l'énoncé : à la question 3, on a seulement montré que :

$$z \text{ est solution de (E1)} \implies z \text{ est solution de (E2)}.$$

Mais la réciproque est fausse en générale. Autrement dit, on a seulement démontré que l'ensemble des solutions de (E1) est inclus dans l'ensemble des quatre solutions de (E2). Il suffit donc de vérifier si chacune des quatre solutions de (E2) est bien une solution de (E1).

D'après les résultats des questions précédentes, on a montré que l'ensemble des solutions de (E1) est inclus dans $\left\{2 + i\sqrt{3}, 2 - i\sqrt{3}, 1 + 2i, 1 - 2i\right\}$. Or :

$$\begin{aligned}
\left(2 + i\sqrt{3}\right)^2 - 3\left(2 + i\sqrt{3}\right) + 7 &= 1 + 4i\sqrt{3} - 6 - i3\sqrt{3} + 7 \quad \text{d'après les calculs de la question 4(a)} \\
&= 2 + i\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Donc $2+i\sqrt{3}$ est solution de (E1). On en déduit que $2-i\sqrt{3}=\overline{2+i\sqrt{3}}$ est aussi solution de (E1) d'après le résultat de la question 2. De même :

$$(1+2i)^2-3(1+2i)+7=1+4i-4-3-6i+7=1-2i\neq 1+2i.$$

Donc $1+2i$ n'est pas solution de (E1). On en déduit que $1-2i=\overline{1+2i}$ n'est également pas solution de (E1) d'après le résultat de la question 2. Finalement :

$$\boxed{(\mathrm{E1}) \iff z\in\left\{2+i\sqrt{3},2-i\sqrt{3}\right\}}.$$