Corrigé du DS n° 2 de mathématiques et d'informatique

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes en fonction de $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-2k}{k(n+1-k)}$ *en inversant l'ordre de sommation.*

   ▶ On a :

$$\begin{aligned} S = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-2k}{k(n+1-k)} &= \sum_{\ell=1}^{n} \frac{n+1-2(n+1-\ell)}{(n+1-\ell)(n+1-(n+1-\ell))} \quad \text{en posant } \begin{array}{r} \ell = n+1-k \\ \iff k = n+1-\ell \end{array} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \frac{-(n+1)+2\ell}{(n+1-\ell)\ell} = -\sum_{\ell=1}^{n} \frac{n+1-2\ell}{\ell(n+1-\ell)} \quad \text{par linéarité} \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-2k}{k(n+1-2k)} = -S \quad \text{en posant } \ell = k \text{ (variables muettes).} \end{aligned}$$

   Par conséquent $2S = 0$ donc $S = 0$. Finalement :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-2k}{k(n+1-k)} = 0}.$$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \tfrac{2}{k}\right)$ *en reconnaissant une somme télescopique.*

   ▶ On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\tfrac{2}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+2}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+2) - \ln(k)\Big) \\ &= -\underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln(2) + \ln(n+1) + \ln(n+2) \quad \text{en reconnaissant une somme télescopique} \\ &= \boxed{\ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)}. \end{aligned}$$

On peut aussi reconnaître plus facilement la somme télescopique en remarquant que :

$$\forall k \geqslant 1, \quad \ln(k+2) - \ln(k) = \Big(\underbrace{\ln(k+2) + \ln(k+1)}_{=u_{k+1}}\Big) - \Big(\underbrace{\ln(k+1) + \ln(k)}_{=u_k}\Big)$$

donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+2) - \ln(k)\Big) &= \sum_{k=1}^{n} \Big(u_{k+1} - u_k\Big) \\ &= u_{n+1} - u_1 \\ &= \Big(\ln(n+2) + \ln(n+1)\Big) - \Big(\ln(2) + \ln(1)\Big). \end{aligned}$$

3. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{j}{i}$ *à l'aide de la formule du binôme de Newton.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{j}{i} &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} \quad \text{en reconnaissant une somme double sur un triangle d'indices}\\
&= \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}1^i 1^{j-i}\right) \quad \text{car } 1^k = 1 \text{ pour tout } k\in\mathbb{N}\\
&= \sum_{j=0}^{n}(1+1)^j \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton}\\
&= \sum_{j=0}^{n}2^j = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \quad \text{en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison 2}\\
&= \boxed{2^{n+1}-1}.
\end{aligned}$$

Problème 1

Dans tout ce problème, on fixe un réel $\sigma\in]0,1[$ et on s'intéresse aux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définies par la donnée de $u_0\in\mathbb{R}$, de $u_1\in\mathbb{R}$ et de la relation de récurrence suivante :

$$\forall n\geqslant 0,\ \ u_{n+2} = \sigma u_{n+1} + (1-\sigma)\min(1,u_n).$$

1. ***[Informatique]***

(a) En utilisant l'instruction `if`*, écrire une fonction* `min(x,y)` *qui renvoie le minimum de* `x` *et* `y`*.*

▶ Par exemple :

```
def min(x,y):
    if x < y:
        return x
    else:
        return y
```

(b) À l'aide de la fonction `min`*, écrire une fonction* `termeSuivant(sigma,un,unp1)` *qui prend en arguments la variable* `sigma` *contenant le réel σ et les variables* `un` *et* `unp1` *contenant les termes u_n et u_{n+1}, et qui renvoie la valeur du terme u_{n+2}.*

▶ Par exemple :

```
def termeSuivant(sigma,un,unp1):
    return sigma*unp1+(1-sigma)*min(1,un)
```

(c) À l'aide de la fonction `termeSuivant`*, écrire une fonction* `terme(n,sigma,u0,u1)` *qui prend en arguments la variable* `n` *contenant l'entier $n\geqslant 0$, la variable* `sigma` *contenant le réel σ et les variables* `u0` *et* `u1` *contenant les termes u_0 et u_1, et qui renvoie la valeur du terme u_n.*

▶ Par exemple :

```
def terme(n,sigma,u0,u1):
    a = u0
    b = u1
    for i in range(n-1):
        c = termeSuivant(sigma,a,b)
        a = b
        b = c
    return b
```

2. *Dans cette question, on suppose que $u_2 \leqslant 1$.*

(a) *Montrer que $u_n \leqslant 1$ pour tout entier $n \geqslant 2$.*

▶ On raisonne par récurrence.

Initialisation. On a $u_2 \leqslant 1$ par hypothèse.

Hérédité. On suppose que $u_n \leqslant 1$ pour un entier $n \geqslant 2$ fixé. En appliquant la relation de récurrence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ au rang $n-1 \geqslant 0$, on obtient :

$$u_{n+1} = \underbrace{\underbrace{\sigma}_{>0}\,\underbrace{u_n}_{\leqslant 1}}_{\leqslant \sigma} + \underbrace{\underbrace{(1-\sigma)}_{>0}\,\underbrace{\min(1, u_{n-1})}_{\leqslant 1}}_{\leqslant (1-\sigma)} \leqslant \sigma + (1-\sigma) = 1 \quad \text{car } \sigma \in]0, 1[.$$

Attention aux manipulations d'inégalités : pour justifier que $\sigma u_n \leqslant \sigma$ et $(1-\sigma)\min(1, u_{n-1}) \leqslant (1-\sigma)$, il est nécessaire de préciser que $\sigma > 0$ et $(1-\sigma) > 0$, donc que $\sigma \in]0, 1[$.

Par conséquent, $u_n \leqslant 1$ implique que $u_{n+1} \leqslant 1$ et ceci est vrai pour tout entier $n \geqslant 2$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, on a montré que $\boxed{u_n \leqslant 1 \text{ pour tout entier } n \geqslant 2}$.

Puisque la relation de récurrence de suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est d'ordre 2, on peut aussi raisonner par récurrence double. Attention dans ce cas pour l'initialisation : il faut vérifier $u_2 \leqslant 1$ et $u_3 \leqslant 1$.

(b) *Quel type de suite usuelle reconnaît-on pour $(u_n)_{n\geqslant 2}$?*

▶ D'après le résultat de la question précédente, on a $\min(1, u_n) = u_n$ pour tout entier $n \geqslant 2$. On en déduit que $(u_n)_{n\geqslant 2}$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geqslant 2,\ u_{n+2} = \sigma u_{n+1} + (1-\sigma)\min(1, u_n) = \sigma u_{n+1} + (1-\sigma)u_n.$$

On reconnaît que $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 2} \text{ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2}}$.

(c) *Pour tout entier $n \geqslant 2$, exprimer u_n en fonction de n, σ, u_2 et u_3.*

▶ L'équation caractéristique associée à la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est :

$$q^2 = \sigma q + (1-\sigma) \iff q^2 - \sigma q - (1-\sigma) = 0.$$

Son discriminant vaut $\Delta = (-\sigma)^2 + 4(1-\sigma) = \sigma^2 - 4\sigma + 4 = (\sigma-2)^2$. Il est strictement positif car $\sigma \neq 2$ (puisque $\sigma \in]0, 1[$). On obtient donc deux solutions réelles distinctes :

$$q_1 = \frac{\sigma + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{\sigma + |\sigma - 2|}{2} = \frac{\sigma - (\sigma-2)}{2} = 1 \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{\sigma + (\sigma - 2)}{2} = \sigma - 1.$$

Pour aller plus vite, on peut aussi remarquer (avant le calcul du discriminant) que $q_1 = 1$ est une solution évidente donc $q_2 = -(1-\sigma) = \sigma - 1$ est aussi une solution puisque $q_1 q_2 = -(1-\sigma)$ (et $q_1 + q_2 = -(-\sigma) = \sigma$).

Par conséquent, il existe deux constantes $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ telles que pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$u_n = \lambda_1 q_1^{n-2} + \lambda_2 q_2^{n-2} = \lambda_1 + \lambda_2(\sigma-1)^{n-2}.$$

Attention aux quantificateurs et à leur ordre ici ! Soyez très précis dans votre rédaction : les constantes λ_1 et λ_2 ne dépendent pas de l'entier n !!

Pour $n = 2$ et $n = 3$, on obtient :

$$\begin{cases} u_2 = \lambda_1 + \lambda_2 & (L_1) \\ u_3 = \lambda_1 + \lambda_2(\sigma - 1) & (L_2) \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} (\sigma-1)u_2 - u_3 = \lambda_1(\sigma-2) & (\sigma-1)(L_1) - (L_2) \\ u_3 - u_2 = \lambda_2(\sigma - 2) & (L_2) - (L_1) \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{(\sigma-1)u_2 - u_3}{\sigma - 2} \\ \lambda_2 = \dfrac{u_3 - u_2}{\sigma - 2} \end{cases}.$$

Finalement, on obtient :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \boxed{u_n = \frac{(\sigma-1)u_2 - u_3}{\sigma - 2} + \frac{u_3 - u_2}{\sigma - 2}(\sigma-1)^{n-2}}.$$

(d) En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\sigma u_1 + (1-\sigma)(\min(1,u_0)+\min(1,u_1))}{2-\sigma}.$$

▶ Puisque $\sigma \in]0,1[$, on a $-1 < (\sigma-1) < 0$ donc $\lim_{n\to+\infty}(\sigma-1)^{n-2} = 0$. D'après le résultat de question précédente, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{(\sigma-1)u_2 - u_3}{\sigma-2} = \frac{u_3 - \sigma u_2 + u_2}{2-\sigma}.$$

En appliquant la relation de récurrence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ aux rangs $n=2$ et $n=3$, on a :

$$\begin{cases} u_2 = \sigma u_1 + (1-\sigma)\min(1,u_0) \\ u_3 = \sigma u_2 + (1-\sigma)\min(1,u_1) \end{cases}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} u_n &= \frac{\sigma u_2 + (1-\sigma)\min(1,u_1) - \sigma u_2 + \sigma u_1 + (1-\sigma)\min(1,u_0)}{2-\sigma} \\ &= \boxed{\frac{\sigma u_1 + (1-\sigma)(\min(1,u_0)+\min(1,u_1))}{2-\sigma}}.\end{aligned}$$

3. Dans cette question, on suppose que $u_2 > 1$.

(a) Montrer que $u_1 > 1$.

▶ Par l'absurde, on suppose que $u_1 \leqslant 1$. En appliquant la relation de récurrence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ au rang $n=2$, on obtient :

$$u_2 = \underbrace{\underbrace{\sigma}_{>0}\underbrace{u_1}_{\leqslant 1}}_{\leqslant \sigma} + \underbrace{\underbrace{(1-\sigma)}_{>0}\underbrace{\min(1,u_0)}_{\leqslant 1}}_{\leqslant(1-\sigma)} \leqslant \sigma + (1-\sigma) = 1 \quad \text{car } \sigma \in]0,1[.$$

Ceci est absurde car $u_2 > 1$ par hypothèse. On en déduit que $\boxed{u_1 > 1}$.

(b) Montrer que $u_n > 1$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

▶ On raisonne par récurrence double.
Initialisation. On a $u_1 > 1$ d'après le résultat de la question précédente et $u_2 > 1$ par hypothèse.
Hérédité. On suppose que $u_n > 1$ et $u_{n+1} > 1$ pour un entier $n \geqslant 1$ fixé. En appliquant la relation de récurrence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ au rang $n \geqslant 0$, on obtient :

$$u_{n+2} = \sigma u_{n+1} + (1-\sigma)\underbrace{\min(1,u_n)}_{=1 \text{ car } 1 < u_n} = \underbrace{\underbrace{\sigma}_{>0}\underbrace{u_{n+1}}_{>1}}_{>\sigma} + (1-\sigma) > \sigma + (1-\sigma) = 1 \quad \text{car } \sigma \in]0,1[.$$

Par conséquent, $u_n > 1$ et $u_{n+1} > 1$ impliquent $u_{n+2} > 1$ et ceci est vrai pour tout entier $n \geqslant 1$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence double, on a montré que $\boxed{u_n > 1 \text{ pour tout entier } n \geqslant 1}$.

(c) Quel type de suite usuelle reconnaît-on pour $(u_n)_{n\geqslant 2}$?

▶ D'après le résultat de la question précédente, on a $\min(1,u_n)=1$ pour tout entier $n\geqslant 1$. On en déduit que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n\geqslant 1,\ u_{n+2}=\sigma u_{n+1}+(1-\sigma)\min(1,u_n)=\sigma u_{n+1}+(1-\sigma).$$

En particulier, en appliquant cette relation au rang $n-1\geqslant 1 \iff n\geqslant 2$, on obtient :

$$\forall n\geqslant 2,\ u_{n+1}=\sigma u_n+(1-\sigma).$$

On reconnaît que $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 2}\text{ est une suite arithmético-géométrique}}$.

(d) Pour tout entier $n\geqslant 2$, exprimer u_n en fonction de n, σ et u_2.

▶ L'équation caractéristique associée à la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est :

$$\alpha=\sigma\alpha+(1-\sigma) \iff (1-\sigma)\alpha=(1-\sigma) \iff \alpha=1 \quad \text{car } 1-\sigma\neq 0 \text{ (puisque } \sigma\in]0,1[).$$

Ainsi, la suite $(u_n-\alpha)_{n\geqslant 2}=(u_n-1)_{n\geqslant 2}$ est une suite géométrique de raison σ. On en déduit que pour tout $n\geqslant 2$:

$$u_n-1=\sigma^{n-2}(u_2-1).$$

Finalement, on obtient :

$$\forall n\geqslant 2,\quad \boxed{u_n=\sigma^{n-2}(u_2-1)+1}.$$

(e) En déduire que u_n tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

▶ Puisque $\sigma\in]0,1[$, on a $\lim_{n\to+\infty}\sigma^{n-2}=0$. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\boxed{1}.$$

4. ***[Informatique]** À l'aide des fonctions précédentes, écrire une fonction `limite(sigma,u0,u1)` qui prend en arguments la variable `sigma` contenant le réel σ et les variables `u0` et `u1` contenant les termes u_0 et u_1, et qui renvoie la valeur de la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.*

▶ Par exemple :

```
def limite(sigma,u0,u1):
    u2 = termeSuivant(sigma,u0,u1)
    if u2 <= 1:
        return (sigma*u1+(1-sigma)*(min(1,u0)+min(1,u1)))/(2-sigma)
    else:
        return 1
```

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x réelle.

(I_1) $x^{(x^4)}\leqslant x^{3x}$

▶ Puisque les exposants x^4 et $3x$ sont des nombres réels, on a d'après la définition des puissances :

$$x^{(x^4)}=\exp\left(x^4\ln(x)\right)\quad\text{et}\quad x^{3x}=\exp\left(3x\ln(x)\right).$$

Ainsi l'inéquation (I_1) est bien définie seulement pour $x>0$ et on a :

$$\begin{aligned}(I_1)&\iff \exp\left(x^4\ln(x)\right)\leqslant\exp\left(3x\ln(x)\right)\\ &\iff x^4\ln(x)\leqslant 3x\ln(x)\quad\text{car la fonction exp est strictement croissante}\\ &\iff \left(x^4-3x\right)\ln(x)\leqslant 0\\ &\iff x\left(x^3-3\right)\ln(x)\leqslant 0.\end{aligned}$$

On étudie le signe de la fonction $f:x\mapsto x(x^3-3)\ln(x)$ sur $]0,+\infty[$.
La fonction $g:x\mapsto x^3-3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et sa dérivée $g':x\mapsto 3x^2$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ sauf en 0. On en déduit que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

> *Attention, l'argument que g' est positive sur $\mathbb{R}$ justifie seulement que g est croissante sur $\mathbb{R}$ mais pas qu'elle est strictement croissante. Pour justifier qu'une fonction est strictement croissante sur un intervalle, il suffit de prouver que sa dérivée est strictement positive sauf en un nombre fini de points.*

De plus, on a :

$$g(x) = 0 \iff x^3 - 3 = 0 \iff x^3 = 3 \iff x = \sqrt[3]{3} \quad \text{par définition de la racine troisième.}$$

Et $\sqrt[3]{3} > 1$ car $1^3 = 1 < 3$. On en déduit le tableau des signes de f.

x	0		1		$\sqrt[3]{3}$		$+\infty$
$g(x) = x^3 - 3$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

Par conséquent, l'ensemble des solutions de (I_1) est $\boxed{\left[1, \sqrt[3]{3}\right]}$.

(I_2) $6\cos(x) + 7 \leqslant 8\sin(x)$

▶ On a :

$$(I_2) \iff 6\cos(x) + 7 \leqslant 8\sin(x) \iff 6\cos(x) - 8\sin(x) \leqslant -7.$$

On cherche le module et un argument du complexe $z = 6 - 8i$. On a :

$$|z| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

$$\text{donc} \quad z = 10\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right) = |z|\Big(\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z))\Big).$$

Puisque $\sin(\arg(z)) = -\frac{4}{5} < 0$, on en déduit que $\varphi = -\arccos(\frac{3}{5})$ est un argument de z.

> *Aidez vous d'un schéma du cercle trigonométrique. L'équation $\cos(\arg(z)) = \frac{3}{5}$ admet pour solutions $\arg(z) \equiv \arccos(\frac{3}{5})[2\pi]$ ou $\arg(z) \equiv -\arccos(\frac{3}{5})[2\pi]$. Le signe de $\sin(\arg(z))$ permet d'éliminer les premières solutions.*

Ainsi $6 - 8i = z = 10(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$ donc $6 = 10\cos(\varphi)$ et $-8 = 10\sin(\varphi)$. En reportant dans l'inéquation, on obtient :

$$\begin{aligned}
(I_2) &\iff 6\cos(x) + 7 \leqslant 8\sin(x) \\
&\iff 6\cos(x) - 8\sin(x) \leqslant -7 \\
&\iff 10\cos(\varphi)\cos(x) + 10\sin(\varphi)\sin(x) \leqslant -7 \\
&\iff \cos(x - \varphi) \leqslant \frac{-7}{10} \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \arccos\left(\frac{-7}{10}\right) + 2k\pi \leqslant x - \varphi \leqslant -\arccos\left(\frac{-7}{10}\right) + 2\pi + 2k\pi \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \varphi + \arccos\left(\frac{-7}{10}\right) + 2k\pi \leqslant x \leqslant \varphi - \arccos\left(\frac{-7}{10}\right) + 2(k+1)\pi.
\end{aligned}$$

> *Aidez vous d'un schéma du cercle trigonométrique pour résoudre l'inéquation $\cos(x - \varphi) \leqslant \frac{-7}{10}$. N'oubliez pas les congruences modulo 2π.*

Finalement, l'ensemble des solutions de (I_2) est :

$$\boxed{\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\arccos\left(\frac{3}{5}\right) + \arccos\left(\frac{-7}{10}\right) + 2k\pi, -\arccos\left(\frac{3}{5}\right) - \arccos\left(\frac{-7}{10}\right) + 2(k+1)\pi\right]}.$$

(I_3) $\sin(7x) \leqslant \sin(5x)$

▶ On a :

$$(I_3) \iff \sin(7x) \leqslant \sin(5x) \iff \sin(7x) - \sin(5x) \leqslant 0.$$

On étudie le signe de la fonction $f : x \mapsto \sin(7x) \leqslant \sin(5x)$ sur $\mathbb{R}$. Or on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) = \sin(7x) - \sin(5x) &= \operatorname{Im}\left(e^{i7x} - e^{i5x}\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(2i \sin\left(\tfrac{7x-5x}{2}\right) e^{i\frac{7x+5x}{2}}\right) \quad \text{par factorisation par l'angle moitié} \\ &= 2\sin(x)\cos(6x). \end{aligned}$$

De plus, on a d'après le cercle trigonométrique :

$$\sin(x) \geqslant 0 \iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Big[0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi\Big],$$

et :

$$\cos(6x) \geqslant 0 \iff 6x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}\right].$$

On en déduit le tableau des signes de f.

x	$\cdots$	$-\frac{\pi}{12}$		0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{7\pi}{12}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{11\pi}{12}$		π		$\frac{13\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{17\pi}{12}$		$\frac{19\pi}{12}$		$\frac{7\pi}{4}$		$\frac{23\pi}{12}$		2π		$\frac{25\pi}{12}$	$\cdots$
$\sin(x)$	$\cdots$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$\cdots$
$\cos(6x)$	$\cdots$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-\cdots$
$f(x)$	$\cdots$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$\cdots$

Finalement, l'ensembler des solutions de (I_3) est :

$$\boxed{\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\begin{array}{c} \left[\frac{\pi}{12} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{12} + 2k\pi, \frac{7\pi}{12} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{11\pi}{12} + 2k\pi\right] \\ \cup \left[\pi + 2k\pi, \frac{13\pi}{12} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{17\pi}{12} + 2k\pi\right] \\ \cup \left[\frac{19\pi}{12} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{23\pi}{12} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi\right] \end{array} \right)}.$$

Problème 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $\Phi_n = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (i+j)$ et $\Psi_n = \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j)$.

1. *Montrer que $\Phi_2 \neq \Psi_2$.*

▶ On a :

$$\Phi_2 = \sum_{i=1}^{2} \prod_{j=1}^{2} (i+j) = \sum_{i=1}^{2} (i+1)(i+2) = \sum_{i=1}^{2} (i^2 + 3i + 2) = (1+3+2) + (4+6+2) = 18$$

$$\text{et} \quad \Psi_2 = \prod_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} (i+j) = \prod_{i=1}^{2} \Big((i+1) + (i+2)\Big) = \prod_{i=1}^{2} (2i+3) = (2+3)(4+3) = 35.$$

Donc on obtient que $\boxed{\Phi_2 \neq \Psi_2}$.

2. ***[Informatique]*** *On considère la fonction* `mystere` *écrite ci-dessous.*

```
def mystere(i,n):
    p=1
    for j in range(1,n+1):
        p = p*(i+j)
    return p
```

(a) *Que calcule la fonction* `mystere` *?*

▶ La fonction `mystere` prend en argument deux variables `i` et `n` contenant les entiers $i \in \mathbb{N}^\star$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, et renvoie la valeur du produit :

$$\boxed{\prod_{j=1}^{n}(i+j)}.$$

Attention à l'instruction `range(a,b)` *qui représente l'intervalle d'entiers* $[\![a, b-1]\!] = \{a, a+1, a+2, \ldots, b-2, b-1\}$*. En particulier, dans la boucle* `for` *de la fonction* `mystere`*, la variable* `j` *prend toutes les valeurs entières de* `1` *à* `n` *mais pas la valeur* `n+1`*.*

(b) *En utilisant la fonction* `mystere`*, écrire une fonction* `phi` *qui prend en argument un entier* $n \in \mathbb{N}^\star$ *et renvoie la valeur de* Φ_n*.*

▶ Par exemple :

```
def phi(n):
    s=0
    for i in range(1,n+1):
        s = s+mystere(i,n)
    return s
```

(c) *En vous inspirant des fonctions précédentes, écrire une fonction* `psi` *qui prend en argument un entier* $n \in \mathbb{N}^\star$ *et renvoie la valeur de* Ψ_n*.*

▶ Par exemple :

```
def psi(n):
    p=1
    for i in range(1,n+1):
        s=0
        for j in range(1,n+1):
            s = s+(i+j)
        p = p*s
    return p
```

On peut également écrire une fonction auxiliaire similaire à la fonction `mystere` *(peu importe le nom) pour calculer la somme* $\sum_{j=1}^{n}(i+j)$ *puis l'utiliser pour écrire la fonction* `psi`*.*

Pour la suite du problème, on fixe $n \in \mathbb{N}^\star$*.*

3. *En simplifiant chaque membre à l'aide de factorielles, montrer qu'on a pour tout* $i \in \mathbb{N}^\star$ *:*

$$\prod_{j=1}^{n}(i+j) = \left(\binom{n+i+1}{n+1} - \binom{n+i}{n+1}\right) n!.$$

▶ Soit $i \in \mathbb{N}^\star$. On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{n}(i+j) &= \prod_{k=i+1}^{i+n} k \quad \text{en posant le décalage d'indice } k=i+j \\
&= \frac{\prod_{k=1}^{i+n} k}{\prod_{k=1}^{i} k} \quad \text{par associativité du produit} \\
&= \boxed{\frac{(i+n)!}{i!}} \quad \text{par définition de la factorielle.}
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\left(\binom{n+i+1}{n+1} - \binom{n+i}{n+1}\right) n! &= \left(\binom{n+i}{n} + \binom{n+i}{n+1} - \binom{n+i}{n+1}\right) n! \quad \text{d'après la formule de Pascal} \\
&= \binom{n+i}{n} n! \\
&= \frac{(n+i)!}{n!(n+i-n)!} n! \quad \text{par définition des coefficients binomiaux car } 0 \leqslant n \leqslant n+i \\
&= \boxed{\frac{(n+i)!}{i!}}.
\end{aligned}$$

On peut également utiliser la définition des coefficients binomiaux puis tout mettre au même dénominateur :

$$\begin{aligned}
&\left(\binom{n+i+1}{n+1} - \binom{n+i}{n+1}\right) n! \\
&= \left(\frac{(n+i+1)!}{(n+1)!(n+i+1-(n+1))!} - \frac{(n+i)!}{(n+1)!(n+i-(n+1))!}\right) n! \\
&= \left(\frac{(n+i+1)!}{(n+1)!i!} - \frac{(n+i)!}{(n+1)!(i-1)!}\right) n! = \left(\frac{(n+i+1)! - (n+i)!i}{(n+1)!i!}\right) n! \\
&= \frac{(n+i)!(n+i+1-i)}{(n+1)!i!} n! = \frac{(n+i)!(n+1)}{(n+1)!i!} n! = \frac{(n+i)!}{n!i!} n! = \boxed{\frac{(n+i)!}{i!}}.
\end{aligned}$$

On en déduit bien que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^\star, \quad \boxed{\prod_{j=1}^{n}(i+j) = \left(\binom{n+i+1}{n+1} - \binom{n+i}{n+1}\right) n!}.$$

4. En déduire que $\Phi_n = \dfrac{(2n+1)!}{(n+1)!} - n!$.

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\Phi_n &= \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(i+j)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\binom{n+i+1}{n+1}-\binom{n+i}{n+1}\right)n! \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}\\
&= n!\sum_{i=1}^{n}\left(\binom{n+i+1}{n+1}-\binom{n+i}{n+1}\right) \quad \text{par linéarité de la somme}\\
&= n!\left(\binom{n+n+1}{n+1}-\binom{n+1}{n+1}\right) \quad \text{en reconnaissant une somme télescopique}\\
&= n!\left(\binom{2n+1}{n+1}-1\right) \quad \text{car } \binom{k}{k}=1 \text{ pour tout } k\in\mathbb{N}\\
&= n!\left(\frac{(2n+1)!}{(n+1)!(2n+1-(n+1))!}-1\right) \quad \text{par définition des coefficients binomiaux car } 0\leqslant n+1\leqslant 2n+1\\
&= n!\left(\frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!}-1\right)=\boxed{\frac{(2n+1)!}{(n+1)!}-n!}.
\end{aligned}$$

5. ***[Informatique]***

(a) *Écrire une fonction* `fact` *qui prend en argument un entier $k\in\mathbb{N}$ et renvoie la valeur de $k!$.*

▶ Par exemple :

```
def fact(k):
    p=1
    for i in range(1,k+1):
        p = p*i
    return p
```

On peut aussi écrire la fonction `fact` *de manière récursive :*

```
def fact(k):
    if k == 0:
        return 1
    else:
        return fact(k-1)
```

(b) *À l'aide de la fonction* `fact`*, écrire une fonction* `phi2` *similaire à la fonction* `phi` *mais utilisant le résultat de la question 4.*

▶ Par exemple :

```
def phi2(n):
    return fact(2*n+1)/fact(n+1)-fact(n)
```

6. *Montrer que $\Psi_n = C_n\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{n+1}{2}+i\right)$ où C_n est un réel à déterminer en fonction de n et dont l'expression ne contient ni le symbole $\sum$ ni le symbole $\prod$.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\Psi_n &= \prod_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (i+j) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} j \right) \quad \text{par linéarité} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left(ni + \frac{n(n+1)}{2} \right) \quad \text{d'après la formule de la somme des premiers entiers} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left(n \left(i + \frac{n+1}{2} \right) \right) = \prod_{i=1}^{n} n \times \prod_{i=1}^{n} \left(i + \frac{n+1}{2} \right) \quad \text{par multiplicativité} \\
&= \boxed{n^n \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{n+1}{2} + i \right)}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat en posant $\boxed{C_n = n^n}$.

7. *Dans cette question, on suppose que n est impair et on pose $n = 2k+1$ où $k \in \mathbb{N}$.*

   (a) *Simplifier $\prod_{i=1}^{2k+1} (k+1+i)$ à l'aide de factorielles.*

   ▶ On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{2k+1} (k+1+i) &= \prod_{\ell=k+2}^{3k+2} \ell \quad \text{en posant le décalage d'indice } \ell = k+1+i \\
&= \frac{\prod_{\ell=1}^{3k+2} \ell}{\prod_{\ell=1}^{k+1} \ell} \quad \text{par associativité du produit} \\
&= \boxed{\frac{(3k+2)!}{(k+1)!}} \quad \text{par définition de la factorielle.}
\end{aligned}$$

   (b) *En déduire que $\Psi_n = n^n \dfrac{((3n+1)/2)!}{((n+1)/2)!}$.*

   ▶ On a :

$$\begin{aligned}
\Psi_n &= n^n \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{n+1}{2} + i \right) \quad \text{d'après le résultat de la question 6} \\
&= n^n \prod_{i=1}^{2k+1} (k+1+i) \quad \text{car } n = 2k+1 \\
&= n^n \frac{(3k+2)!}{(k+1)!} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= n^n \frac{(3(n-1)/2+2)!}{((n-1)/2+1)!} \quad \text{car } k = (n-1)/2 \\
&= \boxed{n^n \frac{((3n+1)/2)!}{((n+1)/2)!}}.
\end{aligned}$$

8. *Dans cette question, on suppose que n est pair et on pose $n = 2k$ où $k \in \mathbb{N}^\star$.*

   (a) *En séparant les indices pairs et impairs, montrer que :*

$$\prod_{\ell=2}^{4k+1} (2k+\ell) = 4^{2k} \frac{(3k)!}{k!} \prod_{i=1}^{2k} \left(k + \tfrac{1}{2} + i \right).$$

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{\ell=2}^{4k+1}(2k+\ell) &= \underbrace{\prod_{\substack{\ell=2\\ \ell \text{ pair}}}^{4k+1}(2k+\ell)}_{\text{on pose } \ell=2i} \times \underbrace{\prod_{\substack{\ell=2\\ \ell \text{ impair}}}^{4k+1}(2k+\ell)}_{\text{on pose } \ell=2i+1} \quad \text{en séparant les indices pairs et impairs}\\
&= \prod_{2\leqslant 2i\leqslant 4k+1}(2k+2i) \times \prod_{2\leqslant 2i+1\leqslant 4k+1}(2k+2i+1)\\
&= \prod_{1\leqslant i\leqslant 2k+\frac{1}{2}}\Big(2(k+i)\Big) \times \prod_{\frac{1}{2}\leqslant i\leqslant 2k}\Big(2(k+i+\tfrac{1}{2})\Big)\\
&= \prod_{i=1}^{2k}2 \times \underbrace{\prod_{i=1}^{2k}(k+i)}_{\text{on pose } j=k+i} \times \prod_{i=1}^{2k}2 \times \prod_{i=1}^{2k}(k+i+\tfrac{1}{2}) \quad \text{par multiplicativité}\\
&= 2^{2k} \times \prod_{j=k+1}^{3k} j \times 2^{2k} \times \prod_{i=1}^{2k}(k+\tfrac{1}{2}+i) \quad \text{par décalage d'indice}\\
&= \left(2^{2k}\right)^2 \times \frac{\prod_{j=1}^{3k} j}{\prod_{j=1}^{k} j} \times \prod_{i=1}^{2k}(k+\tfrac{1}{2}+i) \text{ par commutativité et associativité du produit}\\
&= \boxed{4^{2k}\frac{(3k)!}{k!}\prod_{i=1}^{2k}\left(k+\tfrac{1}{2}+i\right)} \quad \text{par définition de la factorielle.}
\end{aligned}$$

(b) *En déduire que* $\Psi_n = \left(\frac{n}{4}\right)^n \frac{(3n+1)!(n/2)!}{(n+1)!(3n/2)!}$.

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\Psi_n &= n^n \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{n+1}{2}+i\right) \quad \text{d'après le résultat de la question 6}\\
&= n^n \prod_{i=1}^{2k}\left(k+\frac{1}{2}+i\right) \quad \text{car } n=2k\\
&= n^n \times \frac{\prod_{\ell=2}^{4k+1}(2k+\ell)}{4^{2k}(3k)!/k!} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}\\
&= \frac{n^n}{4^{2k}}\frac{k!}{(3k)!}\underbrace{\prod_{j=2k+2}^{6k+1} j}_{=\prod_{j=1}^{6k+1} j/\prod_{j=1}^{2k+1} j} \quad \text{en posant le décalage d'indice } j=2k+\ell\\
&= \frac{n^n}{4^{2k}}\frac{k!}{(3k)!}\frac{(6k+1)!}{(2k+1)!} \quad \text{par associativité du produit et définition de la factorielle}\\
&= \frac{n^n}{4^n}\frac{(n/2)!}{(3(n/2))!}\frac{(6(n/2)+1)!}{(n+1)!} \quad \text{car } k=n/2\\
&= \boxed{\left(\frac{n}{4}\right)^n \frac{(3n+1)!(n/2)!}{(n+1)!(3n/2)!}}.
\end{aligned}$$

9. ***[Informatique]*** *On rappelle que l'instruction* `n\%2` *est égale à* `0` *si* `n` *est pair et* `1` *si* `n` *est impair. À l'aide de la fonction* `fact`*, écrire une fonction* `psi2` *similaire à la fonction* `psi` *mais utilisant les résultats des questions 7 et 8.*

▶ Par exemple :

```
def psi2(n):
    if n%2 == 1:
        return (n**n)*fact((3*n+1)/2)/fact((n+1)/2)
    else:
        return ((n/4)**n)*fact(3*n+1)*fact(n/2)/(fact(n+1)*fact(3*n/2))
```

Les parenthèses autour des puissances `n**n` *et* `(n/4)**n` *ne sont pas nécessaires mais les expressions sont plus claires avec. En pratique, cette fonction retourne une erreur car les divisions* `(3*n+1)/2`*,* `(n+1)/2`*,* `n/2` *et* `3*n/2` *renvoient des nombres flottants (à virgules) même si les résultats sont entiers (par exemple* `1/1=1.0`*), alors que la fonction* `fact` *prend en argument un nombre entier* `k` *(à cause de l'instruction* `range(1,k+1)`*). Pour corriger cette erreur, il serait nécessaire de remplacer l'opérateur de division* `/` *par l'opérateur de division entière* `//` *(qui renvoie le quotient entier de la division sans calculer le reste) ou d'utiliser l'instruction* `int` *qui transforme les nombres flottants en nombres entiers.*

Exercice 3

Soit $x \in [-1,1]$. Montrer que $\arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

▶ Il suffit de montrer que $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$. Or, par définition de la fonction arccosinus, $\arccos(x)$ est l'unique solution de l'équation $\cos(\theta) = x$ d'inconnue $\theta \in [0,\pi]$. Or on a d'après les formules de trigonométrie (symétrie des fonction cosinus et sinus et réciprocité de la fonction arcsinus) :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) = \sin(\arcsin(x)) = x.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
& \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{par définition de la fonction arcsinus} \\
\text{donc} \quad & -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin(x) \leqslant \frac{\pi}{2} \\
\text{donc} \quad & 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - \arcsin(x) \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \\
\text{donc} \quad & \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) \in [0,\pi].
\end{aligned}$$

Ainsi $\theta = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right)$ est solution de l'équation $\cos(\theta) = x$ et $\theta \in [0,\pi]$. Par définition de la fonction arccosinus, on en déduit que :

$$\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) = \arccos(x)$$

et par conséquent :

$$\boxed{\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}}.$$

N'oubliez pas de justifier que $\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) \in [0,\pi]$ *sinon on peut seulement déduire de* $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) = x$ *que* $\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) \equiv \arccos(x)$ *ou* $-\arccos(x)$ $[2\pi]$.