DS n° 3 de mathématiques et d'informatique

durée : 2 heures

L'usage de la calculatrice ou de documents est interdit.
Il est recommandé de lire l'ensemble de l'énoncé attentivement et patiemment.
Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en mentionnant les hypothèses que vous avez été amené à formuler.
Le soin de la présentation, la qualité de la rédaction, ainsi que la rigueur, la clarté et la concision des raisonnements constitueront un facteur important d'appréciation de la copie.

Sujet A

Exercice

Dans cet exercice, on fixe un réel $\lambda > 0$ et on considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$u_1 = \lambda \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = \frac{3\lambda u_n}{u_n + \lambda}.$$

1. On pose la fonction $f : x \mapsto 3\lambda x/(x+\lambda)$.
   (a) Dresser le tableau des variations de f sur son ensemble de définition noté $\mathscr{D}_f$.
   (b) Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \in \mathscr{D}_f$.
   (c) À l'aide des résultats précédents, tracer sur un même graphique : la droite d'équation $y = x$, l'allure de la courbe représentative de f, et les premiers termes de $(u_n)_{n\geqslant 1}$. Quelles conjectures peut-on formuler pour la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$?
2. Montrer que $\lambda \leqslant u_n < u_{n+1} < 2\lambda$ pour tout $n \geqslant 1$.
3. On définit une suite auxiliaire $(a_n)_{n\geqslant 1}$ par $a_n = 1/u_n$ pour tout $n \geqslant 1$.
   (a) Montrer que $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est arithmético-géométrique.
   (b) Calculer le terme général de $(a_n)_{n\geqslant 1}$.
   (c) En déduire une expression de u_n en fonction de n, pour tout $n \geqslant 1$.

Problème

On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes définie par :

$$z_0 = 1+i \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = (-1+9i)z_n + (8+4i)\overline{z_n}.$$

1. [**Informatique**] En Python, on modélisera chaque nombre complexe par la 2-liste de ses parties réelle et imaginaire. Par exemple, le nombre complexe $4+2i$ est représenté par la liste `[4,2]`, et la liste `[3,-1]` correspond au nombre complexe $3-i$.
   (a) Écrire une fonction `conjugue(L)` qui prend en argument une liste `L` représentant un nombre complexe z, et qui renvoie la liste représentant son conjugué $\overline{z}$.
   (b) Écrire une fonction `somme(L,M)` qui prend en argument deux listes `L` et `M` représentant deux nombres complexes z et w, et qui renvoie la liste représentant leur somme $z+w$.
   (c) Écrire une fonction `produit(L,M)` qui prend en argument deux listes `L` et `M` représentant deux nombres complexes z et w, et qui renvoie la liste représentant leur produit zw.
   (d) En réutilisant les fonctions des questions précédentes, écrire une fonction `suite(n)` qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie la liste représentant le nombre complexe z_n.
   (e) Que renvoie la fonction ci-dessous ?

```
def mystere():
    n=1
    L=suite(n)
    while L[0]!=L[1]:
        n=n+1
        L=suite(n)
    return n
```

2. [**Mathématiques**] Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note x_n la partie réelle de z_n et y_n sa partie imaginaire.
   (a) Calculer x_0, y_0, x_1 et y_1.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $x_{n+1} = 7x_n - 5y_n$ et déterminer une expression similaire pour y_{n+1}.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $x_{n+2} = -2x_{n+1} - 2x_n$ et déterminer une expression similaire pour y_{n+2}.
   (d) Calculer les termes généraux des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (e) En déduire une expression de z_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.