Corrigé du DS n° 3 de mathématiques et d'informatique

Sujet A

Exercice

Dans cet exercice, on fixe un réel $\lambda > 0$ et on considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$u_1 = \lambda \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = \frac{3\lambda u_n}{u_n + \lambda}.$$

1. *On pose la fonction $f : x \mapsto 3\lambda x/(x+\lambda)$.*

   (a) *Dresser le tableau des variations de f sur son ensemble de définition noté $\mathscr{D}_f$.*

▶ On a :

$$f(x) = \frac{3\lambda x}{x+\lambda} \text{ est défini } \iff x + \lambda = 0 \iff x = -\lambda.$$

Donc f est définie et dérivable sur $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-\lambda\}}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, on a d'après la formule de dérivée d'un quotient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\lambda\}, \quad f'(x) = \frac{3\lambda \times (x+\lambda) - 3\lambda x \times 1}{(x+\lambda)^2} = \frac{3\lambda^2}{(x+\lambda)^2} > 0.$$

Par conséquent, f est strictement croissante sur $]-\infty, -\lambda[$ et sur $]-\lambda, +\infty[$.

Attention : f n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{-\lambda\}$! Le théorème «si f' est positive sur I alors f est croissante sur I» est vrai seulement si I est un intervalle, alors qu'ici $\mathbb{R} \setminus \{-\lambda\} =]-\infty, -\lambda[\cup]-\lambda, +\infty[$ n'est pas un intervalle

. De plus, on a :

— $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3\lambda x}{x+\lambda} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3\lambda}{1+\frac{\lambda}{x}} = \frac{3\lambda}{1+0} = 3\lambda,$

— $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-\lambda\\ x<-\lambda}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-\lambda\\ x<-\lambda}} \frac{3\lambda x}{x+\lambda} = \frac{-3\lambda^2}{0^-} = +\infty,$

— $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-\lambda\\ x>-\lambda}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-\lambda\\ x>-\lambda}} \frac{3\lambda x}{x+\lambda} = \frac{-3\lambda^2}{0^+} = -\infty,$

— et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3\lambda x}{x+\lambda} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3\lambda}{1+\frac{\lambda}{x}} = \frac{3\lambda}{1+0} = 3\lambda.$

On en déduit le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		$-\lambda$		$+\infty$
$f(x)$	3λ	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	3λ

(b) *Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \in \mathscr{D}_f$.*

▶ Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\lambda\}$. On a :

$$f(x) - x = \frac{3\lambda x}{x+\lambda} - \frac{x(x+\lambda)}{x+\lambda} = \frac{3\lambda x - x^2 - \lambda x}{x+\lambda} = \frac{x(2\lambda - x)}{x+\lambda}.$$

On en déduit le signe de $f(x) - x$ à l'aide d'un tableau de signes (on a $-\lambda < 0 < 2\lambda$ car $\lambda > 0$) :

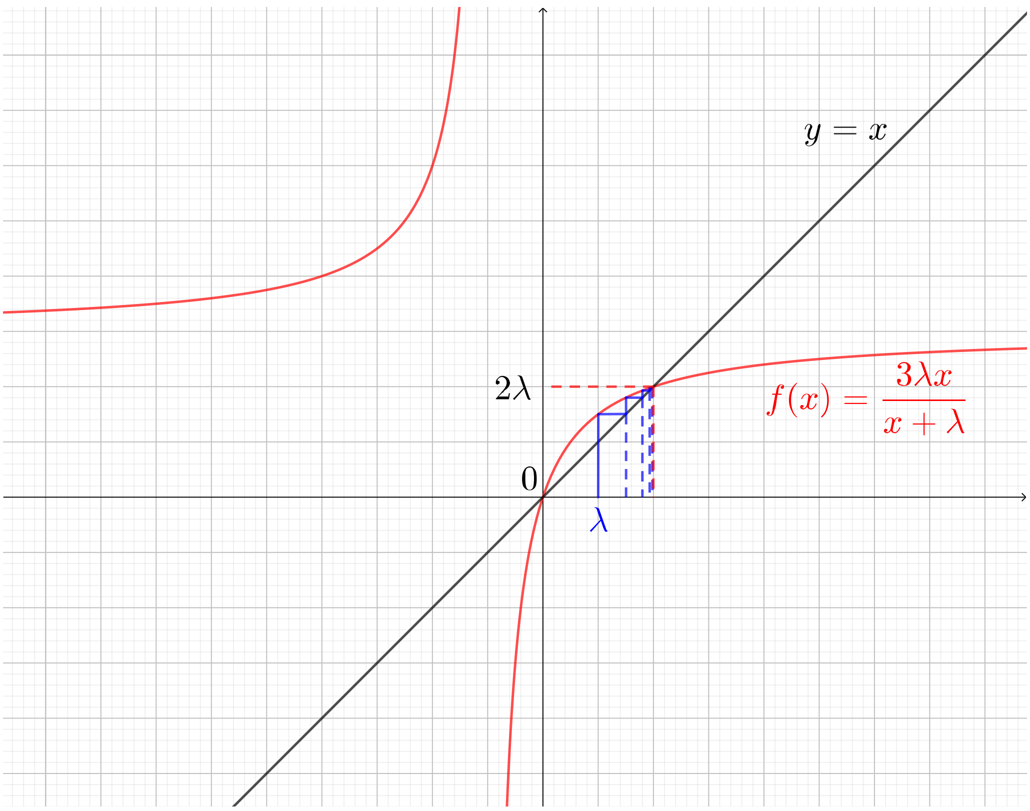
x		$-\lambda$		0		2λ	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2\lambda - x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$x + \lambda$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x) - x$	$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$

(c) *À l'aide des résultats précédents, tracer sur un même graphique : la droite d'équation $y = x$, l'allure de la courbe représentative de f, et les premiers termes de $(u_n)_{n\geqslant 1}$. Quelles conjectures peut-on formuler pour la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$?*

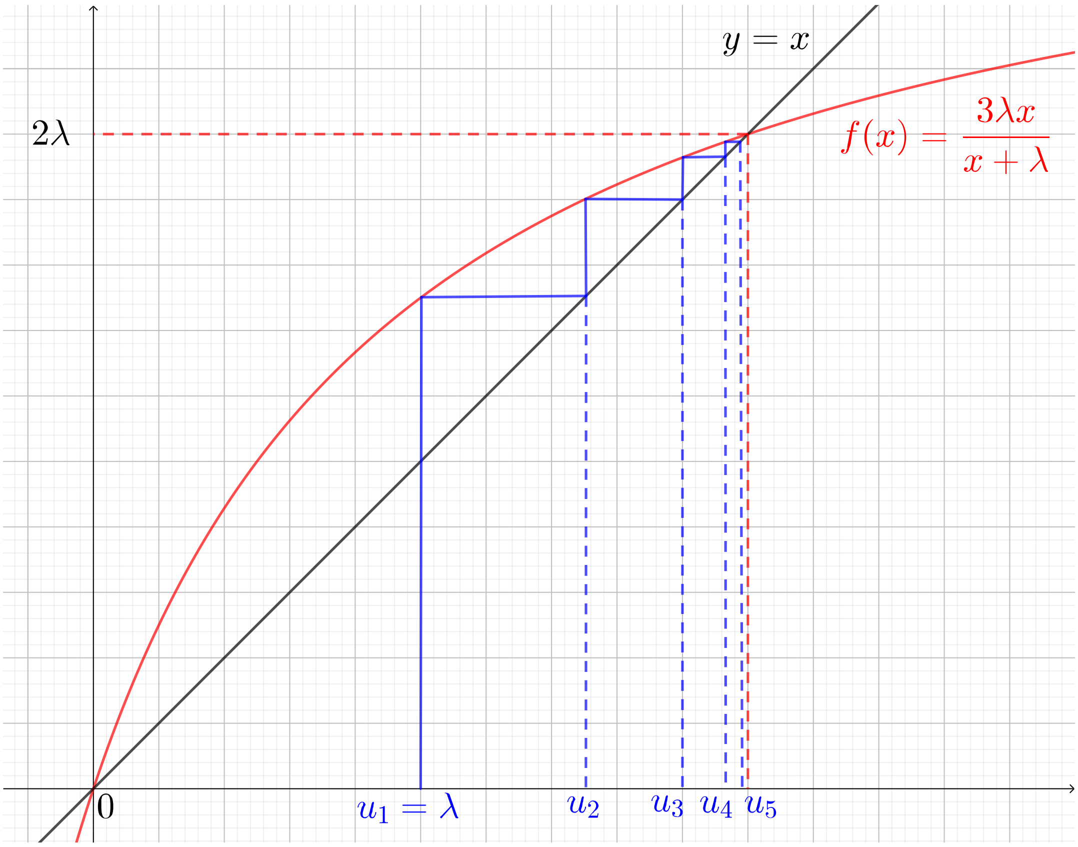
▶

Faîtes apparaître les résultats des questions précédentes sur votre graphique : la courbe représentative de f est strictement croissante sur $]-\infty, -\lambda[$ et sur $]-\lambda, +\infty[$, elle est située au-dessus de la droite d'équation $y = x$ sur $]-\infty, -\lambda[\cup [0, 2\lambda]$ et en-dessous sur $]-\lambda, 0] \cup [2\lambda, +\infty[$ (en particulier, elle coupe la droite d'équation $y = x$ à l'origine et au point de coordonnées $(2\lambda, 2\lambda)$).

On a :



Et en zoomant pour les valeurs de x entre λ et 2λ :



On conjecture que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est $\boxed{\text{minorée par } \lambda}$, $\boxed{\text{majorée par } 2\lambda}$ et $\boxed{\text{strictement croissante}}$.

On peut également conjecturer que u_n tend vers 2λ lorsque $n \to +\infty$ mais nous apprendrons plus tard dans l'année à étudier la convergence des suites.

2. *Montrer que $\lambda \leqslant u_n < u_{n+1} < 2\lambda$ pour tout $n \geqslant 1$.*

▶ On raisonne par récurrence. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $P(n)$: «$\lambda \leqslant u_n < u_{n+1} < 2\lambda$».
Initialisation. Pour $n = 1$, on a d'après l'énoncé $u_1 = \lambda$ et :

$$u_2 = \frac{3\lambda u_1}{u_1 + \lambda} = \frac{3\lambda^2}{2\lambda} = \frac{3}{2}\lambda.$$

De plus, $\lambda < \frac{3}{2}\lambda < 2\lambda$ car $1 < \frac{3}{2} < 2$ et $\lambda > 0$. On en déduit que $\lambda \leqslant u_1 < u_2 < 2\lambda$, donc que $P(1)$ est vérifiée.
Hérédité. On suppose que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geqslant 1$ fixé. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. On sait que :

$$\lambda \leqslant u_n < u_{n+1} < 2\lambda \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence.}$$

Or la fonction f est strictement croissante sur $]-\lambda, +\infty[$ d'après le résultat de la question 1(a), donc en particulier sur $[\lambda, 2\lambda]$. Par conséquent :

$$f(\lambda) \leqslant f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(2\lambda).$$

Or :
— $f(\lambda) = \dfrac{3\lambda \times \lambda}{\lambda + \lambda} = \dfrac{3}{2}\lambda$,
— $f(u_n) = \dfrac{3\lambda u_n}{u_n + \lambda} = u_{n+1}$ d'après la relation de récurrence de l'énoncé,
— $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ car la relation de récurrence est vraie pour tout $n \geqslant 1$,
— et $f(2\lambda) = \dfrac{3\lambda \times 2\lambda}{2\lambda + \lambda} = 2\lambda$.

Par conséquent :

$$\frac{3}{2}\lambda \leqslant u_{n+1} < u_{n+2} < 2\lambda.$$

De plus, $\lambda < \frac{3}{2}\lambda$ car $1 < \frac{3}{2}$ et $\lambda > 0$. On en déduit que $\lambda \leqslant u_{n+1} < u_{n+2} < 2\lambda$, donc que $P(n+1)$ est vérifiée. Ainsi, on a montré que $P(n) \implies P(n+1)$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on a bien montré que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad \lambda \leqslant u_n < u_{n+1} < 2\lambda}$$

ce qui prouve les conjectures établies à la question précédente.

3. *On définit une suite auxiliaire $(a_n)_{n\geqslant 1}$ par $a_n = 1/u_n$ pour tout $n \geqslant 1$.*

(a) *Montrer que $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est arithmético-géométrique.*

▶ Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}} && \text{par définition de la suite auxiliaire} \\
&= \frac{1}{\frac{3\lambda u_n}{u_n+\lambda}} && \text{d'après la relation de récurrence de l'énoncé} \\
&= \frac{u_n+\lambda}{3\lambda u_n} \\
&= \frac{1+\frac{\lambda}{u_n}}{3\lambda} && \begin{array}{l}\text{en simplifiant par } u_n \neq 0 \text{ car } u_n \geqslant \lambda > 0 \\ \text{d'après le résultat de la question précédente}\end{array} \\
&= \frac{1+\lambda a_n}{3\lambda} && \text{par définition de la suite auxiliaire} \\
&= \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3\lambda}.
\end{aligned}$$

On reconnaît bien une $\boxed{\text{suite arithmético-géométrique}}$ de raison géométrique $\frac{1}{3}$ et de raison arithmétique $\frac{1}{3\lambda}$.

(b) *Calculer le terme général de $(a_n)_{n\geqslant 1}$.*

▶ On commence par résoudre l'équation suivante d'inconnue $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha = \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3\lambda} \iff \left(1 - \frac{1}{3}\right)\alpha = \frac{1}{3\lambda} \iff \alpha = \frac{\frac{1}{3\lambda}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2\lambda}.$$

Puisque $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est arithmético-géométrique de raison géométrique $\frac{1}{3}$ d'après le résultat de la question précédente, on sait que la suite $(b_n = a_n - \alpha)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Par conséquent :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \underbrace{b_n}_{=a_n-\alpha} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \underbrace{b_1}_{=a_1-\alpha}.$$

Puisque $\alpha = \frac{1}{2\lambda}$ et $a_1 = \frac{1}{u_1} = \frac{1}{\lambda}$, on obtient finalement que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_n = \frac{1}{3^{n-1}}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda}\right) + \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{3^{n-1} \times 2\lambda} + \frac{1}{2\lambda} = \boxed{\frac{1+3^{n-1}}{2\lambda 3^{n-1}}}.$$

(c) *En déduire une expression de u_n en fonction de n, pour tout $n \geqslant 1$.*

▶ Soit $n \geqslant 1$. Puisque $a_n = \frac{1}{u_n}$ par définition de la suite auxiliaire, on a $u_n = \frac{1}{a_n}$. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{1}{\frac{1+3^{n-1}}{2\lambda 3^{n-1}}} = \boxed{\frac{2\lambda 3^{n-1}}{1+3^{n-1}}}.$$

On peut en déduire la conjecture sur la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$ établie à la question 1(c). En effet :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\lambda 3^{n-1}}{1+3^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\lambda}{\frac{1}{3^{n-1}}+1} = \frac{2\lambda}{0+1} = 2\lambda.$$

Problème

On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes définie par :

$$z_0 = 1+i \quad \textit{et} \quad \forall n\in\mathbb{N},\ z_{n+1} = (-1+9i)z_n + (8+4i)\overline{z_n}.$$

1. ***[Informatique]*** *En Python, on modélisera chaque nombre complexe par la 2-liste de ses parties réelle et imaginaire. Par exemple, le nombre complexe $4+2i$ est représenté par la liste* `[4,2]`*, et la liste* `[3,-1]` *correspond au nombre complexe $3-i$.*

   (a) *Écrire une fonction* `conjugue(L)` *qui prend en argument une liste* `L` *représentant un nombre complexe z, et qui renvoie la liste représentant son conjugué $\overline{z}$.*

   ▶

   Pour rappel : $\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z)$ *donc* $\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$ *et* $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$.

   Par exemple :

```
def conj(L):
    x=L[0]
    y=-L[1]
    return [x,y]
```

   (b) *Écrire une fonction* `somme(L,M)` *qui prend en argument deux listes* `L` *et* `M` *représentant deux nombres complexes z et w, et qui renvoie la liste représentant leur somme $z+w$.*

   ▶

   Pour rappel :

$$\begin{aligned} z+w &= (\mathrm{Re}(z)+i\mathrm{Im}(z)) + (\mathrm{Re}(w)+i\mathrm{Im}(w)) \\ &= (\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(w)) + i\,(\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(w)) \end{aligned}$$

$$\textit{donc} \quad \mathrm{Re}(z+w) = \mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(w) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Im}(z+w) = \mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(w).$$

   Par exemple :

```
def somme(L,M):
    x=L[0]+M[0]
    y=L[1]+M[1]
    return [x,y]
```

   (c) *Écrire une fonction* `produit(L,M)` *qui prend en argument deux listes* `L` *et* `M` *représentant deux nombres complexes z et w, et qui renvoie la liste représentant leur produit zw.*

   ▶

   Pour rappel :

$$\begin{aligned} zw &= (\mathrm{Re}(z)+i\mathrm{Im}(z))\,(\mathrm{Re}(w)+i\mathrm{Im}(w)) \\ &= \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(w) + i\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(w) + i\mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(w) - \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w) \\ &= (\mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(w) - \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)) + i\,(\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(w) + \mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(w)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textit{donc} \quad & \mathrm{Re}(zw) = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(w) - \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w) \\ \textit{et} \quad & \mathrm{Im}(zw) = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(w) + \mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(w). \end{aligned}$$

Par exemple :

```
def produit(L,M):
    x=L[0]*M[0]-L[1]*M[1]
    y=L[0]*M[1]+L[1]*M[0]
    return [x,y]
```

(d) *En réutilisant les fonctions des questions précédentes, écrire une fonction* `suite(n)` *qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie la liste représentant le nombre complexe z_n.*

▶ Par exemple :

```
def suite(n):
    L=[1,1]
    for i in range(n):
        L=somme(produit([-1,9],L),produit([8,4],conj(L)))
    return L
```

(e) *Que renvoie la fonction ci-dessous ?*

```
def mystere():
    n=1
    L=suite(n)
    while L[0]!=L[1]:
        n=n+1
        L=suite(n)
    return n
```

▶ La fonction `mystere` commence par initialiser la variable `n` avec la valeur 1 et la liste `L` représentant le nombre complexe z_n, donc z_1. Ensuite, la fonction `mystere` teste si `L[0]` est différent de `L[1]`, c'est-à-dire si la partie réelle de z_n est différente de la partie imaginaire de z_n.

— Si les parties réelle et imaginaire de z_n sont différentes, alors la fonction `mystere` ajoute 1 à la valeur de `n`, donc la variable `n` prend la valeur entière suivante, et recalcule la liste `L` représentant le nombre complexe z_n pour cette nouvelle valeur de n. Puis la fonction `mystere` teste à nouveau si les parties réelles et imaginaires de z_n sont différentes pour cette nouvelle valeur de n. Tant que les parties réelles et imaginaires de z_n sont différentes, la fonction `mystere` réitère ces opérations.

— Dès que les parties réelles et imaginaires de z_n ne sont plus différentes, donc qu'elles sont égales, la fonction `mystere` s'arrête et renvoie la valeur de la variable `n`.

Ainsi, la fonction `mystere` renvoie $\boxed{\text{le plus petit entier } n \geqslant 1 \text{ tel que les parties réelle et imaginaire de } z_n \text{ sont égales}}$.

D'après l'énoncé, on a :

$$\begin{aligned}
z_0 &= 1+i,\\
z_1 &= (-1+9i)z_0 + (8+4i)\overline{z_0} = (-1+9i)(1+i) + (8+4i)(1-i)\\
&= (-10+8i) + (12-4i) = 2+4i,\\
z_2 &= (-1+9i)z_1 + (8+4i)\overline{z_1} = (-1+9i)(2+4i) + (8+4i)(2-4i)\\
&= (-38+14i) + (32-24i) = -6-10i,\\
z_3 &= (-1+9i)z_2 + (8+4i)\overline{z_2} = (-1+9i)(-6-10i) + (8+4i)(-6+10i)\\
&= (96-44i) + (-88+56i) = 8+12i,\\
z_4 &= (-1+9i)z_3 + (8+4i)\overline{z_3} = (-1+9i)(8+12i) + (8+4i)(8-12i)\\
&= (-116+60i) + (112-64i) = -4-4i.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction `mystere` renvoie $\boxed{4}$.

2. ***[Mathématiques]*** *Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note x_n la partie réelle de z_n et y_n sa partie imaginaire.*

(a) *Calculer x_0, y_0, x_1 et y_1.*

▶ On a d'après l'énoncé :

$$z_0 = 1 + i \quad \text{donc} \quad \boxed{x_0 = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{y_0 = 1},$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad z_1 &= (-1+9i)z_0 + (8+4i)\overline{z_0} = (-1+9i)(1+i) + (8+4i)(1-i) \\ &= (-10+8i) + (12-4i) = 2+4i \quad \text{donc} \quad \boxed{x_1 = 2} \quad \text{et} \quad \boxed{y_1 = 4}. \end{aligned}$$

(b) *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $x_{n+1} = 7x_n - 5y_n$ et déterminer une expression similaire pour y_{n+1}.*

▶ On a d'après l'énoncé :

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= (-1+9i)z_n + (8+4i)\overline{z_n} \\ &= (-1+9i)(x_n + iy_n) + (8+4i)(x_n - iy_n) \quad \text{car } z_n = x_n + iy_n \\ &= (-x_n - 9y_n) + i(9x_n - y_n) + (8x_n + 4y_n) + i(4x_n - 8y_n) \\ &= \underbrace{(7x_n - 5y_n)}_{=x_{n+1}} + i\underbrace{(13x_n - 9y_n)}_{=y_{n+1}}. \end{aligned}$$

Puisque $z_{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}$, on en déduit que $\boxed{x_{n+1} = 7x_n - 5y_n}$ et $\boxed{y_{n+1} = 13x_n - 9y_n}$.

(c) *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $x_{n+2} = -2x_{n+1} - 2x_n$ et déterminer une expression similaire pour y_{n+2}.*

▶ On déduit du premier résultat de la question précédente que :

$$y_n = \frac{x_{n+1} - 7x_n}{-5} = -\frac{1}{5}x_{n+1} + \frac{7}{5}x_n.$$

Puisque cette relation est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi que :

$$y_{n+1} = -\frac{1}{5}x_{n+2} + \frac{7}{5}x_{n+1}.$$

En réinjectant ces expressions dans le deuxième résultat de la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{5}x_{n+2} + \frac{7}{5}x_{n+1} = 13x_n - 9\left(-\frac{1}{5}x_{n+1} + \frac{7}{5}x_n\right) \\ \text{donc} \quad & -x_{n+2} + 7x_{n+1} = 65x_n + 9x_{n+1} - 63x_n \\ \text{donc} \quad & x_{n+2} = (7-9)x_{n+1} + (63-65)x_n = \boxed{-2x_{n+1} - 2x_n}. \end{aligned}$$

De même, on déduit du deuxième résultat de la question précédente que :

$$x_n = \frac{y_{n+1} + 9y_n}{13} = \frac{1}{13}y_{n+1} + \frac{9}{13}y_n.$$

Puis on obtient en réinjectant cette expression dans le premier résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{13}y_{n+2} + \frac{9}{13}y_{n+1} = 7\left(\frac{1}{13}y_{n+1} + \frac{9}{13}y_n\right) - 5y_n \\ \text{donc} \quad & y_{n+2} + 9y_{n+1} = 7y_{n+1} + 63y_n - 65y_n \\ \text{donc} \quad & y_{n+2} = (7-9)y_{n+1} + (63-65)y_n = \boxed{-2y_{n+1} - 2y_n}. \end{aligned}$$

(d) *Calculer les termes généraux des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

▶ D'après les résultats de la question précédente, on reconnaît des suites récurrentes linéaires d'ordre deux. On commence donc par résoudre l'équation caractéristique d'inconnue $q \in \mathbb{C}$:

$$q^2 = -2q - 2 \iff q^2 + 2q + 2 = 0.$$

On reconnaît une équation du second degré à coefficients réels dont le discriminant est égal à $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times 1 = -4 < 0$. L'équation caractéristique admet donc deux racines complexes conjugués :

$$q_1 = \frac{-2 + i\sqrt{|\Delta|}}{2} = -1 + i \quad \text{et} \quad q_2 = \overline{q_1} = -1 - i.$$

On écrit ces racines sous forme exponentielle. On cherche $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $q_1 = \rho e^{i\theta}$ (et donc $q_2 = \overline{q_1} = \rho e^{-i\theta}$). On a pour le module :

$$\rho = |q_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Par conséquent :

$$-1 + i = q_1 = \rho e^{i\theta} = \sqrt{2}(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = \sqrt{2}\cos(\theta) + i\sqrt{2}\sin(\theta).$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire, on en déduit qu'on cherche un argument θ tel que :

$$\cos(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'après les valeurs remarquables du cercle trigonométrique, on peut choisir l'argument $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Finalement, les deux solutions de l'équation caractéristique sont :

$$\boxed{q_1 = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}} \quad \text{et} \quad \boxed{q_2 = \sqrt{2}e^{-i3\pi/4}}.$$

Par conséquent, il existe quatre constantes réelles A, B, C et D telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(A\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right) + B\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)\right) \\ y_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(C\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right) + D\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)\right). \end{cases}$$

Pour déterminer ces quatre constantes, on utilise les premières termes de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire les résultats de la question 2(a).

$$1 = x_0 = \underbrace{\left(\sqrt{2}\right)^0}_{=1} \left(A \underbrace{\cos(0)}_{=1} + B\sin \underbrace{(0)}_{=0}\right) = A \quad \text{donc} \quad \boxed{A = 1},$$

$$2 = x_1 = \underbrace{\left(\sqrt{2}\right)^1}_{=\sqrt{2}} \left(\underbrace{A}_{=1} \underbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}_{=-\sqrt{2}/2} + B\sin \underbrace{\left(\frac{3\pi}{4}\right)}_{=\sqrt{2}/2}\right) = -1 + B \quad \text{donc} \quad \boxed{B = 3},$$

$$1 = y_0 = \underbrace{\left(\sqrt{2}\right)^0}_{=1} \left(C \underbrace{\cos(0)}_{=1} + D\sin \underbrace{(0)}_{=0}\right) = C \quad \text{donc} \quad \boxed{C = 1},$$

$$4 = y_1 = \underbrace{\left(\sqrt{2}\right)^1}_{=\sqrt{2}} \left(\underbrace{C}_{=1} \underbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}_{=-\sqrt{2}/2} + D\sin \underbrace{\left(\frac{3\pi}{4}\right)}_{=\sqrt{2}/2}\right) = -1 + D \quad \text{donc} \quad \boxed{D = 5}.$$

Finalement, on obtient que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right) + 3\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)\right) \\ y_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right) + 5\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)\right). \end{cases}}$$

(e) *En déduire une expression de z_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

► Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $z_n = x_n + iy_n$, on a d'après le résultat de la question précédente :

$$\boxed{z_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right) + 3\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)\right) + i\left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right) + 5\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)\right)}.$$