DS n$^{\text{o}}$ 3 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de documents est interdit.
Il est recommandé de lire l'ensemble de l'énoncé attentivement et patiemment.
Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en mentionnant les hypothèses que vous avez été amené à formuler.
Le soin de la présentation, la qualité de la rédaction, ainsi que la rigueur, la clarté et la concision des raisonnements constitueront un facteur important d'appréciation de la copie.

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 3, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ converge et de déterminer sa limite.

1. [**Informatique**] Chaque fonction demandée est à écrire en Python et peut faire appel aux fonctions écrites dans les questions précédentes, même si celles-ci n'ont pas été répondues.
   (a) Écrire une fonction `fact` qui prend en argument un entier $m \in \mathbb{N}$ puis qui renvoie la valeur de sa factorielle $m!$.
   (b) Écrire une fonction `coeffbi` qui prend en arguments deux entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$ puis qui renvoie la valeur du coefficient binomial $\binom{m}{p}$.
   (c) Écrire une fonction `suite` qui prend en argument un entier $n \geqslant 3$ puis qui renvoie la valeur de u_n.
2. Calculer u_3, u_4, et u_5.
3. Dans cette question, on fixe un entier $n \geqslant 3$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{\binom{n+1}{k}}$.
   (b) Justifier que $\dfrac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \dfrac{1}{\binom{n+1}{k+1}}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ puis en déduire que $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{k}}$.
4. Prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante puis en déduire qu'elle converge.
5. Dans cette question, on fixe un entier $n \geqslant 3$.
   (a) Montrer que
   $$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \frac{n+2}{\binom{n}{k}} - \frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}} = \frac{n-k}{\binom{n}{k+1}} - \frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}.$$
   (b) En déduire que $(n+2)(u_n - 1) - (2n+2)\left(u_{n+1} - \frac{1}{n+1} - 1\right) = -n$ puis que $u_{n+1} = 1 + \frac{n+2}{2n+2} u_n$.
6. On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. À l'aide du résultat de la question précédente, prouver que $\ell = 2$.

Exercice 2

Cet exercice propose d'étudier le comportement asymptotique de trois modèles de dynamique de population. On note P_n le nombre d'individus à la génération $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $P_0 > 0$ désigne l'effectif initial de la population. Un premier modèle d'évolution consiste à supposer que la production de nouveaux individus est proportionnelle au nombre d'individus présents, c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} - P_n = kP_n \tag{M1}$$

où $k > 0$ est un taux d'accroissement.

1. (a) Dans l'hypothèse du modèle (M1), exprimer P_n en fonction de k, n et P_0.
   (b) En déduire la limite de P_n quand $n \to +\infty$.

Afin de prendre en compte le fait que la population évolue dans un biotope fermé, c'est-à-dire un milieu ne pouvant pas contenir plus de $M > 0$ individus, on considère un deuxième modèle qui freine la croissance du modèle (M1) d'autant plus que l'effectif de la population est proche de la capacité d'accueil M :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} - P_n = kP_n(M - P_{n+1}) \tag{M2}$$

2. Dans cette question, on considère l'hypothèse du modèle (M2).
   (a) Montrer que $P_n > 0$ à toute génération $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 1/P_n$. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.
   (c) Exprimer P_n en fonction de k, M, n et P_0.
   (d) En déduire la limite de P_n quand $n \to +\infty$.

On suppose désormais que les effets d'évolution du modèle (M2) se produisent avec une génération de retard sur la population, c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} - P_n = kP_n(M - P_{n+2}) \tag{M3}$$

3. (a) En vous inspirant de la preuve de la question 2(a) et sans justifier, donner une condition suffisante pour que $P_n > 0$ à toute génération $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Trouver un réel α, qu'on exprimera en fonction de M, tel que la suite $(v_n = 1/P_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = \frac{v_n}{kM + 1}.$$

   (c) Exprimer v_n en fonction de k, M, n, v_0 et v_1 puis en déduire que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n| \leqslant \frac{|v_0| + |v_1|}{(kM + 1)^{(n-1)/2}}.$$

   (d) En déduire la limite de P_n quand $n \to +\infty$.