Corrigé du DS n$^{\text{o}}$ 3 de mathématiques et d'informatique

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 3, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ converge et de déterminer sa limite.

1. ***[Informatique]** Les fonctions demandées sont à écrire en Python.*

   (a) *Écrire une fonction `fact` qui prend en argument un entier $m \in \mathbb{N}$ puis qui renvoie la valeur de sa factorielle $m!$.*

   ▶ Par exemple :

```
def fact(m):
    P=1
    for i in range(1,m+1):
        P=P*i
    return P
```

   (b) *Écrire une fonction `coeffbi` qui prend en arguments deux entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$ puis qui renvoie la valeur du coefficient binomial $\binom{m}{p}$.*

   ▶ Par exemple :

```
def coeffbi(p,m):
    if p<0 or p>m:
        return 0
    else:
        return fact(m)/(fact(p)*fact(m-p))
```

   (c) *Écrire une fonction `suite` qui prend en argument un entier $n \geqslant 3$ puis qui renvoie la valeur de u_n.*

   ▶ Par exemple :

```
def suite(n):
    S=0
    for k in range(n+1):
        S=S+1/coeffbi(k,n)
    return S
```

2. *Calculer u_3, u_4, et u_5.*

   ▶ On obtient à l'aide du triangle de Pascal :

$$u_3 = \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{\binom{3}{k}} = \frac{1}{\binom{3}{0}} + \frac{1}{\binom{3}{1}} + \frac{1}{\binom{3}{2}} + \frac{1}{\binom{3}{3}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} = \boxed{\frac{8}{3}},$$

$$u_4 = \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{\binom{4}{k}} = \frac{1}{\binom{4}{0}} + \frac{1}{\binom{4}{1}} + \frac{1}{\binom{4}{2}} + \frac{1}{\binom{4}{3}} + \frac{1}{\binom{4}{4}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{1} = \boxed{\frac{8}{3}}$$

$$\text{et} \quad u_5 = \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{\binom{5}{k}} = \frac{1}{\binom{5}{0}} + \frac{1}{\binom{5}{1}} + \frac{1}{\binom{5}{2}} + \frac{1}{\binom{5}{3}} + \frac{1}{\binom{5}{4}} + \frac{1}{\binom{5}{5}} = \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{1} = \boxed{\frac{13}{5}}.$$

3. *Dans cette question, on fixe un entier $n \geqslant 3$.*

(a) *Montrer que* $\displaystyle\sum_{k=0}^{2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{\binom{n+1}{k}}$.

▶ On a :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2} \frac{1}{\binom{n}{k}} - \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} &= \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \frac{1}{\binom{n}{2}} - \left(\frac{1}{\binom{n+1}{0}} + \frac{1}{\binom{n+1}{1}} + \frac{1}{\binom{n+1}{2}} + \frac{1}{\binom{n+1}{3}} \right) \\
&= \frac{1}{1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\frac{n(n-1)}{2}} - \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{\frac{(n+1)n}{2}} - \frac{1}{\frac{(n+1)n(n-1)}{6}} \\
&= \frac{1}{n} + \frac{2}{n(n-1)} - \frac{1}{n+1} - \frac{2}{(n+1)n} - \frac{6}{(n+1)n(n-1)} \\
&= \frac{(n+1)(n-1) + 2(n+1) - n(n-1) - 2(n-1) - 6}{(n+1)n(n-1)} \\
&= \frac{n^2 - 1 + 2n + 2 - n^2 + n - 2n + 2 - 6}{(n+1)n(n-1)} \\
&= \frac{n-3}{(n+1)n(n-1)}.
\end{aligned}
$$

Or $n \geqslant 3$ donc chacun des facteurs apparaissant dans le résultat ci-dessus est positif. On en déduit que ce résultat est positif et donc que :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{\binom{n+1}{k}}}.$$

(b) *Justifier que* $\dfrac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \dfrac{1}{\binom{n+1}{k+1}}$ *pour tout* $k \in [\![0, n]\!]$ *puis en déduire que* $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{k}}$.

▶ Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a par définition des coefficients binomiaux :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\binom{n}{k}} - \frac{1}{\binom{n+1}{k+1}} &= \frac{1}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} - \frac{1}{\frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!}} \\
&= \frac{k!(n-k)!}{n!} - \frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+1)!} \\
&= \frac{k!(n-k)!(n+1)}{n!(n+1)} - \frac{k!(k+1)(n-k)!}{(n+1)!} \\
&= \frac{k!(n-k)!\big((n+1)-(k+1)\big)}{(n+1)!} \\
&= \frac{k!(n-k)!(n-k)}{(n+1)!}.
\end{aligned}
$$

Or les factorielles sont positives (par définition) et $n \geqslant k$. On en déduit que le résultat ci-dessus est positif et donc que :

$$\boxed{\frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \frac{1}{\binom{n+1}{k+1}}} \quad \text{pour tout } k \in [\![0, n]\!].$$

On peut aussi utiliser la formule du triangle de Pascal : $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$. *Puisque* $\binom{n}{k+1} \geqslant 0$, *on en déduit que* $\binom{n}{k} \leqslant \binom{n+1}{k+1}$ *d'où le résultat en passant à l'inverse (car la fonction* $x \mapsto 1/x$ *est strictement décroissante sur* $]0, +\infty[$*).*

En sommant ces inégalités pour k allant de 3 à n, on obtient :

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\binom{n+1}{k+1}} = \sum_{\ell=4}^{n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{\ell}} \quad \text{en posant le décalage d'indice } \ell = k+1.$$

Puisque k et ℓ sont des variables muettes, on a bien montré que :

$$\boxed{\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \geqslant \sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{k}}}.$$

4. *Prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante puis en déduire qu'elle converge.*

▶ Soit $n \geqslant 3$. On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \\
&= \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} + \sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} - \left(\sum_{k=0}^{2} \frac{1}{\binom{n}{k}} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \right) \quad \text{par associativité} \\
&= \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{3} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} - \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \right)}_{\substack{\leqslant 0 \\ \text{d'après la question 3(a)}}} + \underbrace{\left(\sum_{k=4}^{n+1} \frac{1}{\binom{n+1}{k}} - \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \right)}_{\substack{\leqslant 0 \\ \text{d'après la question 3(b)}}} \quad \text{par commutativité} \\
&\leqslant 0.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 3} \text{ est décroissante}}$. De plus, la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est minorée par 0 puisque chaque terme est la somme des inverses de coefficients binomiaux qui sont positifs (par définition). Par conséquent, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 3} \text{ est convergente}}$.

5. *Dans cette question, on fixe un entier $n \geqslant 3$.*

(a) *Montrer que*

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad \frac{n+2}{\binom{n}{k}} - \frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}} = \frac{n-k}{\binom{n}{k+1}} - \frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}.$$

▶ Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a par définition des coefficients binomiaux :

$$\begin{aligned}
&\frac{n+2}{\binom{n}{k}} - \frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}} - \left(\frac{n-k}{\binom{n}{k+1}} - \frac{n-k+1}{\binom{n}{k}} \right) \\
=& \frac{n+2}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} - \frac{2n+2}{\frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!}} - \frac{n-k}{\frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}} + \frac{n-k+1}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} \\
=& \frac{(n+2)k!(n-k)!}{n!} - \frac{(2n+2)k!(n+1-k)!}{(n+1)!} \\
& \quad - \frac{(n-k)(k+1)!(n-k-1)!}{n!} + \frac{(n-k+1)k!(n-k)!}{n!} \\
=& \frac{(n+2)k!(n-k)!(n+1)}{n!(n+1)} - \frac{(2n+2)k!(n-k)!(n+1-k)}{(n-k+1)!} \\
& \quad - \frac{k!(k+1)(n-k)!(n+1)}{n!(n+1)} + \frac{(n-k+1)k!(n-k)!(n+1)}{n!(n+1)}
\end{aligned}$$

$$=\frac{k!(n-k)!\Big((n+2)(n+1)-(2n+2)(n+1-k)-(k+1)(n+1)+(n-k+1)(n+1)\Big)}{(n+1)!}$$
$$=\frac{k!(n-k)!\Big(n^2+3n+2-2n^2-4n-2+2nk+2k-nk-k-n-1+n^2+2n+1-nk-k\Big)}{(n+1)!}$$
$$=\frac{k!(n-k)!\times 0}{(n+1)!}=0.$$

On en déduit bien que :

$$\forall k\in[\![0,n-1]\!],\quad \boxed{\frac{n+2}{\binom{n}{k}}-\frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}}=\frac{n-k}{\binom{n}{k+1}}-\frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}}.$$

On peut aussi simplifier pour tout mettre au même dénominateur $\binom{n}{k}$:

$$\frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}}=\frac{2n+2}{\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}}=\frac{2(n+1)}{\frac{n!(n+1)}{k!(n-k)!(n+1-k)}}=\frac{2(n+1-k)}{\binom{n}{k}}$$

$$\textit{donc}\quad \frac{n+2}{\binom{n+1}{k}}-\frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}}=\frac{n+2-2(n+1-k)}{\binom{n}{k}}=\frac{2k-n}{\binom{n}{k}}$$

et de même :

$$\frac{n-k}{\binom{n}{k+1}}=\frac{n-k}{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}=\frac{n-k}{\frac{n!(n-k)}{k!(k+1)(n-k)!}}=\frac{k+1}{\binom{n}{k}}$$

$$\textit{donc}\quad \frac{n-k}{\binom{n}{k+1}}-\frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}=\frac{k+1-(n-k+1)}{\binom{n}{k}}=\frac{2k-n}{\binom{n}{k}}.$$

(b) En déduire que $(n+2)(u_n-1)-(2n+2)\left(u_{n+1}-\frac{1}{n+1}-1\right)=-n$ puis que $u_{n+1}=1+\frac{n+2}{2n+2}u_n$.

► En sommant les résultats de la question précédente pour k allant de 0 à $n-1$, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n+2}{\binom{n}{k}}-\frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n-k}{\binom{n}{k+1}}-\frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}\right).$$

Or :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n+2}{\binom{n}{k}}-\frac{2n+2}{\binom{n+1}{k}}\right)$$
$$=(n+2)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n}{k}}-(2n+2)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\binom{n+1}{k}}\quad\text{par linéarité}$$
$$=(n+2)\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\binom{n}{k}}-\frac{1}{\binom{n}{n}}\right)-(2n+2)\left(\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{\binom{n+1}{k}}-\frac{1}{\binom{n+1}{n}}-\frac{1}{\binom{n+1}{n+1}}\right)\quad\text{par associativité}$$
$$=(n+2)(u_n-1)-(2n+2)\left(u_{n+1}-\tfrac{1}{n+1}-1\right)\quad\text{car } \binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}=1 \text{ et } \binom{n+1}{n}=\binom{n+1}{1}=\tfrac{1}{n+1}$$

et :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n-k}{\binom{n}{k+1}}-\frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}\right)\\
=&\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n-(k+1)+1}{\binom{n}{k+1}}-\frac{n-k+1}{\binom{n}{k}}\right)\\
=&\frac{n-((n-1)+1)+1}{\binom{n}{(n-1)+1}}-\frac{n-0+1}{\binom{n}{0}} \quad \text{en reconnaissant une somme télescopique}\\
=&\frac{1}{\binom{n}{n}}-\frac{n+1}{1}=1-(n+1)=-n \quad \text{car } \binom{n}{n}=\binom{n}{0}=1.
\end{aligned}$$

On en déduit bien que :

$$\boxed{(n+2)(u_n-1)-(2n+2)\left(u_{n+1}-\tfrac{1}{n+1}-1\right)=-n}.$$

Puis on obtient en isolant u_{n+1} :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}&=\frac{-n-\left((n+2)(u_n-1)\right)}{-(2n+2)}+\frac{1}{n+1}+1\\
&=1+\frac{n+(n+2)u_n-n-2}{2n+2}+\frac{2}{2(n+1)}\\
&=1+\frac{(n+2)u_n-2}{2n+2}+\frac{2}{2n+2}\\
&=\boxed{1+\frac{n+2}{2n+2}u_n}.
\end{aligned}$$

6. *On pose $\ell=\lim_{n\to+\infty}u_n$. À l'aide du résultat de la question précédente, prouver que $\ell=2$.*

▶ On a :

$$\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}u_n=\ell \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{2n+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{2+\frac{2}{n}}=\frac{1}{2}.$$

Par conséquent, on obtient en passant à la limite dans le résultat de la question précédente :

$$\ell=\lim_{n\to+\infty}u_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n+2}{2n+2}u_n\right)=1+\frac{1}{2}\ell.$$

On reconnaît une équation du premier degré d'inconnue ℓ qu'on résout :

$$\ell=1+\frac{1}{2}\ell \iff \left(1-\frac{1}{2}\right)\ell=1 \iff \boxed{\ell=\frac{1}{1/2}=2}.$$

Exercice 2

Cet exercice propose d'étudier le comportement asymptotique de trois modèles de dynamique de population. On note P_n le nombre d'individus à la génération $n\in\mathbb{N}$. Ainsi $P_0>0$ désigne l'effectif initial de la population. Un premier modèle d'évolution consiste à supposer que la production de nouveaux individus est proportionnelle au nombre d'individus présents, c'est-à-dire que :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad P_{n+1}-P_n=kP_n \tag{M1}$$

où $k>0$ est un taux d'accroissement.

1. (a) *Dans l'hypothèse du modèle (M1), exprimer P_n en fonction de k, n et P_0.*

▶ On a d'après (M1) :

$$P_{n+1} = kP_n + P_n = (k+1)P_n.$$

On reconnaît une suite géométrique de raison $k+1$. Donc :

$$\boxed{P_n = (k+1)^n P_0}.$$

(b) *En déduire la limite de P_n quand $n \to +\infty$.*

▶ Puisque $k > 0$, on a $k+1 > 1$ et donc $\lim_{n\to+\infty}(k+1)^n = +\infty$. Puisque $P_0 > 0$, on déduit du résultat de la question précédente que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P_n = +\infty}.$$

Le résultat est cohérent avec le modèle : si on prend seulement en compte la production d'individus alors la population croît indéfiniment. Ce qui n'est bien sûr pas un modèle réaliste.

Afin de prendre en compte le fait que la population évolue dans un biotope fermé, c'est-à-dire un milieu ne pouvant pas contenir plus de $M > 0$ individus, on considère un deuxième modèle qui freine la croissance du modèle (M1) d'autant plus que l'effectif de la population est proche de la capacité d'accueil M :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} - P_n = kP_n(M - P_{n+1}) \tag{M2}$$

2. *Dans cette question, on considère l'hypothèse du modèle (M2).*

(a) *Montrer que $P_n > 0$ à toute génération $n \in \mathbb{N}$.*

▶ On raisonne par récurrence.

Initialisation. Pour $n = 0$, on a $P_0 > 0$ d'après l'énoncé.

Hérédité. On suppose que $P_n > 0$ pour une génération $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a d'après (M2) :

$$P_{n+1} + kP_nP_{n+1} = kP_nM + P_n \quad \text{donc} \quad P_{n+1} = \frac{(kM+1)P_n}{1+kP_n}.$$

Or $k > 0$ et $M > 0$ d'après l'énoncé et $P_n > 0$ d'après l'hypothèse de récurrence. On en déduit que chacun des facteurs apparaissant dans le résultat ci-dessus est strictement positif et donc que $P_{n+1} > 0$. Ainsi, pour toute génération $n \in \mathbb{N}$, si $P_n > 0$ alors $P_{n+1} > 0$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P_n > 0}$.

(b) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 1/P_n$. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.*

▶ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{1}{P_{n+1}} && \text{par définition de la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\\
&= \frac{1}{\frac{(kM+1)P_n}{1+kP_n}} && \text{en reprenant les calculs de la question précédente}\\
&= \frac{1+kP_n}{(kM+1)P_n}\\
&= \frac{1+\frac{k}{u_n}}{(kM+1)\frac{1}{u_n}} && \text{car } u_n = 1/P_n \text{ donc } P_n = 1/u_n\\
&= \frac{u_n+k}{kM+1} = \boxed{\frac{1}{kM+1}u_n + \frac{k}{kM+1}}.
\end{aligned}$$

On reconnaît bien $\boxed{\text{une suite arithmético-géométrique}}$.

(c) *Exprimer P_n en fonction de k, M, n et P_0.*

▶ On cherche $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\alpha = \frac{1}{kM+1}\alpha + \frac{k}{kM+1} \iff \left(1 - \frac{1}{kM+1}\right)\alpha = \frac{k}{kM+1} \iff \alpha = \frac{k}{kM+1-1} = \boxed{\frac{1}{M}}.$$

On a donc d'après le résultat de la question précédente :

$$u_{n+1} - \alpha = \left(\frac{1}{kM+1}u_n + \frac{k}{kM+1}\right) - \left(\frac{1}{kM+1}\alpha + \frac{k}{kM+1}\right) = \frac{1}{kM+1}(u_n - \alpha).$$

On reconnaît une suite géométrique de raison $\frac{1}{kM+1}$. Donc :

$$u_n - \alpha = \left(\frac{1}{kM+1}\right)^n (u_0 - \alpha) = \frac{\frac{1}{P_0} - \frac{1}{M}}{(kM+1)^n}.$$

Et par conséquent :

$$P_n = \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{P_0}-\frac{1}{M}}{(kM+1)^n} + \alpha} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{P_0}-\frac{1}{M}}{(kM+1)^n} + \frac{1}{M}} = \boxed{\frac{MP_0}{\frac{M-P_0}{(kM+1)^n} + P_0}}.$$

(d) *En déduire la limite de P_n quand $n \to +\infty$.*

▶ Puisque $k > 0$ et $M > 0$, on a $kM + 1 > 1$ et donc $\lim_{n\to+\infty}(kM+1)^n = +\infty$. On déduit du résultat de la question précédente que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{MP_0}{0 + P_0} = M}.$$

Le résultat est cohérent avec le modèle : l'effectif de la population tend vers le maximum d'individus que peut accueillir le milieu dans lequel elle évolue.

On suppose désormais que les effets d'évolution du modèle (M2) se produisent avec une génération de retard sur la population, c'est-à-dire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+2} - P_n = kP_n(M - P_{n+2}) \tag{M3}$$

3. (a) *En vous inspirant de la preuve de la question 2(a) et sans justifier, donner une condition suffisante pour que $P_n > 0$ à toute génération $n \in \mathbb{N}$.*

▶ Il suffit que $\boxed{P_1 > 0}$.

En effet, en s'inspirant des calculs de la question 2(a), on déduit du modèle (M3) la relation de récurrence suivante :

$$P_{n+2} = \frac{(kM+1)P_n}{1 + kP_n}.$$

Puisqu'il s'agit d'une relation de récurrence d'ordre 2, on démontre que $P_n > 0$ à toute génération $n \in \mathbb{N}$ en raisonnant par récurrence double. L'hérédité est similaire à celle de la question 2(a). Par contre, pour l'initialisation, on a $P_0 > 0$ d'après l'énoncé mais il faudrait aussi vérifier que $P_1 > 0$.

(b) *Trouver un réel α, qu'on exprimera en fonction de M, tel que la suite $(v_n = 1/P_n - \alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = \frac{v_n}{kM+1}.$$

► On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
v_{n+2} &= \frac{1}{P_{n+2}} - \alpha \quad \text{par définition de la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \\
&= \frac{1}{\frac{(kM+1)P_n}{1+kP_n}} - \alpha \quad \text{en reprenant les calculs de la question 2(a) pour (M3)} \\
&= \frac{1+kP_n}{(kM+1)P_n} - \alpha \\
&= \frac{1+\frac{k}{v_n+\alpha}}{(kM+1)\frac{1}{v_n+\alpha}} - \alpha \quad \text{car } v_n = 1/P_n - \alpha \text{ donc } P_n = 1/(v_n+\alpha) \\
&= \frac{v_n+\alpha+k}{kM+1} - \alpha = \frac{v_n}{kM+1} + \frac{\alpha+k-\alpha(kM+1)}{kM+1} = \frac{v_n}{kM+1} + \frac{k(1-\alpha M)}{kM+1}.
\end{aligned}$$

Il suffit donc que :

$$\frac{k(1-\alpha M)}{kM+1} = 0 \iff 1-\alpha M = 0 \iff \alpha = \frac{1}{M}.$$

Synthèse. On pose $\boxed{\alpha = 1/M}$. Alors on a bien d'après les calculs de l'analyse :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = \frac{v_n}{kM+1}.$$

(c) *Exprimer v_n en fonction de k, M, n, v_0 et v_1 puis en déduire que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n| \leqslant \frac{|v_0|+|v_1|}{(kM+1)^{(n-1)/2}}.$$

► D'après le résultat de la question précédente, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre deux d'équation caractéristique :

$$q^2 = \frac{1}{kM+1}.$$

Puisque $k>0$ et $M>0$, on a $1/(kM+1)>0$ et donc l'équation caractéristique admet deux solutions : $q_1 = 1/\sqrt{kM+1}$ et $q_2 = -1/\sqrt{kM+1}$. Par conséquent, il existe deux constantes $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n = \lambda_1 \left(\frac{1}{\sqrt{kM+1}}\right)^n + \lambda_2 \left(\frac{-1}{\sqrt{kM+1}}\right)^n = \frac{\lambda_1+\lambda_2(-1)^n}{(kM+1)^{n/2}}.$$

En particulier, on a pour $n=0$ et pour $n=1$:

$$v_0 = \lambda_1+\lambda_2 \quad \text{et} \quad v_1 = \frac{\lambda_1-\lambda_2}{(kM+1)^{1/2}}.$$

Ainsi, (λ_1,λ_2) est solution du système linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
&\begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 = v_0 & (L_1) \\ \lambda_1-\lambda_2 = v_1(kM+1)^{1/2} & (L_2) \end{cases} \\
\iff &\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}\left(v_0+v_1(kM+1)^{1/2}\right) & ((L_1)+(L_2))/2 \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(v_0-v_1(kM+1)^{1/2}\right) & ((L_1)-(L_2))/2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\boxed{v_n = \frac{\left(v_0+v_1(kM+1)^{1/2}\right) + \left(v_0-v_1(kM+1)^{1/2}\right)(-1)^n}{2(kM+1)^{n/2}}}.$$

On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n| = \frac{\left|\left(v_0 + v_1 (kM+1)^{1/2}\right) + \left(v_0 - v_1 (kM+1)^{1/2}\right)(-1)^n\right|}{2(kM+1)^{n/2}} \quad \text{car } kM+1>0$$

$$\leqslant \frac{\left|v_0 + v_1 (kM+1)^{1/2}\right| + \left|v_0 - v_1 (kM+1)^{1/2}\right| \overbrace{|(-1)^n|}^{=1}}{2(kM+1)^{n/2}} \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire}$$

$$\leqslant \frac{|v_0| + |v_1|\,|kM+1|^{1/2} + |v_0| + |v_1|\,|kM+1|^{1/2}}{2(kM+1)^{n/2}} \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire}$$

$$= \frac{2\left(|v_0| + |v_1|(kM+1)^{1/2}\right)}{2(kM+1)^{n/2}}$$

$$= \frac{\frac{|v_0|}{(kM+1)^{1/2}} + |v_1|}{(kM+1)^{(n-1)/2}}.$$

Puisque $kM+1>1$, on a $(kM+1)^{1/2} = \sqrt{kM+1} > 1$ par stricte croissance de la fonction racine et donc $|v_0|/(kM+1)^{1/2} < |v_0|$. Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boxed{|v_n| \leqslant \frac{|v_0|+|v_1|}{(kM+1)^{(n-1)/2}}}.$$

(d) *En déduire la limite de P_n quand $n \to +\infty$.*

► Puisque $kM+1>1$, on a $\lim_{n\to+\infty}(kM+1)^{(n-1)/2} = +\infty$. D'après le théorème de limite par encadrement, on déduit du résultat de la question précédente que $\lim_{n\to+\infty}|v_n| = 0$ et donc que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a d'après le résultat de la question 3(b) $v_n = 1/P_n - 1/M$, donc $P_n = 1/(v_n + 1/M)$. Par conséquent :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{0+\frac{1}{M}} = M}.$$