Problème : étude de l'ensemble des compositions d'un entier

1 Définitions et notations

Définition 1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, soit $C = [c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}]$ une liste non vide d'entiers naturels qui sont tous différents de 0. On dit que C est une **composition** de l'entier n si :

$$\sum_{i=0}^{k-1} c_i = n.$$

L'entier k est appelé **longueur** de C. L'ensemble des compositions de l'entier n est noté $\mathscr{C}_n$. On rappelle que $\mathrm{Card}\,(\mathscr{C}_n)$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathscr{C}_n$.

Par exemple, $[1,3,2,2]$ est une composition de l'entier 8. On a $\mathscr{C}_1 = \{[1]\}, \mathscr{C}_2 = \{[1,1], [2]\}, \mathscr{C}_3 = \{[1,1,1], [1,2], [2,1], [3]\}$ et $\mathrm{Card}\,(\mathscr{C}_1) = 1, \mathrm{Card}\,(\mathscr{C}_2) = 2, \mathrm{Card}\,(\mathscr{C}_3) = 4$.

Pour simplifier les notations, étant donnée une composition C, c_i désigne l'élément de C au rang i, l'indexation des éléments commençant par 0. Par exemple, pour $C = [3,1,4,2,2]$ c_3 est égal à 2.

Définition 2. Soient C et D deux compositions d'un même entier n. On dit que C et D sont **semblables** si tout entier k apparaît le même nombre de fois dans C et D.

Par exemple, $[3,2,3,2,1]$ et $[3,3,1,2,2]$ sont semblables. Par contre, $[3,2,3,2,1]$ et $[3,3,2,1,1,1]$ ne sont pas semblables : le nombre 1 apparaît une seule fois dans la première composition mais trois fois dans la seconde.

Définition 3. Soient $C = [c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}]$ et $D = [d_0, \ldots, d_{l-1}]$ deux compositions d'un même entier n. On dit que C est **moins fine** que D (ou que D est plus fine que C) si :

$$\forall r \in [\![0, k-1]\!], \exists s \in [\![0, l-1]\!], \sum_{i=0}^{r} c_i = \sum_{j=0}^{s} d_j.$$

Par exemple, $C = [5,4,2,5,3]$ est moins fine que $D = [3,1,1,2,2,1,1,5,2,1]$. En effet, on a :

$$\begin{array}{lcl} 5 & = & 3+1+1 \\ 5+4 & = & 3+1+1+2+2 \\ 5+4+2 & = & 3+1+1+2+2+1+1 \\ 5+4+2+5 & = & 3+1+1+2+2+1+1+5 \\ 5+4+2+5+3 & = & 3+1+1+2+2+1+1+5+2+1 \end{array}.$$

Dans la suite, on s'intéresse à différents problèmes d'énumération en lien avec les nouveaux objets introduits précédemment.

2 Exemples

1. Déterminer sans justifier toutes les compositions de l'entier 4.
2. Déterminer sans justifier toutes les compositions de longueur égale à 3 de l'entier 5.
3. Déterminer sans justifier toutes les compositions semblables à $[4,2,2,3]$.
4. Déterminer sans justifier toutes les compositions moins fines que $[3,2,4,5]$.
5. Combien de compositions sont semblables à $[3,1,1,2,4,5,3,4,3]$? Justifier votre réponse.

3 Une approche informatique

On représentera une composition C à l'aide d'une liste Python. Par exemple, la composition $C = [3,1,1]$ est représentée en Python par la liste `C=[3,1,1]`.

6. Quelle fonction Python permet d'obtenir la longueur d'une liste L ?
7. Écrire une fonction `somme(L)` qui prend en argument une liste d'entiers `L` et qui renvoit la somme de ces éléments.
8. Écrire une fonction `occurrence(L,x)` qui prend en arguments une liste L et un nombre x et qui renvoit le nombre de fois que x apparaît dans la liste L.
9. En déduire une fonction `semblables(C,D)` qui prend en arguments deux listes représentant des compositions et qui renvoit `True` si les deux compositions sont semblables et `False` sinon.

10. On considère les fonctions suivantes :

```
def mystere1(C) :
    L = []
    for i in range(len(C)) :
        S = 0
        for j in range(i+1) :
            S = S+C[j]
        L.append(S)
    return L
```

```
def mystere2(C,D) :
    L = mystere1(C)
    M = mystere1(D)
    for x in L :
        if occurrence(M,x) == 0 :
            return False
    return L[len(L)-1] == M[len(M)-1]
```

   (a) Dans cette question uniquement, $C = [3, 2, 2, 1, 4]$ et $D = [2, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1]$. Expliciter les listes `mystere1(C)` et `mystere1(D)` puis donner la valeur de `mystere2(C,D)`.

   (b) Soient C et D deux listes d'entiers représentant des compositions. Expliciter une condition nécessaire et suffisante sur C et D pour que `mystere2(C,D)` soit égale à `True`.

4 Dénombrement de différents ensembles

Désormais, <u>la longueur d'une composition C est notée $\ell(C)$.</u>

11. On cherche à déterminer une expression de $\mathrm{Card}(\mathscr{C}_n)$ pour tout $n \geq 1$. Pour cela, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit les ensembles $\mathscr{A}_n = \{C \in \mathscr{C}_n \mid c_0 = 1\}$ et $\mathscr{B}_n = \{C \in \mathscr{C}_n \mid c_0 > 1\}$.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer par double inclusion que : $\mathscr{C}_n = \mathscr{A}_n \cup \mathscr{B}_n$.
   (b) Soit $n \geq 2$. Montrer que $\mathscr{A}_n = \left\{\left[1, d_0, d_1, \ldots, d_{\ell(D)-1}\right], D \text{ décrit } \mathscr{C}_{n-1}\right\}$ et $\mathscr{B}_n = \left\{\left[d_0+1, d_1, \ldots, d_{\ell(D)-1}\right], D \text{ décrit } \mathscr{C}_{n-1}\right\}$.
   (c) Soit $n \geq 2$. Montrer que $\mathrm{Card}(\mathscr{A}_n) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_n) = \mathrm{Card}(\mathscr{C}_{n-1})$.
   (d) Soit $n \geq 2$. Trouver une relation entre $\mathrm{Card}(\mathscr{C}_n)$ et $\mathrm{Card}(\mathscr{C}_{n-1})$.
   (e) En déduire pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$ le cardinal de $\mathscr{C}_n$.
12. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer le nombre de compositions semblables à la composition $C = [1^2, 2^2, \ldots, n^2]$. Expliciter l'entier dont C est la composition. On en donnera une écriture simplifiée.
13. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Décrire l'ensemble des compositions de longueur exactement 2 de l'entier n. Quel est le cardinal de cet ensemble ? Justifier vos réponses.
14. Soit $C = [c_0, c_1, c_2]$ une composition. Décrire l'ensemble des compositions moins fines que C et en déduire son cardinal.

5 Une approche bijective

Pout tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on rappelle que $\mathscr{P}(\llbracket 1, n-1 \rrbracket)$ désigne l'ensemble des parties de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit les applications $f_n : \mathscr{C}_n \to \mathscr{P}(\llbracket 1, n-1 \rrbracket)$ et $g_n : \mathscr{P}(\llbracket 1, n-1 \rrbracket) \to \mathscr{C}_n$ par :

$$\forall C \in \mathscr{C}_n \backslash \{[n]\}, f_n(C) = \left\{\sum_{j=0}^{k} c_j, k \text{ décrit } \llbracket 0, \ell(C)-2 \rrbracket\right\} \text{ et } f_n([n]) = \emptyset,$$

et pour toute partie non vide A de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$, en notant $a_0 < a_1 < \ldots < a_{k-1}$ les éléments de A rangés l'ordre croissant on définit

$$g_n(A) = [a_0, a_1 - a_0, \ldots, a_{k-1} - a_{k-2}, n - a_{k-1}] \text{ et } g_n(\emptyset) = [n].$$

Par exemple, on a $f_{18}([4, 3, 3, 7, 1]) = \{4, 7, 10, 17\}$ et $g_{15}(\{1, 6, 9, 12\}) = [1, 5, 3, 3, 3]$.

15. Pour tout $C \in \mathscr{C}_3$, calculer $f_3(C)$.
16. Calculer $g_{12}(\{3, 7, 8, 10\})$ et $g_9(\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\})$.

Dorénavant, on fixe $n \in \mathbb{N}^\star$ et on pose $f = f_n$ et $g = g_n$.

17. (a) Montrer que f et g sont des applications réciproques l'une de l'autre.
   (b) En déduire le cardinal de $\mathscr{C}_n$ à l'aide d'une nouvelle preuve.
18. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$.
   (a) Soit $C \in \mathscr{C}_n$. Montrer que la longueur de C est égale à k si et seulement si $f(C)$ est de cardinal égal à $k-1$.
   (b) En déduire le nombre de compositions de n de longueur exactement k.
19. (a) Soient C et D deux compositions de n. Montrer que C est moins fine que D si et seulement si $f(C) \subset f(D)$.
   (b) Soit $C \in \mathscr{C}_n$. Déterminer le nombre de compositions de n moins fines que C.
   (c) Soit $C \in \mathscr{C}_n$. Déterminer le nombre de compositions de n plus fines que C.