Problème : étude de l'ensemble des compositions d'un entier

1 Définitions et notations

Définition 1. Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$, soit $C = [c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}]$ une liste non vide d'entiers naturels qui sont tous différents de 0. On dit que C est une **composition** de l'entier n si :

$$\sum_{i=0}^{k-1} c_i = n.$$

L'entier k est appelé **longueur** de C. L'ensemble des compositions de l'entier n est noté $\mathscr{C}_n$. On rappelle que $\operatorname{Card}(\mathscr{C}_n)$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathscr{C}_n$.

Par exemple, $[1,3,2,2]$ est une composition de l'entier 8. On a $\mathscr{C}_1 = \{[1]\}, \mathscr{C}_2 = \{[1,1],[2]\}, \mathscr{C}_3 = \{[1,1,1],[1,2],[2,1],[3]\}$ et $\operatorname{Card}(\mathscr{C}_1) = 1, \operatorname{Card}(\mathscr{C}_2) = 2, \operatorname{Card}(\mathscr{C}_3) = 4$.

Pour simplifier les notations, étant donnée une composition C, c_i désigne l'élément de C au rang i, l'indexation des éléments commençant par 0. Par exemple, pour $C = [3,1,4,2,2]$ c_3 est égal à 2.

Définition 2. Soient C et D deux compositions d'un même entier n. On dit que C et D sont **semblables** si tout entier k apparaît le même nombre de fois dans C et D.

Par exemple, $[3,2,3,2,1]$ et $[3,3,1,2,2]$ sont semblables. Par contre, $[3,2,3,2,1]$ et $[3,3,2,1,1,1]$ ne sont pas semblables : le nombre 1 apparaît une seule fois dans la première composition mais trois fois dans la seconde.

Définition 3. Soient $C = [c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}]$ et $D = [d_0, \ldots, d_{l-1}]$ deux compositions d'un même entier n. On dit que C est **moins fine** que D (ou que D est plus fine que C) si :

$$\forall r \in [\![0, k-1]\!], \exists s \in [\![0, l-1]\!], \sum_{i=0}^{r} c_i = \sum_{j=0}^{s} d_j.$$

Par exemple, $C = [5,4,2,5,3]$ est moins fine que $D = [3,1,1,2,2,1,1,5,2,1]$. En effet, on a :

$$\begin{array}{lcl} 5 & = & 3+1+1 \\ 5+4 & = & 3+1+1+2+2 \\ 5+4+2 & = & 3+1+1+2+2+1+1 \\ 5+4+2+5 & = & 3+1+1+2+2+1+1+5 \\ 5+4+2+5+3 & = & 3+1+1+2+2+1+1+5+2+1 \end{array}.$$

Dans la suite, on s'intéresse à différents problèmes d'énumération en lien avec les nouveaux objets introduits précédemment.

2 Exemples

1. Déterminer sans justifier toutes les compositions de l'entier 4.
2. Déterminer sans justifier toutes les compositions de longueur égale à 3 de l'entier 5.
3. Déterminer sans justifier toutes les compositions semblables à $[4,2,2,3]$.
4. Déterminer sans justifier toutes les compositions moins fines que $[3,2,4,5]$.
5. Combien de compositions sont semblables à $[3,1,1,2,4,5,3,4,3]$? Justifier votre réponse.

Correction

1. On a :

$$\boxed{\mathscr{C}_4 = \{[1,1,1,1],[2,1,1],[1,2,1],[1,1,2],[2,2],[3,1],[1,3],[4]\}}$$

2. Les compositions de longueur 3 de l'entier 5 sont exactement :

$$\boxed{[1,1,3],[1,3,1],[3,1,1],[1,2,2],[2,1,2],[2,2,1]}.$$

3. Les compositions semblables de la composition $[4,2,2,3]$ sont exactement

$$\boxed{[4,2,2,3],[4,2,3,2],[4,3,2,2],[3,4,2,2],[3,2,4,2],[3,2,2,4],[2,2,3,4],[2,2,4,3],[2,4,2,3],[2,3,2,4],[2,3,4,2],[2,4,3,2]}$$

4. Les compositions moins fines que $[3,2,4,5]$ sont exactement :

$$\boxed{[3,2,4,5],[5,4,5],[3,6,5],[3,2,9],[9,5],[5,9],[3,11],[14]}.$$

5. Compter le nombre de compositions semblables à $[3,1,1,2,4,5,3,4,3]$ revient à compter le nombre d'anagrammes de cette liste. Il suffit de compter le nombre de façons de placer les 1 puis les 2, puis les 3, puis les 4 et enfin le 5. Ce qui donne :

$$\binom{9}{2}\binom{7}{1}\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1}.$$

Après simplification, on obtient : $\boxed{\dfrac{9!}{2!3!2!}}$.

Combien de compositions sont semblables à $[3,1,1,2,4,5,3,4,3]$? Justifier votre réponse.

3 Une approche informatique

On représentera une composition C à l'aide d'une liste Python. Par exemple, la composition $C=[3,1,1]$ est représentée en Python par la liste `C=[3,1,1]`.

6. Quelle fonction Python permet d'obtenir la longueur d'une liste L ?
7. Écrire une fonction `somme(L)` qui prend en argument une liste d'entiers `L` et qui renvoit la somme de ces éléments.
8. Écrire une fonction `occurrence(L,x)` qui prend en arguments une liste L et un nombre x et qui renvoit le nombre de fois que x apparaît dans la liste L.
9. En déduire une fonction `semblables(C,D)` qui prend en arguments deux listes représentant des compositions et qui renvoit `True` si les deux compositions sont semblables et `False` sinon.
10. On considère les fonctions suivantes :

```
def mystere1(C) :
    L = []
    for i in range(len(C)) :
        S = 0
        for j in range(i+1) :
            S = S+C[j]
        L.append(S)
    return L
```

```
def mystere2(C,D) :
    L = mystere1(C)
    M = mystere1(D)
    for x in L :
        if occurrence(M,x) == 0 :
            return False
    return L[len(L)-1] == M[len(M)-1]
```

(a) Dans cette question uniquement, $C=[3,2,2,1,4]$ et $D=[2,1,1,1,2,1,3,1]$. Expliciter les listes `mystere1(C)` et `mystere1(D)` puis donner la valeur de `mystere2(C,D)`.

(b) Soient C et D deux listes d'entiers représentant des compositions. Expliciter une condition nécessaire et suffisante sur C et D pour que `mystere2(C,D)` soit égale à `True`.

Correction

6. La fonction `len` permet de connaître la longueur d'une liste.
7. Voici la fonction demandée

```
def somme(L) :
    S = 0
    for i in range(len(L)) :
        S = S + L[i]
    return S
```

8. Voici la fonction demandée

```
def occurrence(L,x) :
    S = 0
    for i in range(len(L)) :
        if x == L[i] :
            S = S + 1
    return S
```

9. Voici la fonction demandée

```
def semblables(C,D) :
    if somme(C) != somme(D) :
        return False
    else :
        for x in C :
            if occurrence(C,x) != occurrence(D,x) :
                return False
        return True
```

10. (a) On obtient : `mystere1(C)=[3,5,7,8,12]` et `mystere1(D)=[2,3,4,5,7,8,11,12]` et `mystere2(C,D)=True`.

    (b) Soient C et D deux listes d'entiers représentant des compositions. `mystere2(C,D)` est égal à `True` si et seulement si C est moins fine que D.

4 Dénombrement de différents ensembles

Désormais, la longueur d'une composition C est notée $\ell(C)$.

11. On cherche à déterminer une expression de $\mathrm{Card}(\mathscr{C}_n)$ pour tout $n \geq 1$. Pour cela, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit les ensembles $\mathscr{A}_n = \{C \in \mathscr{C}_n \mid c_0 = 1\}$ et $\mathscr{B}_n = \{C \in \mathscr{C}_n \mid c_0 > 1\}$.
    (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer par double inclusion que : $\mathscr{C}_n = \mathscr{A}_n \cup \mathscr{B}_n$.
    (b) Soit $n \geq 2$. Montrer que $\mathscr{A}_n = \left\{\left[1, d_0, d_1, \ldots, d_{\ell(D)-1}\right], D \text{ décrit } \mathscr{C}_{n-1}\right\}$ et $\mathscr{B}_n = \left\{\left[d_0+1, d_1, \ldots, d_{\ell(D)-1}\right], D \text{ décrit } \mathscr{C}_{n-1}\right\}$.
    (c) Soit $n \geq 2$. Montrer que $\mathrm{Card}(\mathscr{A}_n) = \mathrm{Card}(\mathscr{B}_n) = \mathrm{Card}(\mathscr{C}_{n-1})$.
    (d) Soit $n \geq 2$. Trouver une relation entre $\mathrm{Card}(\mathscr{C}_n)$ et $\mathrm{Card}(\mathscr{C}_{n-1})$.
    (e) En déduire pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$ le cardinal de $\mathscr{C}_n$.
12. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer le nombre de compositions semblables à la composition $C = [1^2, 2^2, \ldots, n^2]$. Expliciter l'entier dont C est la composition. On en donnera une écriture simplifiée.
13. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Décrire l'ensemble des compositions de longueur exactement 2 de l'entier n. Quel est le cardinal de cet ensemble ? Justifier vos réponses.
14. Soit $C = [c_0, c_1, c_2]$ une composition. Décrire l'ensemble des compositions moins fines que C et en déduire son cardinal.

Correction

11. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrons par double inclusion que $\mathscr{C}_n = \mathscr{A}_n \cup \mathscr{B}_n$.
    - $\mathscr{C}_n \subset \mathscr{A}_n \cup \mathscr{B}_n$
      Soit $C \in \mathscr{C}_n$.
      - Cas 1 : $c_0 = 1$. Dans ce cas, $C \in \mathscr{A}_n$. Donc $C \in \mathscr{A}_n \cup \mathscr{B}_n$
      - Cas 2 : $c_0 > 1$. Dans ce cas, C est un élément de $\mathscr{B}_n$. Donc $C \in \mathscr{A}_n \cup \mathscr{B}_n$.
        Par disjonction de cas, on en déduit que $\mathscr{C}_n \subset \mathscr{A}_n \cup \mathscr{B}_n$.
    - $\mathscr{A}_n \cup \mathscr{B}_n \subset \mathscr{C}_n$
      $\mathscr{A}_n$ et $\mathscr{B}_n$ étant des sous-ensembles de $\mathscr{C}_n$ leur réunion est donc un sous-sensemble de $\mathscr{C}_n$.

    On a bien $\boxed{\mathscr{A}_n \cup \mathscr{B}_n = \mathscr{C}_n}$.

    (b) Soit $n \geq 2$. Montrons que $\mathscr{A}_n = \left\{\left[1, d_0, d_1, \ldots, d_{\ell(D)-1}\right], D \text{ décrit } \mathscr{C}_{n-1}\right\}$ et $\mathscr{B}_n = \left\{\left[d_0+1, d_1, \ldots, d_{\ell(D)-1}\right], D \text{ décrit } \mathscr{C}_{n-1}\right\}$
    - Montrons que $\mathscr{A}_n = \left\{\left[1, d_0, d_1, \ldots, d_{\ell(D)-1}\right], D \text{ décrit } \mathscr{C}_{n-1}\right\}$.
      Soit $D \in \mathscr{C}_{n-1}$. La composition $[1, d_0, \ldots, d_{\ell(D)-1}]$ est alors une composition de $\mathscr{C}_n$ commençant par 1. Donc $[1, d_0, \ldots, d_{\ell(D)-1}]$ est un élément de $\mathscr{A}_n$. On en déduit que $\left\{\left[1, d_0, d_1, \ldots, d_{\ell(D)-1}\right], D \text{ décrit } \mathscr{C}_{n-1}\right\} \subset \mathscr{A}_n$
      Soit $C \in \mathscr{A}_n$. C commence alors par un 1. $[c_1, \ldots, c_{\ell(C)-1}]$ est donc une composition de $n-1$. On a bien $C \in \left\{\left[1, d_0, d_1, \ldots, d_{\ell(D)-1}\right], D \text{ décrit } \mathscr{C}_{n-1}\right\}$. On en déduit que $\mathscr{A}_n \subset \left\{\left[1, d_0, d_1, \ldots, d_{\ell(D)-1}\right], D \text{ décrit } \mathscr{C}_{n-1}\right\}$
      On a bien $\mathscr{A}_n = \left\{\left[1, d_0, d_1, \ldots, d_{\ell(D)-1}\right], D \text{ décrit } \mathscr{C}_{n-1}\right\}$.

— Montrons que $\mathscr{B}_n = \left\{\left[d_0+1, d_1, \dots, d_{\ell(D)-1}\right], D \text{ décrit } \mathscr{C}_{n-1}\right\}$.
Soit $D \in \mathscr{C}_{n-1}$. Alors $[d_0+1, \dots, d_{\ell(D)-1}]$ est une composition de l'entier n dont le premier terme strictement plus grand que 1. Donc cette composition est un élément de $\mathscr{B}_n$. On a bien $\left\{\left[d_0+1, d_1, \dots, d_{\ell(D)-1}\right], D \text{ décrit } \mathscr{C}_{n-1}\right\} \subset \mathscr{B}_n$.
Soit C un élément de $\mathscr{B}_n$. Par définition de C, $c_0 > 1$. $[c_0-1, c_1, \dots, c_{\ell(C)-1}]$ est donc ue composition de $n-1$. On en déduit que C est un élément de $\left\{\left[d_0+1, d_1, \dots, d_{\ell(D)-1}\right], D \text{ décrit } \mathscr{C}_{n-1}\right\} \subset \mathscr{B}_n$.
Par double inclusion, on en déduit que $\underline{\left\{\left[d_0+1, d_1, \dots, d_{\ell(D)-1}\right], D \text{ décrit } \mathscr{C}_{n-1}\right\} = \mathscr{B}_n}$.

(c) Soit $n \geq 2$. Constatons que si C et D sont deux compositions différentes de $n-1$ alors $[1, c_0, \dots, c_{\ell(C)-1}]$, $[1, d_0, \dots, d_{\ell(D)-1}]$, $[c_0+1, c_1, \dots, c_{\ell(C)-1}]$ et $[d_0+1, d_1, \dots, d_{\ell(D)-1}]$ sont des compositions différentes deux à deux. On en déduit d'après la question 11.c que
$\boxed{\mathrm{Card}\,(\mathscr{A}_n) = \mathrm{Card}\,(\mathscr{B}_n) = \mathrm{Card}\,(\mathscr{C}_{n-1})\,.}$

(d) Soit $n \geq 2$. D'après la question 11.a, on a $\mathscr{C}_n = \mathscr{A}_n \cup \mathscr{B}_n$. Cette réunion étant disjointe, on en déduit que

$$\mathrm{Card}\,(\mathscr{C}_n) = \mathrm{Card}\,(\mathscr{A}_n) + \mathrm{Card}\,(\mathscr{B}_n)\,.$$

Or d'après la question 11.c, on a $\mathrm{Card}\,(\mathscr{C}_{n-1}) = \mathrm{Card}\,(\mathscr{A}_n) = \mathrm{Card}\,(\mathscr{B}_n)$. Donc

$$\boxed{\mathrm{Card}\,(\mathscr{C}_n) = 2\mathrm{Card}\,(\mathscr{C}_{n-1})}.$$

$\mathrm{Card}\,(\mathscr{C}_n)$ et $\mathrm{Card}\,(\mathscr{C}_{n-1})$.

(e) On en déduit que la suite $\left(\mathrm{Card}\,(\mathscr{C}_n)\right)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 1. Donc

$$\boxed{\forall n \geq 1, \mathrm{Card}\,(\mathscr{C}_n) = 2^{n-1}}.$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Cela revient à déterminer le nombre de permutations de l'ensemble $\{1^2, \dots, n^2\}$. Il y a donc $\boxed{n!}$ éléments.
Par définition, C est la composition de l'entier $\sum_{k=1}^n k^2$. C'est-à-dire de l'entier $\boxed{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$

13. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Les compositions de longueur 2 de l'entier n sont exactement de la forme $[k, n-k]$ où $k \in [\![1, n-1]\!]$. En effet : soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. $[k, n-k]$ est alors une composition de n de longueur 2. Réciproquement, soit $[c_0, c_1]$ une composition de n de longueur 2. Nécessairement, $c_0 \in [\![1, n-1]\!]$. De plus, $c_0 + c_1 = n$. Donc $c_1 = n - c_0$. D'où : $[c_0, c_1] = [c_0, n-c_0]$.
De plus, si $[k, n-k]$ et $[l, n-l]$ sont deux compositions de n de longueur 2. On a $[k, n-k] = [l, n-l]$ si et seulement si $k = l$.
Il en résulte que dans l'ensemble $\{[k, n-k], k \in [\![1, n-1]\!]\}$ chaque composition de longueur 2 de n apparaît une et une seule fois.
Donc le nombre de compositions de longueur 2 de n est égal à $\boxed{n-1}$.

14. Soit $C = [c_0, c_1, c_2]$ une composition. L'ensemble des compositions moins fines que C est donné par

$$\{[c_0, c_1, c_2], [c_0+c_1, c_2], [c_0, c_1+c_2], [c_0+c_1+c_2]\}.$$

Cet ensemble a donc 4 éléments.

5 Une approche bijective

Pout tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on rappelle que $\mathscr{P}\left([\![1, n-1]\!]\right)$ désigne l'ensemble des parties de $\{1, 2, \dots, n-1\}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit les applications $f_n : \mathscr{C}_n \to \mathscr{P}\left([\![1, n-1]\!]\right)$ et $g_n : \mathscr{P}\left([\![1, n-1]\!]\right) \to \mathscr{C}_n$ par :

$$\forall C \in \mathscr{C}_n \backslash \{[n]\}, f_n(C) = \left\{ \sum_{j=0}^{k} c_j, k \text{ décrit } [\![0, \ell\,(C)-2]\!] \right\} \text{ et } f_n([n]) = \emptyset,$$

et pour toute partie non vide A de $[\![1, n-1]\!]$, en notant $a_0 < a_1 < \ldots < a_{k-1}$ les éléments de A rangés l'ordre croissant on définit

$$g_n(A) = [a_0, a_1 - a_0, \dots, a_{k-1} - a_{k-2}, n - a_{k-1}] \text{ et } g_n\,(\emptyset) = [n].$$

Par exemple, on a $f_{18}\,([4, 3, 3, 7, 1]) = \{4, 7, 10, 17\}$ et $g_{15}\,(\{1, 6, 9, 12\}) = [1, 5, 3, 3, 3]$.

15. Pour tout $C \in \mathscr{C}_3$, calculer $f_3\,(C)$.

16. Calculer $g_{12}(\{3,7,8,10\})$ et $g_9(\{1,2,3,4,5,6,7,8\})$.

Dorénavant, on fixe $n \in \mathbb{N}^\star$ et on pose $f = f_n$ et $g = g_n$.

17. (a) Montrer que f et g sont des applications réciproques l'une de l'autre.
    (b) En déduire le cardinal de $\mathscr{C}_n$ à l'aide d'une nouvelle preuve.
18. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$.
    (a) Soit $C \in \mathscr{C}_n$. Montrer que la longueur de C est égale à k si et seulement si $f(C)$ est de cardinal égal à $k-1$.
    (b) En déduire le nombre de compositions de n de longueur exactement k.
19. (a) Soient C et D deux compositions de n. Montrer que C est moins fine que D si et seulement si $f(C) \subset f(D)$.
    (b) Soit $C \in \mathscr{C}_n$. Déterminer le nombre de compositions de n moins fines que C.
    (c) Soit $C \in \mathscr{C}_n$. Déterminer le nombre de compositions de n plus fines que C.

Correction

15. On a
    (a) $\underline{f([3]) = \emptyset}$ (b) $\underline{f([1,2]) = \{1\}}$ (c) $\underline{f([2,1]) = \{2\}}$ (d) $\underline{f([1,1,1]) = \{1,2\}}$.
16. On a $\boxed{g_{12}(\{3,7,8,10\}) = [3,4,1,2,2]}$ et $\boxed{g_9(\{1,2,3,4,5,6,7,8\}) = [1,1,1,1,1,1,1,1,1]}$.

Dorénavant, on fixe $n \in \mathbb{N}^\star$ et on pose $f = f_n$ et $g = g_n$.

17. (a) Calculons $f \circ g$ et $g \circ f$

— Calcul de $f \circ g$. On a $f \circ g : \mathscr{P}(\llbracket 1, n-1 \rrbracket) \to \mathscr{P}(\llbracket 1, n-1 \rrbracket)$

Soit $A = \{a_0 < a_1 < \ldots < a_{k-1}\}$ un sous-ensemble non vide de $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On a alors :

$$(f \circ g)(A) = f([a_0, a_1 - a_0, \ldots, n - a_{k-1}]).$$

La longueur de la liste étant égale à $k+1$, on a donc

$$(f \circ g)(A) = \{a_0 + \sum_{i=1}^{j} (a_i - a_{i-1}), j \text{ décrit } \llbracket 0, k-1 \rrbracket\}.$$

On reconnaît alors une somme télescopique d'où

$$(f \circ g)(A) = \{a_0 + a_j - a_0, j \text{ décrit } \llbracket 0, k-1 \rrbracket\}.$$

D'où $(f \circ g)(A) = A$

De plus, $(f \circ g)(\emptyset) = f([n]) = \emptyset$. On en déduit que $\underline{f \circ g = Id_{\mathscr{P}(\llbracket 1, n-1 \rrbracket)}}$.

— Calculons $g \circ f$.

Soit $C \in \mathscr{C}_n$ différent de $[n]$. On a

$$(g \circ f)(C) = g\left(\left\{\sum_{j=0}^{k} c_j, k \text{ décrit } \llbracket 0, \ell(C) - 2 \rrbracket\right\}\right).$$

Cet ensemble contient exactement $\ell(C) - 1$ éléments. Posons

$$D = g\left(\left\{\sum_{j=0}^{k} c_j, k \text{ décrit } \llbracket 0, \ell(C) - 2 \rrbracket\right\}\right).$$

Vérifions que $D = C$. Par construction, on a $d_0 = c_0$. Soit $1 \leq j \leq \ell(C) - 2$. On a

$$d_j = \sum_{k=0}^{j} c_k - \sum_{k=0}^{j-1} c_k = c_j.$$

Pour $j = \ell(C) - 1$, on a $d_j = n - \sum_{k=0}^{j-1} c_k = \sum_{k=0}^{j} c_k - \sum_{k=0}^{j-1} c_k = c_j$.

On en déduit que $C = D$.

Il en résulte que $\underline{g \circ f = Id_{\mathscr{C}_n}}$.

$\underline{f \text{ et } g \text{ sont bien réciproques l'une de l'autre.}}$

(b) f est donc une bijection. On en déduit que $\mathscr{C}_n$ et $\mathscr{P}([\![1, n-1]\!])$ ont le même cardinal. Or ce dernier contient exactement 2^{n-1} éléments. Donc

$$\boxed{\text{Card}(\mathscr{C}_n) = 2^{n-1}}.$$

18. Soit $k \in \mathbb{N}^\star$.

(a) Soit $C \in \mathscr{C}_n$.

— Supposons que $\ell(C) = k$. Par construction, $f(C)$ contient exactement $\text{Card}([\![0, \ell(C) - 2]\!])$ éléments. Donc le cardinal de $f(C)$ est égal à $k-1$.

— Supposons que $\text{Card}(f(C)) = k-1$. Montrons que $\ell(C) = k$. Notons $A = f(C)$. g étant la réciproque de f, on a $g(A) = C$. A contenant exactement $k-1$ éléments $g(A)$ est une composition de longueur $k-1+1$. Donc de longueur k.

On en déduit que la longueur de C est égale à k si et seulement si $f(C)$ est de cardinal égal à $k-1$.

(b) D'après la question 18.b, on en déduit que le nombre de compositions de l'entier de longueur k est égale au nombre de $k-1$-combinaisons de $[\![1, n-1]\!]$. Il y en a donc $\underline{\binom{n-1}{k-1}}$.

19. (a) Soient C et D deux compositions de n.

— Supposons que C est moins fine D. Montrons que $f(C) \subset f(D)$. Soit $x \in f(C)$. Il existe $k \in [\![0, \ell(C) - 2]\!]$ vérifiant

$$x = \sum_{j=0}^{k} c_j.$$

Or C est moins fine que D et $x < n$. Donc il existe $l \in [\![0, \ell(D) - 2]\!]$ vérifiant

$$x = \sum_{j=0}^{l} d_j.$$

Il en résulte que $x \in f(D)$.

— Suppsosons que $f(C) \subset f(D)$. Montrons que C est moins fine que D. Pour $r = \ell(C) - 1$, on a $\sum_{k=0}^{r} c_k = n = \sum_{k=0}^{\ell(D)-1} d_k$.
Soit $0 \leq r \leq \ell(C) - 2$.

$$\sum_{i=0}^{r} c_i \in f(C).$$

Or $f(C)$ est inclus dans $f(D)$. Donc il existe $0 \leq s \leq \ell(D) - 2$ vérifiant $\sum_{i=0}^{r} c_i = \sum_{i=0}^{s} d_i$.
Par disjonction de cas, on en déduit que C est moins fine que D.

On en déduit que C est moins fine que D si et seulement si $f(C) \subset f(D)$.

(b) Soit $C \in \mathscr{C}_n$.D'après la question 19.a, on en déduit que le nombre de compositions moins fines que C est égal au nombre de parties incluses dans $f(C)$. On en déduit que le cardinal demandé est égal à $2^{\text{Card}(f(C))}$. Or d'après la question 18, on a $\text{Card}(f(C)) = \ell(C) - 1$. Ainsi, le nombre de compositions moins fines que C est égal à

$$\boxed{2^{\ell(C)-1}}.$$

(c) Soit $C \in \mathscr{C}_n$. En raison de façon similaire, on constate que le nombre de compositions plus fine que C est égal au nombre de parties contenant $f(C)$ et incluses dans $[\![1, n-1]\!]$. En considérant les complémentaires, cela revient à compter le nombre de parties de $[\![1, n-1]\!]$ incluses dans $\overline{f(C)}$. Or cet ensemble est de cardinal $n - 1 - (\ell(C) - 1) = n - \ell(C)$. On en déduit que le nombre de compositions plus fines que C est égal à

$$\boxed{2^{n-\ell(C)}}.$$