

DS n° 3 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de documents est interdit.

Il est recommandé de lire l'énoncé attentivement et patiemment.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en mentionnant les hypothèses que vous avez été amené à formuler.

Le soin de la présentation, la qualité de la rédaction, ainsi que la rigueur, la clarté et la concision des raisonnements constitueront un facteur important d'appréciation de la copie.

Exercice

Lors d'une sortie scolaire, une classe de BCPST de 35 filles, 11 garçons et 3 accompagnateurs montent dans un autocar de 53 places : 12 rangées de 2 places à gauche, 12 rangées de 2 places à droite et 1 rangée de 5 places au fond. Les précisions ci-dessous sont valables pour tout l'exercice :

- le chauffeur et sa place ne sont pas pris en compte ;
- les termes «garçons» et «filles» désignent seulement des étudiants, non des accompagnateurs ;
- les réponses aux questions n'ont pas besoin d'être simplifiées.

1. De combien de façons différentes les 49 personnes peuvent-elles s'asseoir dans l'autocar ?

Désormais, on suppose que les 4 premières places (1^{re} rangée à gauche et 1^{re} rangée à droite) sont réservées aux 3 accompagnateurs (qui laissent la quatrième place inoccupée).

2. De combien de façons différentes les 49 personnes peuvent-elles s'asseoir dans l'autocar ?

3. Parmi ces façons, combien d'entre-elles sont telles que (chaque question est indépendante) :

- (a) aucune fille n'est assise dans la rangée du fond ?
- (b) les 5 places de la rangée du fond sont occupées par des filles ?
- (c) dans chacune des 25 rangées, il y a au plus un seul garçon ?
- (d) il y a autant de garçons assis dans les rangées à gauche que dans les rangées à droite (quel que soit le nombre de garçons assis dans la rangée du fond) ?

Problème

Soit E un ensemble fini de cardinal n . Une p -filtration de E est une p -liste $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p)$ de parties de E telle que $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset A_p$. Par exemple $(\emptyset, \emptyset, \{1\}, \{1, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\})$ est une 6-filtration de $\{1, 2, 3\}$, mais aussi de $\{1, 2, 3, 4\}$. Le but de ce problème est de dénombrer les p -filtrations de E . Pour tout couple d'entiers $(n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on note $F_{n,p}$ le nombre de p -filtrations d'un ensemble à n éléments.

1. Que vaut $F_{0,p}$? Justifier votre réponse.
2. À toute p -filtration $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p)$ de l'ensemble $\{1\}$, on associe le nombre :

$$\varphi(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p) = \text{card} \left\{ i \in \llbracket 1, p \rrbracket \mid A_i = \emptyset \right\}.$$

- (a) Que vaut $\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset, \{1\}, \{1\})$ dans le cas $p = 5$?
 - (b) Déterminer l'image directe de l'ensemble des p -filtrations de $\{1\}$ par l'application φ .
 - (c) Montrer que l'application φ est injective.
 - (d) En déduire la valeur de $F_{1,p}$.
3. En remarquant que l'ensemble des 1-filtrations de E est un ensemble du cours, déterminer $F_{n,1}$.
 4. Montrer que $F_{n,p} \leq 2^{np}$.
 5. Dans cette question, on considère le cas $p = 2$.
 - (a) Déterminer toutes les 2-filtrations de l'ensemble $\{1, 2\}$ et en déduire que $F_{2,2} = 9$.
 - (b) Dans cette question, on fixe un entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
 - i. Combien y a-t-il de parties $A_2 \subset E$ telles que $\text{card}(A_2) = k$?
 - ii. On fixe une partie $A_2 \subset E$ telle que $\text{card}(A_2) = k$. Combien y a-t-il de parties $A_1 \subset A_2$?
 - (c) À l'aide des résultats précédents, écrire $F_{n,2}$ sous la forme d'une somme.
 - (d) En déduire que $F_{n,2} = 3^n$.
 6. Pour tout entier $p \geq 1$, on pose la proposition suivante :

$$\mathcal{H}(p) : \text{«il existe une constante } C_p \in \mathbb{R} \text{ telle que pour tout } n \in \mathbb{N}, F_{n,p} = (C_p)^n \text{»}.$$

Le but de cette question est de montrer que cette proposition est héréditaire. Pour cela, on fixe un entier $p \geq 1$ et on suppose que la proposition $\mathcal{H}(p)$ est vraie.

- (a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Combien y a-t-il de $(p+1)$ -filtrations $(A_1, A_2, \dots, A_p, A_{p+1})$ de E telles que $\text{card}(A_{p+1}) = k$? Exprimer ce nombre en fonction de k, n et $F_{k,p}$.
 - (b) Montrer que $F_{n,p+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (C_p)^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (c) En déduire que $\mathcal{H}(p+1)$ est vraie.
7. À l'aide du résultat de la question précédente, exprimer C_p en fonction de $p \geq 1$.
 8. Conclure le problème en détaillant votre raisonnement à l'aide des résultats précédents.