Corrigé du DS n° 3 de mathématiques et d'informatique

Exercice

Lors d'une sortie scolaire, une classe de BCPST de 35 filles, 11 garçons et 3 accompagnateurs montent dans un autocar de 53 places : 12 rangées de 2 places à gauche, 12 rangées de 2 places à droite et 1 rangée de 5 places au fond. Les précisions ci-dessous sont valables pour tout l'exercice :

- *le chauffeur et sa place ne sont pas pris en compte ;*
- *les termes «garçons» et «filles» désignent seulement des étudiants, non des accompagnateurs ;*
- *les réponses aux questions n'ont pas besoin d'être simplifiées.*

1. *De combien de façons différentes les 49 personnes peuvent-elles s'asseoir dans l'autocar ?*

   ► Les $35+11+3 = 49$ personnes montent dans l'autocar les unes après les autres et chaque personne qui monte doit choisir une des 53 places qui n'est pas encore occupée :
   - il y a 53 places disponibles pour la première personne qui monte,
   - et puis il reste 52 places disponibles pour la deuxième personne qui monte,
   - et puis il reste 51 places disponibles pour la troisième personne qui monte,
   - etc.

   On reconnaît une 49-liste sans répétition des 53 places. Le nombre de façons différentes d'asseoir tout le monde dans l'autocar est donc égal à :

   $$\boxed{\frac{53!}{(53-49)!}}.$$

   Ce qui fait un total de $\frac{53!}{4!} \approx 1,78 \times 10^{68}$.

Désormais, on suppose que les 4 premières places (1re rangée à gauche et 1re rangée à droite) sont réservées aux 3 accompagnateurs (qui laissent la quatrième place inoccupée).

2. *De combien de façons différentes les 49 personnes peuvent-elles s'asseoir dans l'autocar ?*

   ► Pour les accompagnateurs, on reconnaît une 3-liste sans répétition des 4 premières places. Et puis, il reste $35 + 11 = 46$ étudiants qui peuvent s'asseoir dans $53 - 4 = 49$ places. On reconnaît donc une 46-liste sans répétition des 49 places restantes. Finalement, le nombre de façons différentes d'asseoir tout le monde dans l'autocar est donc égal à :

   $$\boxed{\frac{4!}{(4-3)!} \times \frac{49!}{(49-46)!}}.$$

   Ce qui fait un total de $\frac{4!49!}{3!} \approx 2,43 \times 10^{63}$.

3. *Parmi ces façons, combien d'entre-elles sont telles que (chaque question est indépendante) :*

   (a) *aucune fille n'est assise dans la rangée du fond ?*

   ► Pour les accompagnateurs, on a toujours une 3-liste sans répétition des 4 premières places. Et puis, les 35 filles peuvent s'asseoir dans $53 - 4 - 5 = 44$ places. On reconnaît donc une 35-liste sans répétition des 44 places possibles pour les filles. Et puis, les 11 garçons peuvent s'asseoir dans $53 - 4 - 35 = 14$ places. On reconnaît une 11-liste sans répétition des 14 places restantes. Finalement, le nombre de façons différentes d'asseoir tout le monde dans l'autocar est donc égal à :

   $$\boxed{\frac{4!}{(4-3)!} \times \frac{44!}{(44-35)!} \times \frac{14!}{(14-11)!}}.$$

Ce qui fait un total de $\frac{4!44!14!}{9!3!} \approx 2,55 \times 10^{60}$.

(b) *les 5 places de la rangée du fond sont occupées par des filles ?*

▶ Pour les accompagnateurs, on a toujours une 3-liste sans répétition des 4 premières places. Et puis, on choisit 5 filles parmi les 35 qui s'assoient dans les 5 places de la rangée du fond. On reconnaît une 5-combinaison des 35 filles pour choisir celles qui s'assoient dans les 5 places de la rangée du fond, et puis une permutation de ces 5 filles pour choisir une façon de les asseoir dans les 5 places de la rangée du fond. Et puis, il reste $35 - 5 + 11 = 41$ étudiants qui peuvent s'asseoir dans les $53 - 4 - 5 = 44$ places restantes. On reconnaît une 41-liste sans répétition des 44 places restantes. Finalement, le nombre de façons différentes d'asseoir tout le monde dans l'autocar est donc égal à :

$$\boxed{\frac{4!}{(4-3)!} \times \binom{35}{5} \times 5! \times \frac{44!}{(44-41)!}}.$$

Ce qui fait un total de $\frac{4!35!44!}{30!3!} \approx 4,14 \times 10^{62}$.

(c) *dans chacune des 25 rangées, il y a au plus un seul garçon ?*

▶ Pour les accompagnateurs, on a toujours une 3-liste sans répétition des 4 premières places. Et puis, on considère deux cas disjoints : aucun garçon ne s'assoit dans dans la rangée du fond, ou bien un seul garçon s'assoit dans la rangée du fond.

— Si aucun des 11 garçons ne s'assoit dans la rangée du fond, chaque garçon qui monte choisit une des $12 + 12 + 1 - 2 - 1 = 22$ rangées qui n'est pas encore occupée par un garçon, et puis une des deux places de cette rangée. On reconnaît une 11-liste sans répétition des 22 rangées possibles, et puis une 11-liste des deux places possibles pour chaque rangée (par exemple : la place à gauche ou à droite). On obtient donc :

$$\frac{22!}{(22-11)!} \times 2^{11} \quad \text{façons d'asseoir les garçons dans ce cas.}$$

— Si un seul des 11 garçons s'assoit dans la rangée du fond, on reconnaît une 1-combinaison des 11 garçons pour choisir celui qui s'assoit dans la rangée du fond, et puis on choisit une des 5 places possibles de la rangée du fond. Et puis, il reste $11 - 1 = 10$ garçons s'assoient comme dans le premier cas. On reconnaît donc une 10-liste sans répétition des 22 rangées possibles pour les 10 garçons restants, et puis une 10-liste des deux places possibles pour chaque rangée. On obtient donc :

$$\binom{11}{1} \times 5 \times \frac{22!}{(22-10)!} \times 2^{10} \quad \text{façons d'asseoir les garçons dans ce cas.}$$

Et puis, il reste 35 filles qui peuvent s'asseoir dans les $53 - 4 - 11 = 38$ places restantes. On reconnaît une 35-liste sans répétition des 38 places restantes. Finalement, Le nombre de façons différentes d'asseoir tout le monde dans l'autocar est donc égal à :

$$\boxed{\frac{4!}{(4-3)!} \times \left(\frac{22!}{(22-11)!} \times 2^{11} + \binom{11}{1} \times 5 \times \frac{22!}{(22-10)!} \times 2^{10}\right) \times \frac{38!}{(38-35)!}}.$$

Ce qui fait un total de $4!(\frac{22!}{11!}2^{11} + 55\frac{22!}{12!}2^{10})\frac{38!}{3!} \approx 3,97 \times 10^{62}$.

(d) *il y a autant de garçons assis dans les rangées à gauche que dans les rangées à droite (quel que soit le nombre de garçons assis dans la rangée du fond) ?*

▶ Pour les accompagnateurs, on a toujours une 3-liste sans répétition des 4 premières places. Et puis, on considère six cas disjoints : aucun garçon ne s'assoit dans la rangée du fond, ou bien un seul garçon s'assoit dans la rangée du fond, ou bien exactement deux garçons s'assoient dans la rangée du fond, etc., ou bien cinq garçons s'assoient dans la rangée du fond. Puisqu'il y a

11 garçons au total, on remarque que si exactement 0, 2 ou 4 garçons s'assoient dans la rangée du fond, alors il reste un nombre impair de garçons (11, 9 ou 7) qui ne peuvent pas se répartir équitablement entre les rangées à gauche et à droite. On considère donc seulement les cas où exactement 1, 3 ou 5 garçons s'assoient dans la rangée du fond.

— Si un seul des 11 garçons s'assoit dans la rangée du fond, on reconnaît une 1-combinaison des 11 garçons pour choisir celui qui s'assoit dans la rangée du fond, et puis on choisit une des 5 places de la rangée du fond. Et puis, on choisit $(11-1)/2 = 5$ garçons parmi les $11-1 = 10$ restants qui s'assoient dans les $(53-4-5)/2 = 22$ places des rangées à gauche. On reconnaît une 5-combinaison des 10 garçons restants pour choisir ceux qui s'assoient dans les rangées à gauche, et puis une 5-liste sans répétition des 22 places possibles dans les rangées à gauche. Et puis, il reste $11-1-5 = 5$ garçons qui s'assoient dans les $53-4-5-22 = 22$ places des rangées à droite. On reconnaît une 5-liste sans répétition des 22 places possibles dans les rangées à droite. On obtient donc :

$$\binom{11}{1} \times 5 \times \binom{10}{5} \times \frac{22!}{(22-5)!} \times \frac{22!}{(22-5)!} \quad \text{façons d'asseoir les garçons dans ce cas.}$$

— Si exactement 3 des 11 garçons s'assoient dans la rangée du fond, on reconnaît une 3-combinaison des 11 garçons pour choisir ceux qui s'assoient dans la rangée du fond, et puis une 3-liste sans répétition des 5 places de la rangée du fond. Et puis, il reste $11-3 = 8$ garçons qui s'assoient comme dans le premier cas. On reconnaît donc une 4-combinaison des 8 garçons restants pour choisir ceux qui s'assoient dans les rangées à gauche, et puis une 4-liste sans répétition des 22 places possibles dans les rangées à gauche, et puis une 4-liste sans répétition des 22 places possibles dans les rangées à droite pour les garçons qui s'assoient dans les rangées à droite. On obtient donc :

$$\binom{11}{3} \times \frac{5!}{(5-3)!} \times \binom{8}{4} \times \frac{22!}{(22-4)!} \times \frac{22!}{(22-4)!} \quad \text{façons d'asseoir les garçons dans ce cas.}$$

— Si exactement 5 des 11 garçons s'assoient dans la rangée du fond, on reconnaît une 5-combinaison des 11 garçons pour choisir ceux qui s'assoient dans la rangée du fond, et puis une permutation de ces 5 garçons pour choisir une façon de les asseoir dans les 5 places de la rangée du fond. Et puis, il reste $11-5 = 6$ garçons qui s'assoient comme dans le premier cas. On reconnaît donc une 3-combinaison des 6 garçons restants pour choisir ceux qui s'assoient dans les rangées à gauche, et puis une 3-liste sans répétition des 22 places possibles dans les rangées à gauche, et puis une 3-liste sans répétition des 22 places possibles dans les rangées à droite pour les garçons qui s'assoient dans les rangées à droite. On obtient donc :

$$\binom{11}{5} \times 5! \times \binom{6}{3} \times \frac{22!}{(22-3)!} \times \frac{22!}{(22-3)!} \quad \text{façons d'asseoir les garçons dans ce cas.}$$

Et puis, il reste 35 filles qui peuvent s'asseoir dans les $53-4-11 = 38$ places restantes. On reconnaît une 35-liste sans répétition des 38 places restantes. Finalement, Le nombre de façons différentes d'asseoir tout le monde dans l'autocar est donc égal à :

$$\boxed{\frac{4!}{(4-3)!} \times \left(\begin{array}{c} \binom{11}{1} \times 5 \times \binom{10}{5} \times \frac{22!}{(22-5)!} \times \frac{22!}{(22-5)!} \\ + \binom{11}{3} \times \frac{5!}{(5-3)!} \times \binom{8}{4} \times \frac{22!}{(22-4)!} \times \frac{22!}{(22-4)!} \\ + \binom{11}{5} \times 5! \times \binom{6}{3} \times \frac{22!}{(22-3)!} \times \frac{22!}{(22-3)!} \end{array} \right) \times \frac{38!}{(38-35)!}}.$$

Ce qui fait un total de $4!\left(55\frac{10!22!22!}{5!5!17!17!} + \frac{11!5!8!22!22!}{3!8!2!4!4!18!18!} + \frac{11!22!22!}{3!3!19!19!}\right)\frac{38!}{3!} \approx 3,34 \times 10^{62}$.

Problème

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Une p-filtration de E est une p-liste $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p)$ de parties de E telle que $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \subset A_p$. Par exemple $(\emptyset, \emptyset, \{1\}, \{1,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\})$ est une 6-filtration de $\{1,2,3\}$, mais aussi de $\{1,2,3,4\}$. Le but de ce problème est de dénombrer les p-filtrations de E. Pour tout couple d'entiers $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$, on note $F_{n,p}$ le nombre de p-filtrations d'un ensemble à n éléments.

1. *Que vaut $F_{0,p}$? Justifier votre réponse.*

   ▶ Si le cardinal de E vaut $n = 0$, alors $E = \emptyset$. Dans ce cas, la seule partie de E est $\emptyset$ et donc la seule p-filtration de E est $(\emptyset, \emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset)$. On en déduit que $\boxed{F_{0,p} = 1}$.

2. *À toute p-filtration $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p)$ de l'ensemble $\{1\}$, on associe le nombre :*

$$\varphi(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p) = \operatorname{card}\Big\{i \in [\![1,p]\!] \mid A_i = \emptyset\Big\}.$$

   (a) *Que vaut $\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset, \{1\}, \{1\})$ dans le cas $p = 5$?*

   ▶ Si $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) = (\emptyset, \emptyset, \emptyset, \{1\}, \{1\})$ alors :

$$\Big\{i \in [\![1,p]\!] \mid A_i = \emptyset\Big\} = \{1,2,3\} \quad \text{car } A_1 = A_2 = A_3 = \emptyset \text{ et } A_4 = A_5 = \{1\} \neq \emptyset.$$

   Par conséquent :

$$\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset, \{1\}, \{1\}) = \operatorname{card}\Big\{i \in [\![1,p]\!] \mid A_i = \emptyset\Big\} = \operatorname{card}\{1,2,3\} = \boxed{3}.$$

   (b) *Déterminer l'image directe de l'ensemble des p-filtrations de $\{1\}$ par l'application φ.*

   ▶ Puisque les seules parties de l'ensemble $\{1\}$ sont $\emptyset$ et $\{1\}$, les p-filtrations de $\{1\}$ sont de la forme :

$$(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p) = \Big(\underbrace{\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset}_{k \text{ fois}}, \underbrace{\{1\}, \{1\}, \dots, \{1\}}_{p-k \text{ fois}}\Big) \quad \text{où } k \in \{0,1,2,\dots,p\}.$$

   Or on a :

$$\varphi\Big(\underbrace{\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset}_{k \text{ fois}}, \underbrace{\{1\}, \{1\}, \dots, \{1\}}_{p-k \text{ fois}}\Big) = \operatorname{card}\{1,2,\dots,k\} = k.$$

   Par conséquent, l'image directe de l'ensemble des p-filtrations de $\{1\}$ par l'application φ est égal à l'ensemble des valeurs de k possibles, c'est-à-dire $\boxed{\{0,1,2,\dots,p\}}$.

   On peut remarquer que φ atteint son maximum pour $\varphi(\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset) = p$ et son minimum pour $\varphi(\{1\}, \{1\}, \dots, \{1\}) = 0$. L'image directe des p-filtrations de $\{1\}$ est donc égal à l'ensemble des entiers compris entre 0 et p.

   (c) *Montrer que l'application φ est injective.*

   ▶ Soient $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p)$ et $(B_1, B_2, B_3, \dots, B_p)$ deux p-filtrations de $\{1\}$. D'après ce qu'on a vu à la question précédente, il existe donc $k \in \{0,1,2,\dots,p\}$ et $k' \in \{0,1,2,\dots,p\}$ tels que :

$$(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p) = \Big(\underbrace{\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset}_{k \text{ fois}}, \underbrace{\{1\}, \{1\}, \dots, \{1\}}_{p-k \text{ fois}}\Big)$$

$$\text{et} \quad (B_1, B_2, B_3, \dots, B_p) = \Big(\underbrace{\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset}_{k' \text{ fois}}, \underbrace{\{1\}, \{1\}, \dots, \{1\}}_{p-k' \text{ fois}}\Big).$$

   On suppose que $\varphi(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p) = \varphi(B_1, B_2, B_3, \dots, B_p)$. Or on a :

$$\varphi(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p) = \varphi\Big(\underbrace{\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset}_{k \text{ fois}}, \underbrace{\{1\}, \{1\}, \dots, \{1\}}_{p-k \text{ fois}}\Big) = k$$

$$\text{et} \quad \varphi(B_1, B_2, B_3, \dots, B_p) = \varphi\Big(\underbrace{\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset}_{k' \text{ fois}}, \underbrace{\{1\}, \{1\}, \dots, \{1\}}_{p-k' \text{ fois}}\Big) = k'.$$

On en déduit que $k = k'$ et donc que $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p) = (B_1, B_2, B_3, \dots, B_p)$. Par conséquent, on a bien montré que $\boxed{\varphi \text{ est injective}}$.

(d) En déduire la valeur de $F_{1,p}$.

▶ Par définition de l'image directe et de la surjectivité, l'application φ est une surjection de l'ensemble des p-filtrations de $\{1\}$ vers son image directe. D'après le résultat de la question 2(b), φ est donc une surjection de l'ensemble des p-filtrations de $\{1\}$ vers l'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, p\}$. D'après le résultat de la question précédente, φ est aussi injective. Ainsi, φ est une bijection de l'ensemble des p-filtrations de $\{1\}$ vers l'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, p\}$. Par conséquent, le nombre de p-filtrations de l'ensemble $\{1\}$ est égal à $\mathrm{card}\{0, 1, 2, \dots, p\} = p + 1$. On en déduit que :

$$\boxed{F_{1,p} = p + 1}.$$

3. En remarquant que l'ensemble des 1-filtrations de E est un ensemble du cours, déterminer $F_{n,1}$.

▶ D'après l'énoncé, une 1-filtration de E est une 1-liste (A_1) de partie de E. Autrement dit, une 1-filtration est une partie $A_1 \subset E$ et l'ensemble des 1-filtrations de E est égal à l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E. On en déduit que :

$$F_{n,1} = \mathrm{card}(\mathscr{P}(E)) = 2^{\mathrm{card}(E)} = \boxed{2^n}.$$

4. Montrer que $F_{n,p} \leqslant 2^{np}$.

▶ D'après l'énoncé, une p-filtration de E est une p-liste $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p)$ de parties de E telle que $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset A_p$. En particulier, l'ensemble des p-filtrations de E est un sous-ensemble de l'ensemble des p-listes $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p)$ de parties de E, c'est-à-dire de l'ensemble $(\mathscr{P}(E))^p$. On en déduit que :

$$F_{n,p} \leqslant \mathrm{card}\Big((\mathscr{P}(E))^p\Big) = \Big(\mathrm{card}(\mathscr{P}(E))\Big)^p = \Big(2^{\mathrm{card}(E)}\Big)^p = \Big(2^n\Big)^p = \boxed{2^{np}}.$$

5. Dans cette question, on considère le cas $p = 2$.

(a) Déterminer toutes les 2-filtrations de l'ensemble $\{1, 2\}$ et en déduire que $F_{2,2} = 9$.

▶ L'ensemble des parties de $\{1, 2\}$ est :

$$\mathscr{P}(\{1, 2\}) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\Big\}.$$

Les 2-filtrations de $\{1, 2\}$ sont donc :

$$\boxed{\begin{array}{c} (\emptyset, \emptyset),\ (\emptyset, \{1\}),\ (\emptyset, \{2\}),\ (\emptyset, \{1, 2\}), \\ (\{1\}, \{1\}),\ (\{1\}, \{1, 2\}), \\ (\{2\}, \{2\}),\ (\{2\}, \{1, 2\}), \\ \text{et } (\{1, 2\}, \{1, 2\}). \end{array}}$$

On en déduit bien que $\boxed{F_{2,2} = 9}$.

(b) Dans cette question, on fixe un entier $k \in [\![0, n]\!]$.

i. Combien y a-t-il de parties $A_2 \subset E$ telles que $\mathrm{card}(A_2) = k$?

▶ Une partie $A_2 \subset E$ telle que $\mathrm{card}(A_2) = k$ est une k-combinaison de E. Il y en a donc :

$$\boxed{\binom{\mathrm{card}(E)}{k} = \binom{n}{k}}.$$

ii. *On fixe une partie $A_2 \subset E$ telle que $\text{card}(A_2) = k$. Combien y a-t-il de parties $A_1 \subset A_2$?*

▶ Une partie $A_1 \subset A_2$ est une partie de A_2. Il y en a donc :

$$\boxed{\text{card}(\mathscr{P}(A_2)) = 2^{\text{card}(A_2)} = 2^k}.$$

(c) *À l'aide des résultats précédents, écrire $F_{n,2}$ sous la forme d'une somme.*

▶ D'après l'énoncé, une 2-filtration de E est une 2-liste (A_1, A_2) de parties de E telle que $A_1 \subset A_2$. En particulier, si (A_1, A_2) est une 2-filtration de E alors $\text{card}(A_2) \in [\![0, n]\!]$ car $A_2 \subset E$ et $\text{card}(E) = n$. Autrement dit, $\text{card}(A_2) = 0$ ou bien $\text{card}(A_2) = 1$ ou bien $\text{card}(A_2) = 2$ ou bien, etc., ou bien $\text{card}(A_2) = n$. De plus :

— choisir une 2-filtration (A_1, A_2) de E telle que $\text{card}(A_2) = 0$ revient à choisir une partie $A_2 \subset E$ telle que $\text{card}(A_2) = 0$ et puis une partie $A_1 \subset A_2$, il y en a donc $\binom{n}{0} \times 2^0$ d'après les résultats des deux questions précédentes,

— de même, il y a $\binom{n}{1} \times 2^1$ 2-filtrations (A_1, A_2) de E telles que $\text{card}(A_2) = 1$,

— il y a $\binom{n}{2} \times 2^2$ 2-filtrations (A_1, A_2) de E telles que $\text{card}(A_2) = 2$,

— etc.

— il y a $\binom{n}{n} \times 2^n$ 2-filtrations (A_1, A_2) de E telles que $\text{card}(A_2) = n$.

Finalement, le nombre de 2-filtrations de E est égal à :

$$F_{n,2} = \binom{n}{0} \times 2^0 + \binom{n}{1} \times 2^1 + \binom{n}{2} \times 2^2 + \cdots + \binom{n}{n} \times 2^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} \times 2^k \right) = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k}.$$

Plus précisément, si on note F l'ensemble des 2-filtrations de E et F_k le sous-ensemble des 2-filtrations (A_1, A_2) de E telles que $\text{card}(A_2) = k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on remarque que la famille $(F_0, F_1, F_2, \dots, F_n)$ forme une partition de F car

$$\bigcup_{k=0}^{n} F_k = F \quad \textit{et} \quad \forall (i, j) \in [\![0, n]\!]^2,\ i \neq j \implies F_i \cap F_j = \emptyset.$$

D'après les résultats des deux questions précédentes, on en déduit que :

$$F_{n,2} = \text{card}(F) = \sum_{k=0}^{n} \text{card}(F_k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k.$$

(d) *En déduire que $F_{n,2} = 3^n$.*

▶ On a d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned} F_{n,2} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} \quad \text{car } 1^{n-k} = 1 \\ &= (2+1)^n \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton} \\ &= \boxed{3^n}. \end{aligned}$$

6. *Pour tout entier $p \geqslant 1$, on pose la proposition suivante :*

$$\mathscr{H}(p) : \text{«}\textit{il existe une constante } C_p \in \mathbb{R} \textit{ telle que pour tout } n \in \mathbb{N},\ F_{n,p} = (C_p)^n\text{»}.$$

Le but de cette question est de montrer que cette proposition est héréditaire. Pour cela, on fixe un entier $p \geqslant 1$ et on suppose que la proposition $\mathscr{H}(p)$ est vraie.

(a) *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Combien y a-t-il de $(p+1)$-filtrations $(A_1, A_2, \ldots, A_p, A_{p+1})$ de E telles que $\mathrm{card}(A_{p+1}) = k$? Exprimer ce nombre en fonction de k, n et $F_{k,p}$.*

▶ D'après l'énoncé, une $(p+1)$-filtration de E est une $(p+1)$-liste $(A_1, A_2, \ldots, A_p, A_{p+1})$ de parties de E telle que $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_p \subset A_{p+1}$. En particulier, on remarque que si $(A_1, A_2, \ldots, A_p, A_{p+1})$ est une $(p+1)$-filtration de E alors $(A_1, A_2, \ldots, A_p)$ est une p-filtration de A_{p+1} car $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sont des parties de A_{p+1} et $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_p$. Par conséquent, choisir une $(p+1)$-filtrations $(A_1, A_2, \ldots, A_p, A_{p+1})$ de E telle que $\mathrm{card}(A_{p+1}) = k$, revient à choisir :

— une partie A_{p+1} de E telle que $\mathrm{card}(A_{p+1}) = k$, c'est-à-dire que k-combinaison de E, il y en a $\binom{\mathrm{card}(E)}{k} = \binom{n}{k}$,

— et puis une p-filtration $(A_1, A_2, \ldots, A_p)$ de A_{p+1}, il y en a $F_{\mathrm{card}(A_{p+1}),p} = F_{k,p}$.

On en déduit que le nombre de $(p+1)$-filtrations $(A_1, A_2, \ldots, A_p, A_{p+1})$ de E telles que $\mathrm{card}(A_{p+1}) = k$ est égal à :

$$\boxed{\binom{n}{k} \times F_{k,p}}.$$

(b) *Montrer que $F_{n,p+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (C_p)^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

▶ Soit $n \in \mathbb{N}$. On raisonne comme à la question 5(c) en partitionnant l'ensemble des $(p+1)$-filtrations de E par les sous-ensembles des $(p+1)$-filtrations $(A_1, A_2, \ldots, A_p, A_{p+1})$ de E telles que $\mathrm{card}(A_{p+1}) = k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que :

$$F_{n,p+1} = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} \times F_{k,p} \right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{k,p}.$$

Or on a supposé que la proposition $\mathscr{H}(p+1)$ est vraie, c'est-à-dire que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ F_{k,p} = (C_p^k).$$

En reportant dans la somme précédente, on a bien montré que :

$$\boxed{F_{n,p+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (C_p)^k} \quad \text{et ceci est vrai pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(c) *En déduire que $\mathscr{H}(p+1)$ est vraie.*

▶ On a d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n,p+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (C_p)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (C_p)^k 1^{n-k} \quad \text{car } 1^{n-k} = 1 \\
&= (C_p + 1)^n \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton.}
\end{aligned}$$

On pose $C_{p+1} = C_p + 1$. On a donc bien trouvé une constante $C_{p+1} \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n,p+1} = (C_{p+1})^n.$$

Par conséquent, $\boxed{\text{la proposition } \mathscr{H}(p+1) \text{ est vraie}}$.

7. *À l'aide du résultat de la question précédente, exprimer C_p en fonction de $p \geqslant 1$.*

▶ On a vu à la question précédente que pour tout entier $p \geqslant 1$:

$$C_{p+1} = C_p + 1.$$

On reconnaît une suite arithmétique. Donc :

$$\forall p \geqslant 1,\ C_p = C_1 + (p-1) \times 1.$$

De plus, on a montré à la question 3 que $F_{n,1} = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que la proposition $\mathscr{H}(1)$ est vraie en posant $C_1 = 2$. Finalement, on obtient :

$$\forall p \geqslant 1,\ C_p = C_1 + p - 1 = 2 + p - 1 = \boxed{p+1}.$$

8. *Conclure le problème en détaillant votre raisonnement à l'aide des résultats précédents.*

► On a vu à la question précédente que la proposition $\mathscr{H}(1)$ est vraie en posant $C_1 = 2$ (d'après le résultat de la question 3). De plus, on a montré à la question 6 que la proposition est héréditaire, c'est-à-dire que $\mathscr{H}(p) \implies \mathscr{H}(p+1)$ pour tout entier $p \geqslant 1$. D'après le principe de récurrence, on en déduit que la proposition $\mathscr{H}(p)$ est vraie pour tout entier $p \geqslant 1$. Ainsi $F_{n,p} = (C_p)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout entier $p \geqslant 1$. Or on a montré à la question précédente que $C_p = p+1$ pour tout entier $p \geqslant 1$. Finalement, on en déduit que le nombre de p-filtrations de E est égal à :

$$\boxed{F_{n,p} = (p+1)^n}.$$

Au lieu de déterminer ce résultat par récurrence (méthode proposée par l'énoncé), on peut également montrer que l'application suivante est une bijection de l'ensemble des p-filtrations de E vers $[\![0,p]\!]^E$:

$$\psi : (A_1, A_2, A_3, \dots, A_p) \mapsto f \quad \text{où} \quad \begin{aligned} f : E &\to [\![0,p]\!] \\ x &\mapsto \operatorname{card}\left\{ i \in [\![1,p]\!] \mid x \in A_i \right\} \end{aligned}$$

dont la bijection réciproque est définie par :

$$\psi^{-1} : f \mapsto (A_1, A_2, A_3, \dots, A_p) \quad \text{où} \quad \forall i \in [\![1,p]\!],\ A_i = \left\{ x \in E \mid f(x) \geqslant p+1-i \right\}.$$

Ainsi, on retrouve que le nombre de p-filtrations de E est égal à :

$$F_{n,p} = \operatorname{card}\left([\![0,p]\!]^E \right) = \left(\operatorname{card}[\![0,p]\!]\right)^{\operatorname{card}(E)} = (p+1)^n.$$