DS 3 mathématiques

BCPST 1B 2018-2019

— Durée : 3 heures.

— Documents et calculatrice non autorisés.

— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Étude d'une famille de suites

Dans tout le problème, pour tout $m \in \mathbb{R}$, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$S_m(a,b) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suites réelles } | u_0 = a, u_1 = b, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + m \cdot u_n\}.$$

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'équation d'inconnue complexe x, $E_m : x^2 - x - m = 0$. Déterminer le nombre de solutions réelles de E_m en fonction de m.
2. (INFO) Écrire une fonction `nb_sol(m)` qui renvoie le nombre de solutions réelles de l'équation $x^2 - x - m = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$: E_1, $E_{-\frac{1}{3}}$, $E_{-\frac{1}{4}}$. Dans le cas de solutions complexes non réelles donner également une écriture exponentielle des solutions.
4. Soit la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\alpha_0 = 2, \alpha_1 = 3, \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} - \frac{1}{4}\alpha_n$.
   (a) (INFO) On considère les deux fonctions suivantes écrites en Python :

```
def alpha(n) :
    u0=2
    u1=3
    for i in range(n) :
        u1=u1-0.25*u0
        u1=u0
    return u0
```

```
def alphabis(n) :
    u0=2
    u1=3
    for i in range(n) :
        u=u1
        u1=u-0.25*u0
        u0=u
        return u
```

   Déterminer la valeur de `alpha(3)` et de `alphabis(3)`.

   (b) (INFO) Écrire une fonction `alphater(n)` qui prend en argument un entier n et qui renvoie la valeur de α_n.

   (c) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de α_n en fonction de n.

   (d) Déterminer a, b, m des réels tels que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $S_m(a,b)$.
5. Soit la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\beta_0 = 0, \beta_1 = 4, \forall n \in \mathbb{N}, \beta_{n+2} = \beta_{n+1} - \frac{1}{3}\beta_n$.
   (a) (INFO) Écrire une fonction `beta(n)` qui renvoie la valeur de β_n. On utilisera la formule de récurrence.

   (b) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de β_n en fonction de n.

   (c) Montrer que $S_{-\frac{1}{4}}(0,4)$ contient comme unique élément la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pourra considérer une suite quelconque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $S_{-\frac{1}{4}}(0,4)$ et montrer par une récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \beta_n$.
6. On définit la suite de Lucas $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $L_0 = 2, L_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

   (b) (INFO) Déduire de la question 6a une fonction `Lucas(n)` qui renvoie la valeur de L_n.

   (c) Soient a, b, m des réels. Montrer que si $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $S_m(a,b)$ alors $a = 2, b = 1, m = 1$.

7. Soient m, a, b des réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $S_m(a,b)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on souhaite simplifier $\sum_{k=0}^n u_k$.
   (a) (INFO) Écrire une fonction `suite(a,b,m,n)` qui prend en arguments trois réels a, b, m et un entier n et qui renvoie la valeur de u_n où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $S_m(a,b)$.
   (b) (INFO) On déduit de la question précédente la fonction `somme(a,b,m,n)` définie par

```
def somme(a,b,m,n) :
    S=0
    for i in range(n+1) :
        S=S+suite(a,b,m,n)
    return S
```

   Quelle est la valeur de retour de cette fonction ? Modifier celle-ci pour que la valeur de retour de cette fonction soit $\sum_{k=0}^n u_k$, où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $S_m(a,b)$.
   (c) Cas 1 : $m = 0$.
      i. Calculer $\sum_{k=0}^0 u_k, \sum_{k=0}^1 u_k, \sum_{k=0}^2 u_k$.
      ii. Pour tout $n \geq 2$, simplifier $\sum_{k=0}^n u_k$.
   (d) Cas 2 : $m \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, simplifier $\sum_{k=0}^n u_k$. On pourra remarquer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_k = \frac{1}{m}\left(u_{k+2} - u_{k+1}\right).$$

   (e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire $\sum_{k=0}^n \alpha_k, \sum_{k=0}^n \beta_k, \sum_{k=0}^n L_k$.
8. Dans cette question, on cherche à simplifier diverses sommes faisant intervenir la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à la question 6.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, simplifier $\sum_{k=0}^n L_{2k}$ et $\sum_{k=0}^n L_{2k+1}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{cases} L_{2n} & = & L_n^2 - 2\cdot(-1)^n \\ L_{2n+1} & = & L_n L_{n+1} - (-1)^n \end{cases}$$

   (c) (INFO) Écrire en python une fonction correspondant au pseudo-code suivant :

```
liste_lucas(n) :
    Si n=0 :
        retourner [2]
    si n=1 :
        retourner [2,0]
    sinon :
        L=[2,0]
        pour  i allant de 0 à n-1 (inclus) :
            si i est pair et est égal à 2k :
                S= L[k]**2-2 (-1)**n
            si i est impair et est égal à 2k+1 :
                S=L[k]*L[k+1]-(-1)**n
            ajouter S à la fin de L
        retourner L
```

   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ simplifier $\sum_{k=0}^n L_k^2$ et $\sum_{k=0}^n L_k L_{k+1}$. On pourra s'aider des questions précédentes.
   (e) (INFO) Écrire une fonction `somme1(n)` qui renvoie la valeur de $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n} L_i L_j$. On pourra utiliser la fonction `Lucas` de la question 6b.
   (f) (INFO) Écrire une fonction `somme2(n)` qui renvoie la valeur de $\displaystyle\sum_{0\leq i\leq j\leq n} L_i L_j$. On pourra utiliser la fonction `Lucas` de la question 6b.
   (g) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, simplifier $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n} L_i L_j$ et $\displaystyle\sum_{0\leq i\leq j\leq n} L_i L_j$. On pourra s'aider de résultats de la question 7.

Correction

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. L'équation $E_m : x^2 - x - m = 0$ est une équation de degré 2 de discriminant $\Delta_m = 1 + 4m$. Il en résulte que :
   - Cas 1 : $m > \frac{-1}{4}$. L'équation a alors exactement 2 solutions réelles.
   - Cas 2 : $m = \frac{-1}{4}$. L'équation a exactement 1 solution réelle.
   - Cas 3 : $m < \frac{-1}{4}$. L'équation n'a pas de solution réelle.
2.
```
def nb_sol(m) :
    if m>(-1/4) :
        return 2
    elif m==(-1/4) :
        return 1
    else :
        return 0
```

3.
   - Résolvons $E_1 : x^2 - x - 1 = 0$. On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$. On en déduit que les solutions de E_1 sont exactement :
   $$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$
   Donc $\boxed{S = \{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\}}$
   - Résolvons $E_{\frac{-1}{3}} : x^2 - x + \frac{1}{3} = 0$. On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$. On en déduit que les solutions de E_1 sont exactement :
   $$x_1 = \frac{1 + i\frac{1}{\sqrt{3}}}{2}, x_2 = \frac{1 - i\frac{1}{\sqrt{3}}}{2}.$$
   Écrivons x_1 et x_2 sous forme exponentielles :
   $$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{1}{\sqrt{3}}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}) \\ & = & \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{i\pi}{6}} \\ & = & \underline{\frac{\sqrt{3}}{3} e^{\frac{i\pi}{6}}} \end{array}$$
   x_2 étant le conjugué de x_1, on a donc $x_2 = \underline{\frac{\sqrt{3}}{3} e^{\frac{-i\pi}{6}}}$
   - Résolvons $E_{-\frac{1}{4}} : x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$. Or $E_{-\frac{1}{4}}$ est équivalente à
   $$(x - \frac{1}{2})^2 = 0.$$
   Il en résulte que la solution de $E_{-\frac{1}{4}}$ est $\underline{\frac{1}{2}}$.
4. Soit la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\alpha_0 = 2, \alpha_1 = 3, \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} - \frac{1}{4}\alpha_n$.
   (a) (INFO) Pour `alpha(3)`, la valeur de u_0 n'étant pas modifié, la valeur de retour est 2. Pour `alphabis(3)`, u prenant la valeur 3, n'étant pas modifié au sein de la boucle, le return étant dans celle-ci, il en résulte que la valeur de retour est 3.
   (b) (INFO) Voici la fonction `alphater(n)` :
```
def alphater(n) :
    alpha0=2
    alpha1=3
    for _ in range(n) :
        u=alpha1
        alpha1=alpha1-(1/4)*alpha0
        alpha0=u
    return alpha0
```

(c) La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite récurrente linéaire d'ordre 2 ayant comme équation caractéristique $E_{\frac{-1}{4}}$, il en résulte qu'il existe A, B des réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = (A + nB)(\frac{1}{2})^n.$$

En effet, d'après la question 3, $\frac{1}{2}$ est solution double de $E_{\frac{-1}{4}}$. Déterminons A, B à l'aide des conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A & = & 2 \\ \frac{A+B}{2} & = & 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} A & = & 2 \\ B & = & 4 \end{array} \right.$$

On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = (2 + 4n)(\frac{1}{2})^n = (1 + 2n)(\frac{1}{2})^{n-1}}$

(d) En posant $a = 2, b = 3, m = \frac{-1}{4}$, la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors un élément de $S_m(a, b)$ par définition.

5. Soit la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\beta_0 = 0, \beta_1 = 4, \forall n \in \mathbb{N}, \beta_{n+2} = \beta_{n+1} - \frac{1}{3}\beta_n$.

(a) (INFO) Voici la fonction `beta(n)` :

```
def beta(n) :
    beta0=0
    beta1=4
    for _ in rangen(n) :
        u=beta1
        beta1=beta1-(1/3)*beta0
        beta0=u
    return beta0
```

(b) La suite $(\beta)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite récurrente linéaire d'ordre 2 ayant comme équation caractéristique $E_{\frac{-1}{3}}$, il en résulte qu'il existe A, B des réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \beta_n = (\frac{\sqrt{3}}{3})^n \left(A\cos(n\frac{\pi}{6}) + B\sin(\frac{n\pi}{6}) \right).$$

En effet, d'après la question 3, $\frac{\sqrt{3}}{3}e^{\frac{i\pi}{6}}$ est une solution complexe de $E_{\frac{-1}{3}}$.
Déterminons A, B à l'aide des conditions initiales :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A & = & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3}(A\frac{\sqrt{3}}{2} + B\frac{1}{2}) & = & 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} A & = & 0 \\ B & = & \frac{24}{\sqrt{3}} \end{array} \right.$$

On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \beta_n = (\frac{\sqrt{3}}{3})^n \cdot \frac{24}{\sqrt{3}}\sin(\frac{n\pi}{6}) = (\frac{\sqrt{3}}{3})^{n-1} 8\sin(\frac{n\pi}{6})}$

(c) Par définition, $(\beta)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $S_{\frac{-1}{3}}(0, 4)$. Montrons que $S_{-\frac{1}{3}}(0, 4)$ contient comme unique élément la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $S_{\frac{-1}{3}}(0, 4)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P(n) : u_n = \beta_n.$$

— Initialisation :
Pour $n = 0, n = 1$, par définition de $S_{\frac{-1}{3}}(0, 4)$, on a $u_0 = 0 = \beta_0, u_1 = 4 = \beta_1$.

— Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ et $P(n + 1)$ vraies. Montrons que $P(n + 2)$ est vraies.
Par définition de u_{n+2}, on a

$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$$

Or d'après $P(n)$ et $P(n + 1)$, $u_n = \beta_n, u_{n+1} = \beta_{n+1}$. Donc

$$u_{n+2} = \beta_{n+1} - \frac{1}{3}\beta_n.$$

Or par définition de β_{n+2}, on a $\beta_{n+2} = \beta_{n+1} - \frac{1}{3}\beta_n$. D'où $u_{n+2} = \beta_{n+2}$.
$P(n + 2)$ est donc vraie.

— Conclusion : d'après le principe de récurrence, il en résulte que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \beta_n.$$

On en déduit que $S_{\frac{-1}{3}}(0,4)$ contient comme unique élément $(\beta)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. On définit la suite de Lucas $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $L_0 = 2, L_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$.

(a) La suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 ayant comme équation caractéristique E_1. Celle-ci ayant pour solutions $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ d'après la question 3, il en résulte qu'il existe A, B des réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, L_n = A\phi^n + B\psi^n.$$

Déterminons A et B à l'aide des conditions initiales :

$$\left\{\begin{array}{lcl} A+B & = & 2 \\ A\frac{1+\sqrt{5}}{2} + B\frac{1-\sqrt{5}}{2} & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \frac{A+B}{2} & = & 1 \\ \frac{A+B}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}(A-B) & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \frac{A+B}{2} & = & 1 \\ 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}(A-B) & = & 1 \end{array}\right.$$

Il en résulte que le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{lcl} \frac{A+B}{2} & = & 1 \\ \frac{\sqrt{5}}{2}(A-B) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \frac{A+B}{2} & = & 1 \\ A & = & B \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} A & = & 1 \\ A & = & B \end{array}\right. (A=B) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} A & = & 1 \\ B & = & 1 \end{array}\right. (A=B)$$

D'où : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\boxed{L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$.

(b) (INFO) Voici une fonction `Lucas(n)` calculant L_n :

```
def lucas(n) :
    return ((1+5**(0.5))/2)**n+((1-5**(0.5))/2)**n
```

(c) Soient a, b, m des réels. Supposons que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $S_m(a,b)$. Par définition, $L_0 = a, L_1 = b$. Mais $L_0 = 2$ et $L_1 = 1$. Donc $\underline{a=2}$ et $\underline{b=1}$. Par définition, on a aussi $L_2 = L_0 + mL_1$. Mais $L_2 = 3, L_0 = 2, L_1 = 1$. D'où

$$3 = 2 + m.$$

Donc $\underline{m=1}$.

7. Soient m, a, b des réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $S_m(a,b)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on souhaite simplifier $\sum_{k=0}^{n} u_k$.
   (a) (INFO) Voici la fonction `suite` :

```
def suite(a,b,m,n) :
    u0=a
    u1=b
    for _ in range(n) :
        u=u1
        u1=u1+m*u0
        u0=u
    return u0
```

   (b) (INFO) Soient $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}$. Constatons que dans la fonction, on ajoute à S toujours la même valeur : u_n, où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $S_m(a,b)$. De plus, on effectue $n+1$ fois cet ajout. Ainsi, la valeur de retour est $(n+1)u_n$

```
def somme(a,b,m,n) :
    S=0
    for i in range(n+1) :
        S=S+suite(a,b,m,n)
    return S
```

   Pour obtenir la somme voulue, il suffit de remplacer n par i dans la boucle :

```
def somme(a,b,m,n) :
    S=0
    for i in range(n+1) :
        S=S+suite(a,b,m,i)
    return S
```

   (c) Cas 1 : $m = 0$.
      i. $\sum_{k=0}^{0} u_k = u_0 = a, \sum_{k=0}^{1} = a + b, \sum_{k=0}^{2} u_k = a + b + b = a + 2b.$
      ii. Constatons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+2} = u_{n+1}$. Ainsi, la suite est constante à partir du rang 1. D'où, pour tout $n \geq 2$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = a + \sum_{k=1}^{n} b = a + nb.}$$

   (d) Cas 2 : $m \neq 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=0}^{n} u_k & = & \sum_{k=0}^{n} \frac{u_{k+2}-u_{k+1}}{m} \\ & = & \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{n} (u_{k+2} - u_{k+1}) \end{array}$$

   On reconnaît une somme télescopique, d'où

$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=0}^{n} u_k & = & \frac{1}{m}(u_{n+2} - u_1) \\ & = & \boxed{\dfrac{1}{m}(u_{n+2} - b)} \end{array}$$

   (e) Soit $n \in \mathbb{N}$. Chacune des trois suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant respectivement dans $S_{\frac{-1}{3}}(2,3)$, $S_{\frac{-1}{4}}(0,4)$, $S_1(2,1)$,
   on peut appliquer le résultat de la question 7.d. obtient alors

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = -3(\alpha_{n+2} - 3), \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -4(\beta_{n+2} - 4), \sum_{k=0}^{n} L_k = (L_{n+2} - 1)$$

   Or, d'après les questions 4.c, 5.b, 6.a,

$$\alpha_{n+2} = (2n+5)(\frac{1}{2})^{n+1}, \beta_{n+2} = (\frac{\sqrt{3}}{3})^{n+1} 8 \sin(\frac{(n+2)\pi}{6}), L_{n+2} = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2} + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\alpha_k=-3(2n+5)(\frac{1}{2})^{n+1}+9,\sum_{k=0}^{n}\beta_k=-32(\frac{\sqrt{3}}{3})^{n+1}\sin(\frac{(n+2)\pi}{6})+16,\sum_{k=0}^{n}L_k=(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2}+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}-1}.$$

8. Dans cette question, on cherche à simplifier diverses sommes faisant intervenir la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à la question 6.
   (a) Soit $n\in\mathbb{N}$. Posons $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On a

$$\begin{array}{rcl}\sum_{k=0}^{n}L_{2k} & = & \sum_{k=0}^{n}(\phi^{2k}+\psi^{2k}\\ & = & \sum_{k=0}^{n}(\phi^2)^k+\sum_{k=0}^{n}(\psi^2)^k\end{array}$$

On reconnaît deux sommes de termes consécutifs de suites géométrique de raison différent de 1, d'où

$$\sum_{k=0}^{n}L_{2k}=\frac{1-(\phi^2)^{n+1}}{1-\phi^2}+\frac{1-(\psi^2)^{n+1}}{1-\psi^2}$$

Or $\phi^2-\phi-1=0,\psi^2-\psi-1=0$. Donc

$$\sum_{k=0}^{n}L_{2k}=\frac{1-(\phi^2)^{n+1}}{-\phi}+\frac{1-(\psi^2)^{n+1}}{-\psi}$$

Or $\phi\psi=-1,\phi+\psi=1$. D'où, en réduisant au même dénominateur :

$$\begin{array}{rcl}\sum_{k=0}^{n}L_{2k} & = & -\psi(\phi^2)^{n+1}+\psi+\phi-\phi(\psi^2)^{n+1}\\ & = & \phi^{2n+1}+\psi^{2n+1}+1\\ & = & \underline{1+L_{2n+1}}\\ & = & \boxed{1+(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n+1}+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n+1}}.\end{array}$$

Autre preuve :

$$\begin{array}{rcll}\sum_{k=0}^{n}L_{2k} & = & L_0+\sum_{k=1}^{n}L_{2k}. & \\ & = & L_0+\sum_{k=1}^{n}(L_{2k-1}+L_{2k-2}) & \text{récurrence de } (L_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ & = & L_0+\sum_{k=0}^{2n-1}L_k & \text{on reconnaît la somme des indices pairs et impairs}\\ & = & L_0+L_{2n+1}-L_1 & \text{d'après la question7.d}\\ & = & 1+L_{2n+1} & \text{en remplaçant par les valeurs.}\end{array}$$

Calculons $\sum_{k=0}^{n}L_{2k+1}$:

$$\begin{array}{rcl}\sum_{k=0}^{n}L_{2k+1} & = & \sum_{k=0}^{n}(\phi^{2k+1}+\psi^{2k+1})\\ & = & \phi\sum_{k=0}^{n}\phi^{2k}+\psi\sum_{k=0}^{n}\psi^{2k}\end{array}$$

On reconnaît deux sommes de termes consécutifs de suites géométriques de raison différente de 1. D'où

$$\begin{array}{rcl}\sum_{k=0}^{n}L_{2k+1} & = & \phi\frac{1-\phi^{2n+2}}{1-\phi^2}+\psi\frac{1-\psi^{2n+2}}{1-\psi^2}\\ & = & \phi^{2n+2}-1+\psi^{2n+2}-1\\ & = & \underline{L_{2n+2}-2}\\ & = & \boxed{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n+2}+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n+2}-2.}\end{array}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} L_n^2 &= (\phi^n + \psi^n)^2 \\ &= \phi^{2n} + 2\phi^n\psi^n + \psi^{2n} \\ &= L_{2n} + 2(-1)^n \end{aligned}$$

D'où $\boxed{L_{2n} = L_n^2 - 2 \cdot (-1)^n}$.

De même,

$$\begin{aligned} L_nL_{n+1} &= (\phi^n + \psi^n)(\phi^{n+1} + \psi^{n+1}) \\ &= \phi^{2n+1} + (\phi\psi)^n\psi + (\psi\phi)^n\phi + \psi^{2n+1} \\ &= L_{2n+1} + (-1)^n(\phi + \psi) && \text{car } \phi\psi = -1 \\ &= L_{2n+1} + (-1)^n && \text{car } \phi + \psi = 1 \end{aligned}$$

D'où $\boxed{L_{2n+1} = L_nL_{n+1} - (-1)^n}$.

(c) (INFO) Écrire en python une fonction correspondant au pseudo-code suivant : Voici la fonction correspondante :

```
def liste_lucas(n) :
    if n==0 :
        return  [2]
    elif n==1 :
        retourner [2,1]
    else :
        L=[2,1]
        for  i in range(n) :
            if i%2==0 :
                S= L[i//2]**2-2 (-1)**(i//2)
            else :
                S=L[i//2]*L[(i//2)+1]-(-1)**(i//2)
            L.append(S)
        return L
```

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n L_k^2 &= \sum_{k=0}^n (L_{2k} + 2(-1)^k) && \text{(question 8c)} \\ &= \sum_{k=0}^n L_{2k} + 2\sum_{k=0}^n (-1)^k \\ &= L_{2n+1} + 1 + 1 - (-1)^{n+1} \\ &= L_{2n+1} + 2 + (-1)^{n+2} \\ &= \boxed{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n+1} + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n+1} + 2 + (-1)^{n+2}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n L_kL_{k+1} &= \sum_{k=0}^n (L_{2k+1} + (-1)^k) && \text{(question 8c)} \\ &= \sum_{k=0}^n L_{2k+1} + \sum_{k=0}^n (-1)^k \\ &= L_{2n+2} - 2 + \tfrac{1-(-1)^{n+1}}{2} \\ &= L_{2n+2} - \tfrac{3+(-1)^{n+1}}{2} \\ &= \boxed{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n+2} + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n+2} - \frac{3+(-1)^{n+1}}{2}} \end{aligned}$$

(e) (INFO) Voici la fonction `somme1` :

```
def somme1(n) :
    S=0
    for i in range(n+1) :
        for j in range(n+1) :
            S=S+Lucas(i)*Lucas(j)
    return S
```

(f) (INFO) Voici la fonction `somme2` :

```
def somme2(n) :
    S=0
    for i in range(n+1) :
        for j in range(i,n+1) :
            S=S+Lucas(i)*Lucas(j)
    return S
```

(g) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{0\leq i,j\leq n} L_iL_j &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n L_iL_j \\
&= (\sum_{i=0}^n L_i)(\sum_{j=0}^n L_j) \\
&= \underline{(L_{n+2}-1)^2} \\
&= \boxed{\left((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2} + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2} - 1 \right)^2}
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\sum_{0\leq i\leq j} L_iL_j &= \sum_{j=0}^n L_j \sum_{i=0}^j L_i \\
&= \sum_{j=0}^n L_j(L_{j+2}-1) \\
&= \sum_{j=0}^n L_j(L_j+L_{j+1}-1), \text{ en effet } L_j+L_{j+1}=L_{j+2} \\
&= \sum_{j=0}^n (L_j)^2 + \sum_{j=0}^n L_jL_{j+1} - \sum_{j=0}^n L_j \\
&= L_{2n+1}+2+(-1)^{n+2}+L_{2n+2}-\tfrac{3+(-1)^{n+1}}{2}-(L_{n+2}-1) \\
&= L_{2n+3}-L_{n+2}+\tfrac{3(-1)^{n+2}+5}{2} \\
&= \boxed{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n+3} + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n+3} - (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2} + \frac{3(-1)^{n+2}+5}{2}}
\end{aligned}$$