DS n° 4 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de documents est interdit.
Il est recommandé de lire l'ensemble de l'énoncé attentivement et patiemment.
Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en mentionnant les hypothèses que vous avez été amené à formuler.
Le soin de la présentation, la qualité de la rédaction, ainsi que la rigueur, la clarté et la concision des raisonnements constitueront un facteur important d'appréciation de la copie.

Problème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Ce problème propose de dénombrer l'ensemble $\mathscr{E}_n$ des parties de $[\![1,n]\!] = \{1,2,\dots,n\}$ ne contenant pas d'entiers consécutifs. Par exemple pour $n=3$, l'ensemble des parties de $[\![1,3]\!]$ est :

$$\mathscr{P}\Big([\![1,3]\!]\Big) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\Big\}$$

ce qui donne $\mathrm{card}(\mathscr{E}_3) = 5$ car les parties $\{1,2\}$, $\{2,3\}$ et $\{1,2,3\}$ contiennent des entiers consécutifs. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on notera $\mathscr{E}_{n,k}$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}_n$ des parties contenant exactement k entiers. Ainsi :

$$\mathscr{E}_{3,0} = \Big\{\emptyset\Big\}, \quad \mathscr{E}_{3,1} = \Big\{\{1\},\{2\},\{3\}\Big\}, \quad \mathscr{E}_{3,2} = \Big\{\{1,3\}\Big\} \quad \text{et} \quad \mathscr{E}_3 = \mathscr{E}_{3,0} \cup \mathscr{E}_{3,1} \cup \mathscr{E}_{3,2}.$$

Chaque partie de ce problème est indépendante des autres. Pour les questions d'informatique (parties B et D), on utilisera seulement le langage Python et on pourra faire appel aux fonctions des questions précédentes même si elles n'ont pas été écrites.

A) Préliminaires

1. Que valent $\mathrm{card}(\mathscr{E}_1)$ et $\mathrm{card}(\mathscr{E}_2)$?
2. (a) Déterminer $\mathscr{E}_{4,0}$, $\mathscr{E}_{4,1}$, $\mathscr{E}_{4,2}$, $\mathscr{E}_{4,3}$ et $\mathscr{E}_{4,4}$.
   (b) En déduire $\mathrm{card}(\mathscr{E}_4)$.
3. Que valent $\mathrm{card}(\mathscr{E}_{n,0})$, $\mathrm{card}(\mathscr{E}_{n,1})$ et $\mathrm{card}(\mathscr{E}_{n,n})$ lorsque $n \geqslant 2$?
4. Déterminer $\mathrm{card}(\mathscr{E}_{n,2})$ lorsque $n \geqslant 3$. Indication : distinguer plusieurs cas selon les valeurs possibles du plus petit entier de chaque partie appartenant à $\mathscr{E}_{n,2}$.

B) Modélisation informatique

En Python, on modélisera chaque partie de $[\![1,n]\!]$ par la liste de ses éléments. Par exemples, $\{6,3,1,5\}$ sera modélisée par la liste `[6,3,1,5]` et $\emptyset$ par la liste vide `[]`. On rappelle que l'opérateur `+` permet de concaténer des listes. Par exemple, `[2,7,1]+[4]` renvoie `[2,7,1,4]`.

5. (a) Écrire une fonction `chercher` qui prend en arguments une liste d'entiers `L` et un indice `i` compris entre `0` et `len(L)-1`, puis qui renvoie le plus petit indice du plus petit élément de `L` dont l'indice est compris entre `i` et `len(L)-1`. Par exemples, `chercher([3,6,1,5,2,7],3)` renvoie 4 et `chercher([1,2,1,4,1],2)` renvoie 2.
   (b) Écrire une fonction `trier` qui prend en argument une liste d'entiers `L` puis qui renvoie `L` après avoir trié ses éléments par ordre croissant. Par exemples, `trier([5,3,2,6,3])` renvoie `[2,3,3,5,6]`. Indication : commencer par échanger `L[0]` avec le plus petit élément de `L`, puis `L[1]` avec le plus petit élément dont l'indice est compris entre `1` et `len(L)-1`, puis `L[2]` avec le plus petit élément dont l'indice est compris entre `2` et `len(L)-1`, etc.
6. Écrire une fonction `tester` qui prend en argument une liste d'entiers `L`, puis qui renvoie `True` si `L` contient des entiers deux à deux différents et non consécutifs, et `False` sinon. Par exemples, `tester([8,2,5,2])` et `tester([4,2,1])` renvoient `False` alors que `tester([7,1,9,3])` renvoie `True`. Indication : commencer par trier les éléments de `L` par ordre croissant.

7. On considère la fonction ci-dessous.

```
def mystere(n):
    if n==1:
        return [[],[1]]
    else:
        Pold=mystere(n-1)
        Pnew=[]
        for i in range(len(Pold)):
            L=Pold[i]
            Pnew=Pnew+[L]
            L=L+[n]
            Pnew=Pnew+[L]
        return Pnew
```

(a) Que renvoie `mystere(1)` ?

(b) Montrer que `mystere(2)` renvoie `[[],[2],[1],[1,2]]`.

(c) Que renvoie `mystere(3)` ?

(d) À quoi sert la fonction `mystere` ?

(e) Que renvoie l'instruction `len(mystere(n))` en fonction de l'entier $n \in \mathbb{N}^*$?

(f) En vous inspirant de la fonction `mystere` et à l'aide de la fonction `tester`, écrire une fonction `modeliser` afin que l'instruction `len(modeliser(n))` renvoie la valeur de $\mathrm{card}(\mathscr{E}_n)$.

C) Une expression sommatoire

Dans cette partie, on considère une application Φ définie sur l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$ de la manière suivante : pour chaque partie $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset [\![1,n]\!]$ dont les éléments sont indicés par ordre croissant, c'est-à-dire $1 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_k \leqslant n$, on pose :

$$\Phi\Big(\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}\Big) = \{x_1 - 1, x_2 - 2, \ldots, x_k - k\} \quad (\text{et } \Phi(\emptyset) = \emptyset \text{ dans le cas où } k = 0).$$

Par exemples, $\Phi(\{6,3,1,5\}) = \{0,1,2\}$ et $\Phi(\{4,2,8,7,3\}) = \{1,3\}$.

8. Dans cette question, on fixe $k \in [\![0,n]\!]$ et on note $\mathscr{F}_{n,k}$ l'ensemble des parties de $[\![0,n-k]\!]$ contenant exactement k entiers.
   (a) Soit $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \mathscr{E}_{n,k}$ dont les éléments sont indicés par ordre croissant. Montrer que $\Phi(\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}) \in \mathscr{F}_{n,k}$. Indication : prouver que $0 \leqslant x_1 - 1 < x_2 - 2 < \cdots < x_k - k \leqslant n - k$ en commençant par montrer que $x_i - i < x_{i+1} - (i+1)$ pour chaque $i \in [\![1,k-1]\!]$.
   (b) Soit $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\} \in \mathscr{F}_{n,k}$ dont les éléments sont indicés par ordre croissant. Trouver une partie $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \mathscr{E}_{n,k}$ telle que $\Phi(\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}) = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$. Que peut-on en déduire pour l'application $\Phi : \mathscr{E}_{n,k} \to \mathscr{F}_{n,k}$?
   (c) Montrer que l'application $\Phi : \mathscr{E}_{n,k} \to \mathscr{F}_{n,k}$ est injective.
   (d) En déduire le cardinal de $\mathscr{E}_{n,k}$.
9. Démontrer que :
$$\mathrm{card}\Big(\mathscr{E}_n\Big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+1}{k}.$$

D) Calcul numérique

Dans cette partie, on suppose le résultat de la question 9.

10. Écrire une fonction `fact` qui prend en argument un entier $m \in \mathbb{N}$, puis qui renvoie la valeur de $m!$.
11. Écrire une fonction `coeffbi` qui prend en arguments deux entiers $j \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$, puis qui renvoie la valeur de $\binom{m}{j}$.
12. Écrire une fonction `cardE` qui prend en argument l'entier $n \in \mathbb{N}^*$, puis qui renvoie la valeur de $\mathrm{card}(\mathscr{E}_n)$.

E) Résolution explicite

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \mathrm{card}(\mathscr{E}_n)$ et on note $\mathscr{A}_n$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}_n$ des parties contenant l'entier n. Ainsi :

$$\mathscr{A}_3 = \Big\{\{3\}, \{1,3\}\Big\} \quad \text{et} \quad \overline{\mathscr{A}_3} = \mathscr{E}_3 \setminus \mathscr{A}_3 = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}\Big\}.$$

13. Dans cette question, on fixe $n \geqslant 3$.
    (a) Justifier que $\mathrm{card}(\mathscr{A}_n) = u_{n-2}$.
    (b) Déterminer une expression similaire pour le cardinal du complémentaire de $\mathscr{A}_n$ dans $\mathscr{E}_n$.
    (c) Montrer que $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.
14. En déduire le terme général de la suite $(\mathrm{card}(\mathscr{E}_n) = u_n)_{n \geqslant 1}$. Pour simplifier les calculs, on pourra poser la constante $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$.