DS n° 4 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de documents est interdit.
Il est recommandé de lire l'ensemble de l'énoncé attentivement et patiemment.
Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en mentionnant les hypothèses que vous avez été amené à formuler.
Le soin de la présentation, la qualité de la rédaction, ainsi que la rigueur, la clarté et la concision des raisonnements constitueront un facteur important d'appréciation de la copie.

Exercice 1

On note respectivement 0_2 et I_2 la matrice nulle et la matrice identité de l'ensemble $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Pour tout cet exercice, on fixe une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\delta = ad - bc < 0$. De plus, on pose $\tau = a + d$ et $P : x \mapsto x^2 - \tau x + \delta$.

1. Montrer que $P(M) = 0_2$.
2. Justifier l'existence de deux réels distincts λ et μ tels que $\lambda + \mu = \tau$ et $\lambda\mu = \delta$. Les expressions de λ et μ ne sont pas demandées.

Pour la suite de l'exercice, on pose $A = M - \lambda I_2$ et $B = M - \mu I_2$.

3. Montrer que $AB = 0_2$. Les matrices A et B sont-elles inversibles ?
4. Prouver que $A^n = (\mu - \lambda)^{n-1} A$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Déterminer une expression similaire pour les puissances de B.
5. Trouver deux réels α et β tels que $\alpha + \beta \neq 0$ et $M = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} A + \frac{\beta}{\alpha+\beta} B$. Donner une expression de $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ et $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ en fonction de λ et μ.
6. À l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que $\forall n \geqslant 1,\ M^n = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} A\right)^n + \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta} B\right)^n$.
7. Déduire des résultats précédents que M^n est de la forme $x_n M + y_n I_2$ pour tout entier $n \geqslant 1$, où x_n et y_n sont deux réels à exprimer en fonction de λ, μ et n.

Exercice 2

Pour tout couple d'entiers $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{p,q} = \int_0^1 x^p (1 - x)^q \mathrm{d}x$.

1. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que $I_{p,q} = I_{q,p}$ à l'aide du changement de variable $t = 1 - x$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $I_{n,0}$ et $I_{0,n}$.
3. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que $I_{p,q+1} = \frac{q+1}{p+1} I_{p+1,q}$.
4. Par récurrence, démontrer que la proposition suivante est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$:

$$\mathscr{P}(q) : «\forall p \in \mathbb{N},\ I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p + q + 1)!}».$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le but de cette question est de simplifier la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n + k + 1}$.
   (a) Montrer que $I_{n,n} = S_n$.
   (b) En déduire que $S_n = \dfrac{1}{\binom{2n}{n}(2n + 1)}$.

Exercice 3 (Informatique)

On utilisera seulement le langage Python et on pourra faire appel aux fonctions des questions précédentes sans avoir besoin de les réécrire. La question 3 peut être traitée sans avoir répondu aux questions 1 et 2.

1. On considère la fonction `mystere` ci-dessous.

```
def mystere(L,n):
    if n>len(L):
        return 'erreur'
    M=[]
    for i in range(n):
        M.append(L[n-1-i])
    for i in range(n,len(L)):
        M.append(L[i])
    return M
```

   (a) Que renvoie `mystere([5,7,1,8,3],6)` ?

   (b) Que renvoie `mystere([5,7,1,8,3],2)` ?

   (c) Que renvoie `mystere([5,7,1,8,3],4)` ?

   (d) On fixe une liste `L` quelconque pour cette question. Expliquer ce que renvoient `mystere(L,1)` et `mystere(L,len(L))`.

2. À l'aide de la fonction `mystere`, on cherche un algorithme permettant de trier les éléments d'une liste dans l'ordre croissant. Par exemple, on peut trier les éléments de la liste `L=[4,2,5,1,3]` en utilisant la suite d'instructions suivante.

```
L=mystere(L,3)
L=mystere(L,5)
L=mystere(L,3)
L=mystere(L,4)
L=mystere(L,2)
L=mystere(L,3)
```

   (a) Qu'affiche la commande `print(L)` après l'exécution de chacune des six lignes ci-contre ?

   (b) En vous inspirant de l'exemple ci-contre, déterminer une suite d'instructions permettant de trier les éléments de la liste `L=[3,2,4,1]`.

   (c) Même question pour la liste `L=[1,6,4,7,4,2]`.

3. Écrire une fonction `max` qui prend en argument une liste `L` et un entier `n` puis qui renvoie le plus petit indice du maximum des `n` premiers éléments de `L` (ou la chaîne de caractères `'erreur'` si `L` contient moins de `n` éléments). Par exemple, `max([3,5,2,5,9,2],4)` renvoie l'entier `1`.

4. À l'aide des fonctions `mystere` et `max` (et sans utiliser la méthode `.sort()`), écrire une fonction `trier` qui prend en argument une liste `L` puis qui renvoie la liste de ses éléments triés dans l'ordre croissant.

Exercice 4

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et une matrice colonne d'inconnues $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

1. Discuter du nombre de solutions du système $AX = \lambda X$ en fonction des valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre le système $AX = \lambda X$ pour $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ et $\lambda = 3$.

Exercice 5

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions x dérivable sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$x(t) > 0 \quad \text{et} \quad x'(t) + e^t f(t) x(t)^2 + x(t) = 0 \quad \text{où} \quad f(t) = \frac{t+1}{t^2+1}.$$

1. (a) Justifier que la fonction f admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'unique primitive qui s'annule en 0 qu'on notera F_0.

   (b) Montrer que F_0 admet un minimum et calculer sa valeur qu'on notera m.

2. Pour cette question, on fixe une fonction x solution du problème et on pose $y = 1/x$.

   (a) Montrer que y est solution d'une équation différentielle linéaire à déterminer.

   (b) Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question précédente. On pourra chercher une solution particulière de la forme $t \mapsto \lambda(t)e^t$ où λ est une fonction à déterminer.

3. En déduire que toutes les solutions du problème sont de la forme :

$$x : t \mapsto \frac{e^{-t}}{C + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \arctan(t)}$$

   où C est une constante telle que $C > -m$.