Corrigé du DS n° 4 de mathématiques

Exercice 1

On considère l'application suivante :

$f : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (4x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 2x_4, -x_1 + x_2 - x_3 + x_4, -x_1 + x_2 - x_3 + x_4, 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4)$.

Déterminer toutes les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'application $f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ n'est pas bijective.

► L'application $f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ est bijective si et seulement si l'équation

$$(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

d'inconnue $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ admet une unique solution pour tout $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$. Or on a :

$$\begin{aligned}
& (f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3, y_4) \\
\iff & f(x_1, x_2, x_3, x_4) - \lambda(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3, y_4) \\
\iff & (4x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 2x_4, -x_1 + x_2 - x_3 + x_4, -x_1 + x_2 - x_3 + x_4, 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4) \\
& \qquad - (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4) = (y_1, y_2, y_3, y_4) \\
\iff & \left\{ \begin{array}{r} 4x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 - \lambda x_1 = y_1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - \lambda x_2 = y_2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - \lambda x_3 = y_3 \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 - \lambda x_4 = y_4 \end{array} \right. \\
\iff & \left\{ \begin{array}{rrrrl} (4-\lambda)x_1 & -4x_2 & +6x_3 & -2x_4 & = y_1 \\ -x_1 & +(1-\lambda)x_2 & -x_3 & +x_4 & = y_2 \\ -x_1 & +x_2 & +(-1-\lambda)x_3 & +x_4 & = y_3 \\ 3x_1 & -3x_2 & +5x_3 & +(-1-\lambda)x_4 & = y_4 \end{array} \right. \\
\iff & \underbrace{\begin{pmatrix} (4-\lambda) & -4 & 6 & -2 \\ -1 & (1-\lambda) & -1 & 1 \\ -1 & 1 & (-1-\lambda) & 1 \\ 3 & -3 & 5 & (-1-\lambda) \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}}_{Y} \iff AX = Y.
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'application $f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ est bijective si et seulement si la matrice A est inversible. Il suffit donc de calculer le rang de A à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

Pour résoudre un système linéaire, pensez à utiliser son équivalent matriciel pour gagner du temps. De plus, il est inutile ici de résoudre le système puisqu'on s'intéresse seulement au nombre de solutions. Le calcul du rang est donc suffisant et on peut oublier les seconds membres.

$$A = \begin{pmatrix} (4-\lambda) & -4 & 6 & -2 \\ -1 & (1-\lambda) & -1 & 1 \\ -1 & 1 & (-1-\lambda) & 1 \\ 3 & -3 & 5 & (-1-\lambda) \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & (1-\lambda) & -1 & 1 \\ (4-\lambda) & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 1 & (-1-\lambda) & 1 \\ 3 & -3 & 5 & (-1-\lambda) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + (4-\lambda)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & (1-\lambda) & -1 & 1 \\ 0 & \star & (2+\lambda) & (2-\lambda) \\ 0 & \lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & -3\lambda & 2 & (2-\lambda) \end{pmatrix}$$

où $\quad \star = -4 + (4-\lambda)(1-\lambda) = -4 + 4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 = \lambda(\lambda - 5)$

1^er^ cas : $\lambda = 0$. Alors la matrice A est équivalente à

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\mathrm{rang}(A) = 2$ n'est pas maximal. On en déduit que A n'est pas inversible et donc que l'application $f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ n'est pas bijective.

2^e^ cas : $\lambda \neq 0$. Alors la matrice A est équivalente à

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & (1-\lambda) & -1 & 1 \\ 0 & \lambda(\lambda-5) & (2+\lambda) & (2-\lambda) \\ 0 & \lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & -3\lambda & 2 & (2-\lambda) \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftrightarrow \frac{1}{\lambda}L_3 \quad \text{car } \lambda \neq 0 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & (1-\lambda) & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-5) & (2+\lambda) & (2-\lambda) \\ 0 & -3\lambda & 2 & (2-\lambda) \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - \lambda(\lambda-5)L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3\lambda L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & (1-\lambda) & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \star & (2-\lambda) \\ 0 & 0 & (2-3\lambda) & (2-\lambda) \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \\ \\ \end{matrix}$$

où $\star = (2+\lambda) + \lambda(\lambda-5) = 2 + \lambda + \lambda^2 - 5\lambda = \lambda^2 - 4\lambda + 2$

N'hésitez pas à utiliser des opérations intermédaires sur les lignes dans la méthode du pivot de Gauss pour simplifier vos calculs. Ici, on remarque que $L_3 - L_4$ permet de simplifier la troisième ligne.

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & (1-\lambda) & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda^2-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & (2-3\lambda) & (2-\lambda) \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{\lambda}L_3 \quad \text{car } \lambda \neq 0 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & (1-\lambda) & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & (2-3\lambda) & (2-\lambda) \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_3 \end{matrix}$$

Même commentaire ici. L'opération $L_4 + 3L_3$ n'est pas dans l'algorithme de la méthode du pivot de Gauss mais elle permet de gagner du temps ensuite car on remarque qu'elle fait apparaître un pivot qui ne dépend pas du paramètre λ.

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & (1-\lambda) & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & -1 & (2-\lambda) \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftrightarrow L_4 \\ L_4 \leftrightarrow L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & (1-\lambda) & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & (2-\lambda) \\ 0 & 0 & (\lambda-1) & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftrightarrow L_4 + (\lambda-1)L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & (1-\lambda) & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & (2-\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{(\lambda-1)(2-\lambda)} \end{pmatrix}$$

<u>1^er sous-cas</u> : $(\lambda-1)(2-\lambda)=0 \iff (\lambda=1 \text{ ou } \lambda=2)$. Alors $\mathrm{rang}(A)=3$ n'est pas maximal. On en déduit que A n'est pas inversible et donc que l'application $f-\lambda\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ n'est pas bijective.
<u>2^e sous-cas</u> : $(\lambda-1)(2-\lambda)\neq 0 \iff (\lambda\neq 1 \text{ et } \lambda\neq 2)$. Alors $\mathrm{rang}(A)=4$ est maximal. On en déduit que A est inversible et donc que l'application $f-\lambda\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ est bijective.
<u>Conclusion</u>. L'application $f-\lambda\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4}:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ n'est pas bijective si et seulement si $\boxed{\lambda\in\{0,1,2\}}$.

Problème 1

Dans tout ce problème, on fixe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et on désigne par P la fonction polynomiale $P:x\mapsto ax^2+bx+c$. Le premier but de ce problème est de déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+P(x). \qquad (\mathrm{E}^+)$$

1. *Dans cette question, on suppose l'existence d'une fonction continue f solution de (E^+).*
   (a) *Calculer $f(0)$.*
   ▶ On a :
   $$f(0)=\int_0^0 f(t)\mathrm{d}t+P(0)=0+a0^2+b0+c=\boxed{c}.$$

   (b) *Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$ en fonction de f, a, b, c et $x\in\mathbb{R}$.*
   ▶ Puisque la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, f admet des primitives sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème fondamental de l'analyse. Par définition, $F:x\mapsto\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'=f$. D'autre part, P est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale. On en déduit que $\boxed{f=F+P \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, on a :
   $$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=F'(x)+P'(x)=\boxed{f(x)+2ax+b}.$$

   (c) *En déduire la fonction f.*
   ▶ D'après le résultat de la question précédente, on a :
   $$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)-f(x)=2ax+b.$$
   On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. L'équation différentielle linéaire homogène associée est :
   $$\forall x\in\mathbb{R},\quad y'(x)-y(x)=0.$$
   Ses solutions sont de la forme :
   $$y_{\mathrm{H}}:x\mapsto\lambda\exp(-(-1)x)=\lambda e^x \quad \text{où } \lambda\in\mathbb{R} \text{ est une constante.}$$
   Puis on cherche une solution particulière de l'équation différentielle :
   $$\forall x\in\mathbb{R},\quad y'(x)-y(x)=2ax+b.$$
   <u>Analyse</u>. On cherche une solution particulière de la forme $y_{\mathrm{P}}:x\mapsto\alpha x+\beta$ où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Alors :
   $$\forall x\in\mathbb{R},\quad 2ax+b=y_{\mathrm{P}}'(x)-y_{\mathrm{P}}(x)=\alpha-(\alpha x+\beta)=-\alpha x+(\alpha-\beta).$$

Par identification des coefficients de polynômes, on obtient :

$$\begin{cases} 2a = -\alpha \\ b = \alpha - \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -2a \\ \beta = \alpha - b = -2a - b \end{cases}$$

Synthèse. On pose $y_{\mathrm{P}} : x \mapsto -2ax - 2a - b$. D'après les calculs faits dans l'analyse, y_{P} est bien une solution particulière de l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) - y(x) = 2ax + b.$$

D'après le principe de superposition, on en déduit que toutes les solutions de cette équation sont de la forme :

$$y : x \mapsto y(x) = y_{\mathrm{H}}(x) + y_{\mathrm{P}}(x) = \lambda e^x - 2ax - 2a - b \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ est une constante.}$$

D'après le résultat de la question précédente, on en déduit qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que :

$$f : x \mapsto \lambda e^x - 2ax - 2a - b.$$

Or on a d'après le résultat de la question 1(a) :

$$c = f(0) = \lambda e^0 - 2a0 - 2a - b = \lambda - 2a - b \iff \lambda = 2a + b + c.$$

Finalement, on a :

$$\boxed{f : x \mapsto (2a + b + c)e^x - 2ax - 2a - b}.$$

2. *Déterminer l'ensemble des fonctions continues solutions de* (E^+).

▶ D'après le résultat de la question précédente, on a montré que si une fonction f continue est solution de (E^+) alors f est égale à la fonction $x \mapsto (2a+b+c)e^x - 2ax - 2a - b$. Autrement dit, on a montré que l'ensemble des fonctions continues solutions de (E^+) est inclus dans l'ensemble $\{x \mapsto (2a+b+c)e^x - 2ax - 2a - b\}$. Réciproquement, si on pose $f : x \mapsto (2a+b+c)e^x - 2ax - 2a - b$ alors on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + P(x) \\
=&\int_0^x \Big((2a+b+c)e^t - 2at - 2a - b\Big)\mathrm{d}t + ax^2 + bx + c \\
=&\Big[(2a+b+c)e^t - 2a\tfrac{t^2}{2} - 2at - bt\Big]_0^x + ax^2 + bx + c \quad \text{par linéarité} \\
=&\Big((2a+b+c)e^x - ax^2 - 2ax - bx\Big) - \Big((2a+b+c)1 - 0 - 0 - 0\Big) + ax^2 + bx + c \\
=&(2a+b+c)e^x - 2ax - 2a - b = f(x).
\end{aligned}$$

Donc f est bien solution de (E^+). De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Par double inclusion, on en déduit que l'ensemble des fonctions continues solutions de (E^+) est égal au singleton :

$$\boxed{\Big\{x \mapsto (2a+b+c)e^x - 2ax - 2a - b\Big\}}.$$

Rédigez précisément votre réponse pour montrer que vous avez compris le raisonnement par double inclusion.

Le deuxième but de problème est de déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t + P(x). \tag{E^-}$$

3. *Dans cette question, on suppose l'existence d'une fonction continue f solution de (E^-).*

(a) *Calculer $f(0)$.*

▶ On a :

$$f(0) = \int_0^{-0} f(t)\mathrm{d}t + P(0) = 0 + a0^2 + b0 + c = \boxed{c}.$$

(b) *Justifier l'existence d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f(x)$ en fonction de F, P et $x \in \mathbb{R}$.*

▶ Puisque la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, $\boxed{f \text{ admet des primitives sur } \mathbb{R}}$ d'après le théorème fondamental de l'analyse. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Alors, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t + P(x) = \Big[F(t)\Big]_0^{-x} + P(x) = \boxed{F(-x) - F(0) + P(x)}.$$

(c) *Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$ en fonction de f, a, b, c et $x \in \mathbb{R}$.*

▶ Par définition des primitives, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$. Donc la fonction $x \mapsto F(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut $x \mapsto -F'(-x) = -f(-x)$. D'autre part, $-F(0)$ et P sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme fonctions constante et polynomiale. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -F'(-x) - 0 + P'(x) = \boxed{-f(-x) + 2ax + b}.$$

(d) *Calculer $f'(0)$.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$f'(0) = -f(0) + 2a0 + b = \boxed{-c + b}$$

car $f(0) = c$ d'après le résultat de la question 3(a).

(e) *Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f''(x)$ en fonction de f', a, b, c et $x \in \mathbb{R}$.*

▶ Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après le résultat de la question 3(c), la fonction $x \mapsto -f(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut $x \mapsto -(-f'(-x)) = f'(-x)$. D'autre part, $x \mapsto 2ax + b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale. D'après le résultat de la question 3(c), on en déduit que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc que $\boxed{f \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}}$. De plus, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = -(-f'(-x)) + 2a = \boxed{f'(-x) + 2a}.$$

(f) *Montrer que $f''(x) + f(x) = 2a(1 - x) + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

▶ On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f''(x) + f(x) &= f'(-x) + 2a + f(x) \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= -f(-(-x)) + 2a(-x) + b + 2a + f(x) \quad \text{d'après le résultat de la question 3(c)} \\
&= -f(x) - 2ax + b + 2a + f(x) \\
&= \boxed{2a(1 - x) + b}.
\end{aligned}$$

(g) En déduire la fonction f.

▶ Au résultat de la question précédente, on reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. L'équation différentielle linéaire homogène associée est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x) = 0.$$

L'équation caractéristique associée est $r^2 + 1 = 0 \iff r^2 = -1$ d'inconnue $r \in \mathbb{C}$. Elle admet deux solutions complexes conjuguées : $i = 0 + 1i$ et $-i = 0 - 1i$. On en déduit que les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène associée sont de la forme :

$$y_{\mathrm{H}} : x \mapsto e^{0x}\Big(A\cos(1x)+B\sin(1x)\Big) = A\cos(x)+B\sin(x) \quad \text{où } (A,B) \in \mathbb{R}^2 \text{ sont deux constantes.}$$

Puis on cherche une solution particulière de l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x) = 2a(1-x) + b = -2ax + (2a+b).$$

Analyse. On cherche une solution particulière de la forme $y_{\mathrm{P}} : x \mapsto \alpha x + \beta$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -2ax + (2a+b) = y_{\mathrm{P}}''(x) + y_{\mathrm{P}}(x) = 0 + \alpha x + \beta.$$

Par identification des coefficients de polynômes, on obtient :

$$\begin{cases} -2a = \alpha \\ 2a + b = \beta \end{cases}$$

Synthèse. On pose $y_{\mathrm{P}} : x \mapsto -2ax + 2a + b$. D'après les calculs faits dans l'analyse, y_{P} est bien une solution particulière de l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x) = 2a(1-x) + b = -2ax + (2a+b).$$

D'après le principe de superposition, on en déduit que toutes les solutions de cette équation sont de la forme :

$$y : x \mapsto y(x) = y_{\mathrm{H}}(x) + y_{\mathrm{P}}(x) = A\cos(x) + B\sin(x) - 2ax + 2a + b$$

où $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ sont deux constantes. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit qu'il existe deux constantes $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$f : x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) - 2ax + 2a + b.$$

Or on a d'après les résultats des questions 3(a) et 3(d) :

$$\begin{cases} c = f(0) = A\cos(0) + B\sin(0) - 2a0 + 2a + b = A + 2a + b \\ -c + b = f'(0) = -A\sin(0) + B\cos(0) - 2a = B - 2a \end{cases} \iff \begin{cases} A = -2a - b + c \\ B = 2a + b - c \end{cases}$$

Finalement, on a :

$$\boxed{f : x \mapsto (-2a - b + c)\cos(x) + (2a + b - c)\sin(x) - 2ax + 2a + b}.$$

4. Déterminer l'ensemble des fonctions continues solutions de (E^-).

▶ Dans la question précédente, on a montré que l'ensemble des fonctions continues solutions de (E^-) est inclus dans l'ensemble $\{x \mapsto (-2a - b + c)\cos(x) + (2a + b - c)\sin(x) - 2ax + 2a + b\}$.

Réciproquement, si on pose $f : x \mapsto (-2a-b+c)\cos(x)+(2a+b-c)\sin(x)-2ax+2a+b$ alors on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t + P(x)\\
=&\int_0^{-x}\Big((-2a-b+c)\cos(t)+(2a+b-c)\sin(t)-2at+2a+b\Big)\mathrm{d}t+ax^2+bx+c\\
=&\Big[(-2a-b+c)\sin(t)-(2a+b-c)\cos(t)-2a\tfrac{t^2}{2}+2at+bt\Big]_0^{-x}+ax^2+bx+c \quad \text{par linéarité}\\
=&\Big((-2a-b+c)\sin(-x)-(2a+b-c)\cos(-x)-ax^2-2ax-bx\Big)\\
&\qquad\qquad -\Big((-2a-b+c)0-(2a+b-c)1-0+0+0\Big)+ax^2+bx+c\\
=&(-2a-b+c)\cos(x)-(-2a-b+c)\sin(x)-2ax+2a+b=f(x).
\end{aligned}$$

Donc f est bien solution de (E^-). De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Par double inclusion, on en déduit que l'ensemble des fonctions continues solutions de (E^-) est égal au singleton :

$$\boxed{\Big\{x :\mapsto (-2a-b+c)\cos(x)+(2a+b-c)\sin(x)-2ax+2a+b\Big\}}.$$

Exercice 2

Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$I_1=\int_0^1 3^s\cos(2\pi s)\mathrm{d}s,\quad I_2=\int_1^5\frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+7}\quad \textit{et}\quad I_3=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos(\theta)+1}\quad \textit{en posant } t=\tan(\theta/2).$$

► Pour I_1, on utilise une intégration par parties en posant pour tout $s \in [0,1]$:

$$\begin{cases} u(s)=3^s\\ v'(s)=\cos(2\pi s)\end{cases}\quad \text{donc}\quad \begin{cases} u'(s)=\ln(3)3^s\\ v(s)=\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi s)\end{cases}.$$

Puisque u, v sont dérivables sur $[0,1]$ et u', v' sont continues sur $[0,1]$, on a d'après le théorème d'intégration par parties :

N'oubliez pas de vérifier les hypothèses de chaque théorème que vous utilisez.

$$\begin{aligned}
I_1&=\int_0^1 3^s\cos(2\pi s)\mathrm{d}s=\int_0^1 u(s)v'(s)\mathrm{d}s=\Big[u(s)v(s)\Big]_0^1-\int_0^1 u'(s)v(s)\mathrm{d}s\\
&=\Big[3^s\tfrac{1}{2\pi}\sin(2\pi s)\Big]_0^1-\int_0^1\ln(3)3^s\tfrac{1}{2\pi}\sin(2\pi s)\mathrm{d}s\\
&=0-0-\frac{\ln(3)}{2\pi}\int_0^1 3^s\sin(2\pi s)\mathrm{d}s \quad \text{par linéarité.}
\end{aligned}$$

On utilise une nouvelle intégration par parties en posant pour tout $s \in [0,1]$:

$$\begin{cases} u(s)=3^s\\ w'(s)=\sin(2\pi s)\end{cases}\quad \text{donc}\quad \begin{cases} u'(s)=\ln(3)3^s\\ w(s)=-\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi s)\end{cases}.$$

Puisque u, w sont dérivables sur $[0,1]$ et u', w' sont continues sur $[0,1]$, on a d'après le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\frac{\ln(3)}{2\pi}\int_0^1 3^s \sin(2\pi s)\mathrm{d}s \\
&= -\frac{\ln(3)}{2\pi}\left(\Big[-3^s\tfrac{1}{2\pi}\cos(2\pi s)\Big]_0^1 - \int_0^1 -\ln(3)3^s\tfrac{1}{2\pi}\cos(2\pi s)\mathrm{d}s\right) \\
&= -\frac{\ln(3)}{2\pi}\left(-\frac{3}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}+\frac{\ln(3)}{2\pi}\int_0^1 3^s\cos(2\pi s)\mathrm{d}s\right) \quad \text{par linéarité} \\
&= \frac{\ln(3)}{2\pi^2}-\frac{\ln(3)^2}{4\pi^2}I_1.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\left(1+\frac{\ln(3)^2}{4\pi^2}\right)I_1 = \frac{\ln(3)}{2\pi^2} \quad \text{donc} \quad I_1 = \frac{\ln(3)}{2\pi^2}\times\frac{4\pi^2}{4\pi^2+\ln(3)^2} = \boxed{\frac{2\ln(3)}{4\pi^2+\ln(3)^2}}.$$

On a :

$$I_2 = \int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+7} = \int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-4x+4)+3} = \int_1^5\frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2+3} = \int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{3\left(\frac{(x-2)^2}{3}+1\right)} = \frac{1}{3}\int_1^5\frac{\mathrm{d}x}{(\frac{x-2}{\sqrt{3}})^2+1}.$$

On pose le changement de variable $t=\frac{x-2}{\sqrt{3}} \iff x = t\sqrt{3}+2=\varphi(t)$. On a :

$$x=1 \iff t=\frac{1-2}{\sqrt{3}}=\frac{-1}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad x=5 \iff t=\frac{5-2}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

La fonction $\varphi : t \mapsto t\sqrt{3}+2$ est dérivable sur $[-1/\sqrt{3},\sqrt{3}]$ comme fonction affine et $\varphi' : t\mapsto \sqrt{3}$ est continue sur $[-1/\sqrt{3},\sqrt{3}]$ comme fonction constante. De plus :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}=\varphi'(t)=\sqrt{3} \quad \text{donc} \quad \mathrm{d}x=\sqrt{3}\mathrm{d}t.$$

On a donc d'après le théorème de changement de variable :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{3}\int_{-1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\Big[\arctan(t)\Big]_{-1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\arctan\left(\sqrt{3}\right)-\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \boxed{\frac{\pi\sqrt{3}}{6}}.
\end{aligned}$$

On pose le changement de variable $t=\tan(\theta/2) \iff \theta = 2\arctan(t)=\psi(t)$. On a :

$$\theta=0 \iff t=\tan(0)=0 \quad \text{et} \quad \theta=\frac{\pi}{2} \iff t=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

La fonction $\psi : t\mapsto 2\arctan(t)$ est dérivable sur $[0,1]$ comme fonction usuelle et $\psi' : t\mapsto \frac{2}{1+t^2}$ est continue sur $[0,1]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t}=\psi'(t)=\frac{2}{1+t^2} \quad \text{donc} \quad \mathrm{d}\theta=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$\text{et} \quad \cos(\theta)+1=\cos\left(2\tfrac{\theta}{2}\right)+1=2\cos^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right)-1+1=\frac{2}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{2}{1+t^2}$$

d'après les formules de trigonométrie. On a donc d'après le théorème de changement de variable :

$$I_3=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos(\theta)+1}=\int_0^1\frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\frac{2}{1+t^2}}=\int_0^1\mathrm{d}t=\Big[t\Big]_0^1=1-0=\boxed{1}.$$

Problème 2

On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ admet une «décomposition LU» lorsqu'il est possible de l'écrire sous la forme $A = LU$ où :

- *$L \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire inférieure ("Lower" en anglais) dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1, c'est-à-dire de la forme :*

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_1 & 1 & 0 \\ \ell_2 & \ell_3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } (\ell_1, \ell_2, \ell_3) \in \mathbb{R}^3$$

- *$U \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire supérieure ("Upper" en anglais), c'est-à-dire de la forme :*

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & u_6 \end{pmatrix} \quad \text{avec } (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \in \mathbb{R}^6.$$

1. *Calculer le produit LU en fonction des coefficients $\ell_1, \ell_2, \ell_3, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$.*

   ▶ On a :

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_1 & 1 & 0 \\ \ell_2 & \ell_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & u_6 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \ell_1 u_1 & \ell_1 u_2 + u_4 & \ell_1 u_3 + u_5 \\ \ell_2 u_1 & \ell_2 u_2 + \ell_3 u_4 & \ell_2 u_3 + \ell_3 u_5 + u_6 \end{pmatrix}}.$$

2. *La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ admet-elle une décomposition LU ? Justifier votre réponse.*

   ▶ Si la matrice A admet une décomposition LU alors il existe des coefficients $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) \in \mathbb{R}^3$ et $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \in \mathbb{R}^6$ tels que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} = A = LU = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \ell_1 u_1 & \ell_1 u_2 + u_4 & \ell_1 u_3 + u_5 \\ \ell_2 u_1 & \ell_2 u_2 + \ell_3 u_4 & \ell_2 u_3 + \ell_3 u_5 + u_6 \end{pmatrix}$$

   d'après le résultat de la question précédente. Par identification des coefficients de matrices, on en déduit que :

$$\left\{ \begin{aligned} u_1 &= 1 \ (L_1) \\ u_2 &= 2 \ (L_2) \\ u_3 &= 3 \ (L_3) \\ \ell_1 u_1 &= 0 \ (L_4) \\ \ell_1 u_2 + u_4 &= 0 \ (L_5) \\ \ell_1 u_3 + u_5 &= 4 \ (L_6) \\ \ell_2 u_1 &= 7 \ (L_7) \\ \ell_2 u_2 + \ell_3 u_4 &= 6 \ (L_8) \\ \ell_2 u_3 + \ell_3 u_5 + u_6 &= 5 \ (L_9) \end{aligned} \right.$$

   Attention ! Il ne s'agit pas d'un système linéaire !!

   On a $u_1 = 1$ d'après (L_1). On en déduit que $\ell_1 = 0$ d'après (L_4) puis que $u_4 = 0$ d'après (L_5). Par conséquent, $\ell_2 u_2 = 6$ d'après (L_8). Or $\ell_2 = 7$ d'après (L_7) et $u_2 = 2$ d'après (L_2) donc $\ell_2 u_2 = 14 \neq 6$. On obtient une absurdité. Donc $\boxed{A \text{ n'admet pas de décomposition LU}}$.

3. *Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 13 \end{pmatrix}$ admet au moins deux décompositions LU différentes.*

▶ Analyse. On cherche $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) \in \mathbb{R}^3$ et $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \in \mathbb{R}^6$ tels que $A = LU$. En raisonnant comme à la question précédente, on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rl} u_1 = 1 & (L_1) \\ u_2 = 2 & (L_2) \\ u_3 = 3 & (L_3) \\ \ell_1 u_1 = 3 & (L_4) \\ \ell_1 u_2 + u_4 = 6 & (L_5) \\ \ell_1 u_3 + u_5 = 9 & (L_6) \\ \ell_2 u_1 = 4 & (L_7) \\ \ell_2 u_2 + \ell_3 u_4 = 8 & (L_8) \\ \ell_2 u_3 + \ell_3 u_5 + u_6 = 13 & (L_9) \end{array}\right.$$

Attention ! Il ne s'agit toujours pas d'un système linéaire ! !

On a $(u_1, u_2, u_3) = (1, 2, 3)$ d'après les trois premières lignes. En reportant dans les autres lignes, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rl} \ell_1 = 3 & (L_4) \\ 2\ell_1 + u_4 = 6 & (L_5) \\ 3\ell_1 + u_5 = 9 & (L_6) \\ \ell_2 = 4 & (L_7) \\ 2\ell_2 + \ell_3 u_4 = 8 & (L_8) \\ 3\ell_2 + \ell_3 u_5 + u_6 = 13 & (L_9) \end{array}\right.$$

Donc $(\ell_1, \ell_2) = (3, 4)$ d'après les lignes (L_4) et (L_7). En reportant dans les autres lignes, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rl} 6 + u_4 = 6 & (L_5) \\ 9 + u_5 = 9 & (L_6) \\ 8 + \ell_3 u_4 = 8 & (L_8) \\ 12 + \ell_3 u_5 + u_6 = 13 & (L_9) \end{array}\right.$$

On déduit des lignes (L_5) et (L_6) que $(u_4, u_5) = (0, 0)$. En reportant dans les deux dernières lignes, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rl} 8 = 8 & (L_8) \\ 12 + u_6 = 13 & (L_9) \end{array}\right.$$

Donc $u_6 = 1$. Puisque (L_8) est compatible, on peut choisir n'importe quel coefficient ℓ_3.
Synthèse. D'après les calculs faits en analyse, on a par exemple :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 42 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

4. *Dans cette question, on considère l'exemple* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) *Montrer que A est inversible et calculer son inverse.*

▶ Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. À l'aide de la méthode du pivot de Gauss, on résout le système linéaire $AX = Y$ d'inconnues $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$AX = Y \iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 - 2y_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 - 2y_1 \\ y_3 + y_2 - 3y_1 \end{pmatrix}.$$

On obtient un système linéaire échelonné de rang maximal donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$.

$$AX = Y \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_1 \\ -x_2 + x_3 = y_2 - 2y_1 \\ -x_3 = y_3 + y_2 - 3y_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = y_1 - 2x_2 - 3x_3 = -18y_1 + 7y_2 + 5y_3 \\ x_2 = 2y_1 - y_2 + x_3 = 5y_1 - 2y_2 - y_3 \\ x_3 = 3y_1 - y_2 - y_3 \end{cases}$$

$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{Y}.$$

Par conséquent, $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$.

(b) En déterminant les matrices L et U, montrer que A admet une unique décomposition LU.

▶ Analyse. On cherche $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) \in \mathbb{R}^3$ et $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \in \mathbb{R}^6$ tels que $A = LU$. En raisonnant comme aux questions 2 et 3, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \ (L_1) \\ u_2 = 2 \ (L_2) \\ u_3 = 3 \ (L_3) \\ \ell_1 u_1 = 2 \ (L_4) \\ \ell_1 u_2 + u_4 = 3 \ (L_5) \\ \ell_1 u_3 + u_5 = 7 \ (L_6) \\ \ell_2 u_1 = 1 \ (L_7) \\ \ell_2 u_2 + \ell_3 u_4 = 3 \ (L_8) \\ \ell_2 u_3 + \ell_3 u_5 + u_6 = 1 \ (L_9) \end{cases}$$

Attention ! Il ne s'agit toujours pas d'un système linéaire !!

On a $(u_1, u_2, u_3) = (1, 2, 3)$ d'après les trois premières lignes. En reportant dans les autres lignes, on obtient :

$$\begin{cases} \ell_1 = 2 \ (L_4) \\ 2\ell_1 + u_4 = 3 \ (L_5) \\ 3\ell_1 + u_5 = 7 \ (L_6) \\ \ell_2 = 1 \ (L_7) \\ 2\ell_2 + \ell_3 u_4 = 3 \ (L_8) \\ 3\ell_2 + \ell_3 u_5 + u_6 = 1 \ (L_9) \end{cases}$$

Donc $(\ell_1, \ell_2) = (2, 1)$ d'après les lignes (L_4) et (L_7). En reportant dans les autres lignes, on obtient :

$$\begin{cases} 4 + u_4 = 3 \ (L_5) \\ 6 + u_5 = 7 \ (L_6) \\ 2 + \ell_3 u_4 = 3 \ (L_8) \\ 3 + \ell_3 u_5 + u_6 = 1 \ (L_9) \end{cases}$$

On déduit des lignes (L_5) et (L_6) que $(u_4, u_5) = (-1, 1)$. En reportant dans les deux dernières lignes, on obtient :

$$\begin{cases} 2 - \ell_3 = 3 & (L_8) \\ 3 + \ell_3 + u_6 = 1 & (L_9) \end{cases}$$

Donc $\ell_3 = -1$ d'après (L_8) puis $u_6 = -1$ d'après (L_9).

Synthèse. D'après les calculs faits en analyse, on trouve une unique décomposition LU :

$$\boxed{A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=U}}.$$

(c) *Inverser L et U puis retrouver A^{-1} à l'aide de L^{-1} et U^{-1}.*

▶ On raisonne comme à la question 4(a).

$$\begin{aligned} LX = Y &\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 - 2y_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix} \; L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ &\iff \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}}_{=\mathrm{I}_3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 - 2y_1 \\ y_3 + y_2 - 3y_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On obtient un système linéaire échelonné de rang maximal donc L est inversible et :

$$LX = Y \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 - 2y_1 \\ y_3 + y_2 - 3y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, $\boxed{L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$. De même :

$$UX = Y \iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

On obtient un système linéaire échelonné de rang maximal donc U est inversible et :

$$\begin{aligned} UX = Y &\iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_1 \\ -x_2 + x_3 = y_2 \\ -x_3 = y_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 = y_1 - 2x_2 - 3x_3 = y_1 + 2y_2 + 5y_3 \\ x_2 = -y_2 + x_3 = -y_2 - y_3 \\ x_3 = -y_3 \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$.

Les calculs d'inversion sont beaucoup plus simples avec des matrices triangulaires. C'est tout l'intérêt de la décomposition LU.

On en déduit que :

$$A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

Dans les questions suivantes, on revient au cas général $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

5. *Dans cette question, on suppose que A admet une décomposition LU.*

   (a) *Justifier que L est inversible.*

   ▶ Il suffit de calculer le rang de L à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ \ell_1 & 1 & 0 \\ \ell_2 & \ell_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - \ell_1 L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \ell_2 L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & \ell_3 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - \ell_3 L_2$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

   Ainsi $\text{rang}(L) = 3$ est maximal donc $\boxed{L \text{ est inversible}}$.

   On peut aller un peu plus vite en inversant les colonnes. Par contre, il est inutile de calculer L^{-1}, ce n'est pas demandé !

   (b) *En déduire que A est inversible si et seulement si $u_1u_4u_6 \neq 0$.*

   ▶ On raisonne par double implication.
   Sens direct. On suppose que A est inversible. Puisque $A = LU$ et que L est inversible d'après le résultat de la question précédente, on a :

$$L^{-1}A = L^{-1}LU = \text{I}_3 U = U \quad \text{par associativité.}$$

   On en déduit que $U = L^{-1}A$ est inversible comme produit de matrices inversibles. Ainsi $\text{rang}(U) = 3$ est maximal. Or U est une matrice échelonnée car :

$$U = \begin{pmatrix} \boxed{u_1} & u_2 & u_3 \\ 0 & \boxed{u_4} & u_5 \\ 0 & 0 & \boxed{u_6} \end{pmatrix}.$$

   Puisque les pivots u_1, u_4 et u_6 sont non nuls, on en déduit que $u_1u_4u_6 \neq 0$.
   Sens réciproque. On suppose que $u_1u_4u_6 \neq 0$. On en déduit que U est une matrice échelonnée de rang maximal. Donc U est inversible. Par conséquent, $A = LU$ est inversible comme produit de matrices inversibles.
   Conclusion. On a bien montré que $\boxed{A \text{ est inversible si et seulement si } u_1u_4u_6 \neq 0}$.

6. *Dans cette question, on suppose que $a \neq 0$ et que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ est inversible.*

(a) *Montrer que A admet une unique décomposition LU.*

▶ Analyse. On cherche $(\ell_1,\ell_2,\ell_3)\in\mathbb{R}^3$ et $(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6)\in\mathbb{R}^6$ tels que $A=LU$. En raisonnant comme aux questions 2, 3 et 4(b), on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= a\ (L_1)\\ u_2 &= b\ (L_2)\\ u_3 &= c\ (L_3)\\ \ell_1u_1 &= d\ (L_4)\\ \ell_1u_2+u_4 &= e\ (L_5)\\ \ell_1u_3+u_5 &= f\ (L_6)\\ \ell_2u_1 &= g\ (L_7)\\ \ell_2u_2+\ell_3u_4 &= h\ (L_8)\\ \ell_2u_3+\ell_3u_5+u_6 &= i\ \ (L_9)\end{aligned}\right.$$

Attention ! Il ne s'agit toujours pas d'un système linéaire ! !

On a $(u_1,u_2,u_3)=(a,b,c)$ d'après les trois premières lignes. En reportant dans les autres lignes, on obtient :

$$\left\{\begin{aligned} a\ell_1 &= d\ (L_4)\\ b\ell_1+u_4 &= e\ (L_5)\\ c\ell_1+u_5 &= f\ (L_6)\\ a\ell_2 &= g\ (L_7)\\ b\ell_2+\ell_3u_4 &= h\ (L_8)\\ c\ell_2+\ell_3u_5+u_6 &= i\ \ (L_9)\end{aligned}\right.$$

Donc $(\ell_1,\ell_2)=(d/a,g/a)$ car $a\neq 0$ d'après les lignes (L_4) et (L_7). En reportant dans les autres lignes, on obtient :

$$\left\{\begin{aligned} \tfrac{bd}{a}+u_4 &= e\ (L_5)\\ \tfrac{cd}{a}+u_5 &= f\ (L_6)\\ \tfrac{bg}{a}+\ell_3u_4 &= h\ (L_8)\\ \tfrac{cg}{a}+\ell_3u_5+u_6 &= i\ \ (L_9)\end{aligned}\right.$$

On déduit des lignes (L_5) et (L_6) que $(u_4,u_5)=((ae-bd)/a,(af-cd)/a)$. En reportant dans les deux dernières lignes, on obtient :

$$\left\{\begin{aligned} \tfrac{bg}{a}+\tfrac{ae-bd}{a}\ell_3 &= h\ (L_8)\\ \tfrac{cg}{a}+\tfrac{af-cd}{a}\ell_3+u_6 &= i\ \ (L_9)\end{aligned}\right.$$

Or la matrice $\begin{pmatrix} a & b\\ d & e\end{pmatrix}$ est inversible par hypothèse, donc :

$$\det\begin{pmatrix} a & b\\ d & e\end{pmatrix}=ae-bd\neq 0.$$

On déduit de la ligne (L_8) que :

$$\ell_3=\frac{h-\frac{bg}{a}}{\frac{ae-bd}{a}}=\frac{ah-bg}{ae-bd}$$

et de la ligne (L_9) que :

$$u_6=i-\frac{cg}{a}-\frac{af-cd}{a}\times\frac{ah-bg}{ae-bd}.$$

Synthèse. D'après les calculs faits en analyse, on trouve une unique décomposition LU :

$$\boxed{A=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\ \frac{d}{a}&1&0\\ \frac{g}{a}&\frac{ah-bg}{ae-bd}&1\end{pmatrix}}_{=L}\underbrace{\begin{pmatrix}a&b&c\\ 0&\frac{ae-bd}{a}&\frac{af-cd}{a}\\ 0&0&i-\frac{cg}{a}-\frac{(af-cd)(ah-bg)}{a(ae-bd)}\end{pmatrix}}_{=U}}.$$

(b) *À l'aide des résultats précédents, en déduire que A est inversible si et seulement si*

$$aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh \neq 0.$$

Comment appelleriez-vous la quantité $aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$ pour la matrice A ?

▶ D'après le résultat de la question 6(a), A admet une décomposition LU. On peut donc appliquer le résultat de la question 5(b) : A est inversible si et seulement si $u_1u_4u_6 \neq 0$.

Attention à la logique de votre raisonnement. Pour démontrer les résultats de la question 5, on a supposé que A admet une décomposition LU : il faut donc vérifier cette hypothèse pour appliquer ces résultats.

De plus, on a obtenu à la question précédente :

$$u_1 = a, \quad u_4 = \frac{ae - bd}{a} \quad \text{et} \quad u_6 = i - \frac{cg}{a} - \frac{(af - cd)(ah - bg)}{a(ae - bd)}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
u_1u_4u_6 &= a\left(\frac{ae-bd}{a}\right)\left(i - \frac{cg}{a} - \frac{(af-cd)(ah-bg)}{a(ae-bd)}\right)\\
&= (ae-bd)\left(\frac{ai-cg}{a} - \frac{(af-cd)(ah-bg)}{a(ae-bd)}\right)\\
&= \frac{(ae-bd)(ai-cg) - (af-cd)(ah-bg)}{a}\\
&= \frac{1}{a}\Big((a^2ei - aceg - abdi + bcdg) - (a^2fh - abfg - acdh + bcdg)\Big)\\
&= \frac{1}{a}\Big(a^2ei - aceg - abdi - a^2fh + abfg + acdh\Big)\\
&= aei - ceg - bdi - afh + bfg + cdh.
\end{aligned}$$

Finalement, on a bien montré que :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \text{ est inversible } \iff aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh \neq 0}.$$

Pour les matrices carrées d'ordre 2, on a :

$$A = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ est inversible } \iff ad - bc \neq 0$$

et la quantité $\det(A) = ad - bc$ est appelée le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.

Par analogie, la quantité $aei+bfg+cdh-ceg-bdi-afh$ pourrait être appelée le $\boxed{\text{déterminant}}$ de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$.

On a seulement montré l'équivalence dans le cas où $a \neq 0$ et $ae - bd \neq 0$. En fait, on peut montrer que cette équivalence est vraie dans tous les cas (en étudiant le cas $a = 0$ et le cas $ae - bd = 0$) mais c'est plus difficile car on ne dispose pas toujours d'une décomposition LU dans ces cas (cf. la question 2). Cette quantité généralise donc bien le critère d'inversibilité de l'ordre 2 à l'ordre 3, et on l'appelle bien le déterminant des matrices carrées d'ordre 3.