Corrigé du DS n° 4 de mathématiques et d'informatique

Exercice 1

On note respectivement 0_2 et I_2 la matrice nulle et la matrice identité de l'ensemble $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Pour tout cet exercice, on fixe une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\delta = ad - bc < 0$. De plus, on pose $\tau = a + d$ et $P : x \mapsto x^2 - \tau x + \delta$.

1. *Montrer que $P(M) = 0_2$.*

   ▶ On a :

$$\begin{aligned} P(M) &= M^2 - \tau M + \delta I_2 \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad - bc)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a^2 - ad + ad - bc & -ab - bd \\ -ac - cd & -ad - d^2 + ad - bc \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{0_2}. \end{aligned}$$

   N'oubliez pas la matrice identité pour le coefficient constant lorsque vous évaluez un polynôme en une matrice.

2. *Justifier l'existence de deux réels distincts λ et μ tels que $\lambda + \mu = \tau$ et $\lambda\mu = \delta$. Les expressions de λ et μ ne sont pas demandées.*

   ▶

   On peut trouver λ et μ par analyse-synthèse en résolvant un système (non linéaire) par substitution. Mais, pour ce genre de question, il est beaucoup plus rapide de pensez aux relations coefficients-racines d'un polynôme de degré 2 : λ et μ sont les racines du polynôme

$$x \mapsto (x - \lambda)(x - \mu) = x^2 - (\lambda + \mu)x + \lambda\mu = x^2 - \tau x + \delta = P(x).$$

   Il suffit donc de montrer que P admet deux racines réelles distinctes.

   Le polynôme $P : x \mapsto x^2 - \tau x + \delta$ est de degré 2 et admet pour discriminant :

$$\Delta = (-\tau)^2 - 4\delta = \underbrace{\tau^2}_{\geqslant 0} + 4\underbrace{(-\delta)}_{>0} > 0 \quad \text{car } \delta < 0 \text{ par hypothèse de l'énoncé.}$$

   Par conséquent, P admet deux racines réelles distinctes. On pose λ et μ la valeur de ces deux racines $\boxed{\text{réelles distinctes}}$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - \tau x + \delta = P(x) = (x - \lambda)(x - \mu) = x^2 - (\lambda + \mu)x + \lambda\mu.$$

   Par identification des coefficients de polynômes, on en déduit bien que $\boxed{\lambda + \mu = \tau}$ et $\boxed{\lambda\mu = \delta}$.

Pour la suite de l'exercice, on pose $A = M - \lambda I_2$ et $B = M - \mu I_2$.

3. *Montrer que $AB = 0_2$. Les matrices A et B sont-elles inversibles ?*

▶ On a :

$$\begin{aligned}AB &= (M-\lambda I_2)(M-\mu I_2)\\ &= M^2-\lambda I_2M-\mu MI_2+\lambda\mu I_2^2\\ &= M^2-\lambda M-\mu M+\lambda\mu I_2 \quad \text{car } I_2 \text{ est la matrice identité}\\ &= M^2-(\lambda+\mu)M+\lambda\mu I_2\\ &= M^2-\tau M+\delta I_2 \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}\\ &= P(M) = \boxed{0_2} \quad \text{d'après le résultat de la question 1.}\end{aligned}$$

Par l'absurde, si la matrice A est inversible alors :

$$\begin{aligned}0_2 &= A^{-1}0_2 \quad \text{car } 0_2 \text{ est la matrice nulle}\\ &= A^{-1}(AB) \quad \text{d'après le résultat précédent}\\ &= (A^{-1}A)B \quad \text{par associativité}\\ &= I_2B \quad \text{par définition de la matrice inverse } A^{-1}\\ &= B \quad \text{car } I_2 \text{ est la matrice identité}\\ &= M-\mu I_2 \quad \text{par définition de la matrice } B.\end{aligned}$$

On en déduit que $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} = M = \mu I_2 = \begin{pmatrix} \mu & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}$ et donc $\delta = ad-bc = \mu\times\mu - 0\times 0 = \mu^2 \geqslant 0$ ce qui est absurde car $\delta < 0$ par hypothèse de l'énoncé. Par conséquent, on a montré par l'absurce que $\boxed{\text{la matrice } A \text{ n'est pas inversible}}$. De même, on peut montrer que $\boxed{\text{la matrice } B \text{ n'est pas inversible}}$ (sinon $M = \lambda I_2$ donc $\delta = \lambda^2 \geqslant 0$ ce qui est absurde).

4. *Prouver que $A^n = (\mu-\lambda)^{n-1}A$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Déterminer une expression similaire pour les puissances de B.*

▶ On raisonne par récurrence.

Initialisation. Pour $n = 1$, on a :

$$A^n = A^1 = A \quad \text{et} \quad (\mu-\lambda)^{n-1} = (\mu-\lambda)^{1-1}A = (\mu-\lambda)^0A = 1A = A.$$

Donc $A^n = (\mu-\lambda)^{n-1}A$ pour $n = 1$.

Hérédité. On suppose que $A^n = (\mu-\lambda)^{n-1}A$ pour un entier $n \geqslant 1$ fixé. On a :

$$\begin{aligned}A^{n+1} &= A^nA \quad \text{par propriété de la puissance}\\ &= (\mu-\lambda)^{n-1}AA \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}\\ &= (\mu-\lambda)^{n-1}A^2.\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}A^2 &= (M-\lambda I_2)^2 \quad \text{par définition de la matrice } A\\ &= M^2-\lambda MI_2-\lambda I_2M+\lambda^2I_2^2\\ &= M^2-2\lambda M+\lambda^2I_2 \quad \text{car } I_2 \text{ est la matrice identité.}\end{aligned}$$

De plus, on a d'après les résultats des questions 1 et 2 :

$$0_2 = P(M) = M^2-\tau M+\delta I_2 = M^2-(\lambda+\mu)M+\lambda\mu I_2 \quad \text{donc} \quad M^2 = (\lambda+\mu)M-\lambda\mu I_2.$$

En reportant dans l'expression de A^2, on obtient :

$$\begin{aligned}A^2 &= (\lambda+\mu)M-\lambda\mu I_2-2\lambda M+\lambda^2I_2\\ &= (\mu-\lambda)M+\lambda\underbrace{(\lambda-\mu)}_{=-(\mu-\lambda)}I_2\\ &= (\mu-\lambda)(M-\lambda I_2)\\ &= (\mu-\lambda)A.\end{aligned}$$

En reportant dans l'expression de A^{n+1}, on obtient :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= (\mu-\lambda)^{n-1}(\mu-\lambda)A \\ &= (\mu-\lambda)^n A \\ &= (\mu-\lambda)^{(n+1)-1}A. \end{aligned}$$

Ainsi, si le résultat est vrai au rang n alors il est vrai au rang $n+1$. Et cette implication est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad A^n = (\mu-\lambda)^{n-1}A}.$$

De même, en inversant le rôle de A et B (et donc de λ et μ), on peut montrer par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad B^n = (\lambda-\mu)^{n-1}B}.$$

5. *Trouver deux réels α et β tels que $\alpha+\beta \neq 0$ et $M = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}B$. Donner une expression de $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ et $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ en fonction de λ et μ.*

▶ On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse. On cherche $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha \neq \beta$ et $M = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}B$. On a :

$$\begin{aligned} \tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}A + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta}B &= \tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}(M-\lambda I_2) + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta}(M-\mu I_2) \quad \text{par définition des matrices } A \text{ et } B \\ &= \underbrace{\tfrac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta}}_{=1} M - \tfrac{\alpha\lambda+\beta\mu}{\alpha+\beta} I_2. \end{aligned}$$

Il suffit donc que $\alpha\lambda+\beta\mu = 0$ pour que $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}B = M$. Ceci fournit une équation à deux inconnues. De plus, on veut que $\alpha+\beta \neq 0$. Il suffit par exemple que $\alpha+\beta = 1$ ce qui donne une deuxième équation. Il suffit donc de résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \alpha\lambda+\beta\mu = 0 \\ \alpha+\beta = 1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Or :

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \lambda \times 1 - \mu \times 1 = \lambda - \mu \neq 0 \quad \text{car } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont deux réels distincts d'après le résultat de la question 2.}$$

Donc la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et le système linéaire admet une unique solution :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 1 & -\mu \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda-\mu}\begin{pmatrix} -\mu \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Passez par les matrices pour résoudre les systèmes linéaires, c'est beaucoup plus rapide. Surtout pour les systèmes linéaires carrés d'ordre 2 à l'aide du déterminant.

Synthèse. On pose $\boxed{\alpha = \frac{-\mu}{\lambda-\mu}}$ et $\boxed{\beta = \frac{\lambda}{\lambda-\mu}}$. Alors on a d'après les calculs effectués en analyse :

$$\alpha+\beta = 1 \neq 0 \quad \text{et} \quad \tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}A + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta}B = M - \tfrac{\overbrace{\alpha\lambda+\beta\mu}^{=0}}{\alpha+\beta}I_2 = M.$$

De plus :

$$\boxed{\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta} = \alpha = \tfrac{-\mu}{\lambda-\mu}} \quad \text{et} \quad \boxed{\tfrac{\beta}{\alpha+\beta} = \beta = \tfrac{\lambda}{\lambda-\mu}}.$$

6. *À l'aide de la formule du binôme de Newton, montrer que $\forall n \geqslant 1,\ M^n = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}A\right)^n + \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}B\right)^n$.*

▶ En reprenant le calcul de la question 3, en inversant le rôle de A et B (et donc de λ et μ), on a :

$$BA = M^2 - (\mu+\lambda)M + \mu\lambda I_2 = M^2 - (\lambda+\mu)M + \lambda\mu I_2 = AB.$$

Donc les matrices A et B commutent.

N'oubliez pas de vérifier que les matrices commutent avant d'appliquer la formule du binôme de Newton.

Par conséquent, on a pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
M^n &= \left(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}A + \tfrac{\beta}{\alpha+\beta}B\right)^n \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}A\right)^k \left(\tfrac{\beta}{\alpha+\beta}B\right)^{n-k} \quad \begin{array}{c}\text{d'après la formule du binôme de Newton car} \\ \left(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}A\right)\left(\tfrac{\beta}{\alpha+\beta}B\right) = \tfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}AB = \tfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}BA = \left(\tfrac{\beta}{\alpha+\beta}B\right)\left(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}A\right)\end{array} \\
&= \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \underbrace{\left(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}A\right)^0}_{=I_2} \left(\tfrac{\beta}{\alpha+\beta}B\right)^{n-0} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}A\right)^k \left(\tfrac{\beta}{\alpha+\beta}B\right)^{n-k} + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} \left(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}A\right)^n \underbrace{\left(\tfrac{\beta}{\alpha+\beta}B\right)^{n-n}}_{=I_2} \\
&= \left(\tfrac{\beta}{\alpha+\beta}B\right)^n + \underbrace{\tfrac{1}{(\alpha+\beta)^n} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} A^{k-1} \underbrace{AB}_{=0_2} B^{n-k-1}}_{=0_2} + \left(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}A\right)^n \\
&= \boxed{\left(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}A\right)^n + \left(\tfrac{\beta}{\alpha+\beta}B\right)^n} \quad \text{car } AB = 0_2 \text{ d'après le résultat de la question 3.}
\end{aligned}$$

Il faut sortir les cas $k = 0$ et $k = n$ de la somme pour faire apparaître la simplification $AB = 0_2$. En effet, sinon on fait apparaitre $A^{k-1} = A^{-1}$ pour $k = 0$ et $B^{n-k-1} = B^{-1}$ pour $k = n$ alors que les matrices A et B ne sont pas inversibles (d'après le résultat de la question 3). On peut aussi se rendre compte de ces simplifications en écrivant la somme sans le symbole $\sum$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}A\right)^k \left(\tfrac{\beta}{\alpha+\beta}B\right)^{n-k} \\
&= \tfrac{\beta^n}{(\alpha+\beta)^n}B^n + n\tfrac{\alpha\beta^{n-1}}{(\alpha+\beta)^n}\underbrace{AB^{n-1}}_{=0_2} + \binom{n}{2}\tfrac{\alpha^2\beta^{n-2}}{(\alpha+\beta)^n}\underbrace{A^2B^{n-2}}_{=0_2} + \binom{n}{3}\tfrac{\alpha^3\beta^{n-3}}{(\alpha+\beta)^n}\underbrace{A^3B^{n-3}}_{=0_2} + \dots \\
&\quad \dots + \binom{n}{3}\tfrac{\alpha^{n-3}\beta^3}{(\alpha+\beta)^n}\underbrace{A^{n-3}B^3}_{=0_2} + \binom{n}{2}\tfrac{\alpha^{n-2}\beta^2}{(\alpha+\beta)^n}\underbrace{A^{n-2}B^2}_{=0_2} + n\tfrac{\alpha^{n-1}\beta}{(\alpha+\beta)^n}\underbrace{A^{n-1}B}_{=0_2} + \tfrac{\alpha^n}{(\alpha+\beta)^n}A^n.
\end{aligned}$$

7. *Déduire des résultats précédents que M^n est de la forme $x_n M + y_n I_2$ pour tout entier $n \geqslant 1$, où x_n et y_n sont deux réels à exprimer en fonction de λ, μ et n.*

▶ Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned}
M^n &= \left(\tfrac{\alpha}{\alpha+\beta}A\right)^n + \left(\tfrac{\beta}{\alpha+\beta}B\right)^n \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= \left(\tfrac{-\mu}{\lambda-\mu}\right)^n A^n + \left(\tfrac{\lambda}{\lambda-\mu}\right)^n B^n \quad \text{d'après le résultat de la question 5} \\
&= \left(\tfrac{\mu}{\mu-\lambda}\right)^n (\mu-\lambda)^{n-1}A + \left(\tfrac{\lambda}{\lambda-\mu}\right)^n (\lambda-\mu)^{n-1}B \quad \text{d'après le résultat de la question 4} \\
&= \tfrac{\mu^n}{\mu-\lambda}(M-\lambda I_2) + \tfrac{\lambda^n}{\lambda-\mu}(M-\mu I_2) \quad \text{par définition des matrices } A \text{ et } B \\
&= \underbrace{\tfrac{\lambda^n-\mu^n}{\lambda-\mu}}_{=x_n} M + \underbrace{\tfrac{\lambda\mu^n-\mu\lambda^n}{\lambda-\mu}}_{=y_n} I_2.
\end{aligned}$$

D'où le résultat en posant :

$$\boxed{x_n = \frac{\lambda^n-\mu^n}{\lambda-\mu}} \quad \text{et} \quad \boxed{y_n = \frac{\lambda\mu^n-\mu\lambda^n}{\lambda-\mu}}.$$

Exercice 2

Pour tout couple d'entiers $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, on pose $I_{p,q}=\int_0^1 x^p(1-x)^q\mathrm{d}x$.

1. *Soit $(p,q)\in\mathbb{N}^2$. Montrer que $I_{p,q}=I_{q,p}$ à l'aide du changement de variable $t=1-x$.*

► On pose $t=1-x \iff x=1-t$. La fonction $\varphi : t\mapsto\varphi(t)=1-t$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction affine et sa dérivée $\varphi' : t\mapsto -1$ est continue comme fonction constante. On peut donc utiliser le théorème de changement de variable dans une intégrale.

N'oubliez pas de vérifier les hypothèses des théorèmes que vous appliquez.

On a :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}=\varphi'(t)=-1 \quad\text{donc}\quad \mathrm{d}x=-\mathrm{d}t.$$

De plus, si $x=0$ alors $t=1-x=1$, et si $x=1$ alors $t=1-x=0$. Donc :

$$\begin{aligned}
I_{p,q}&=\int_0^1 x^p(1-x)^q\mathrm{d}x\\
&=\int_1^0 (1-t)^p\Big(1-(1-t)\Big)^q(-\mathrm{d}t) \quad \text{d'après la formule de changement de variable}\\
&=-\int_1^0(1-t)^pt^q\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité}\\
&=\int_0^1 t^q(1-t)^p\mathrm{d}t \quad \text{en inversant les bornes de l'intégrale}\\
&=\boxed{I_{p,q}}.
\end{aligned}$$

2. *Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer $I_{n,0}$ et $I_{0,n}$.*

► On a :

$$I_{n,0}=\int_0^1 x^n\underbrace{(1-x)^0}_{=1}\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}-0=\boxed{\frac{1}{n+1}}.$$

Et $\boxed{I_{0,n}=I_{n,0}=\frac{1}{n+1}}$ d'après le résultat de la question précédente.

3. *Soit $(p,q)\in\mathbb{N}^2$. Montrer que $I_{p,q+1}=\frac{q+1}{p+1}I_{p+1,q}$.*

► On a :

$$\begin{aligned}
I_{p,q+1}&=\int_0^1 x^p(1-x)^{q+1}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1 u'(x)v(x)\mathrm{d}x \quad\text{en posant}\quad \begin{cases} u'(x) &= x^p\\ v(x) &= (1-x)^{q+1}\end{cases} \quad\text{donc}\quad \begin{cases} u(x) &= \frac{x^{p+1}}{p+1}\\ v'(x) &= -(q+1)(1-x)^q\end{cases}.
\end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme composées de fonctions polynomiales et leurs dérivées u' et v' sont continues sur $\mathbb{R}$ comme composées de fonctions polynomiales. On peut donc appliquer le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I_{p,q+1}&=\int_0^1 u'(x)v(x)\mathrm{d}x\\
&=\Big[u(x)v(x)\Big]_0^1-\int_0^1 u(x)v'(x)\mathrm{d}x \quad \text{d'après la formule d'intégration par parties}\\
&=\left[\tfrac{x^{p+1}}{p+1}(1-x)^{q+1}\right]_0^1-\int_0^1\tfrac{x^{p+1}}{p+1}\Big(-(q+1)(1-x)^q\Big)\mathrm{d}x\\
&=\tfrac{1}{p+1}\times 0-0\times 1+\tfrac{q+1}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^q\mathrm{d}x \quad\text{par linéarité}\\
&=\boxed{\tfrac{q+1}{p+1}I_{p+1,q}}.
\end{aligned}$$

4. Par récurrence, démontrer que la proposition suivante est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$:

$$\mathscr{P}(q) : «\forall p \in \mathbb{N},\ I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}».$$

▶ Initialisation. Pour $q = 0$, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$I_{p,0} = \frac{1}{p+1} \quad \text{d'après le résultat de la question 2 et} \quad \frac{p!0!}{(p+0+1)!} = \frac{p!}{(p+1)!} = \frac{1}{p+1}.$$

Donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
Hérédité. On suppose que $\mathscr{P}(q)$ est vraie pour un rang $q \in \mathbb{N}$ fixé. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} I_{p,q+1} &= \tfrac{q+1}{p+1} I_{p+1,q} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\ &= \tfrac{q+1}{p+1} \times \frac{(p+1)!q!}{\big((p+1)+q+1\big)!} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{\frac{(p+1)!}{p+1} \times q!(q+1)}{\big(p+q+2\big)!} \\ &= \frac{p!(q+1)!}{\big(p+(q+1)+1\big)!}. \end{aligned}$$

Puisque cette égalité est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$, on en déduit que $\mathscr{P}(q) \implies \mathscr{P}(q+1)$. Et cette implication est vraie pour tout $q \in \mathbb{N}$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on a montré que $\boxed{\mathscr{P}(q) \text{ est vraie pour tout } q \in \mathbb{N}}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}}.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le but de cette question est de simplifier la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n+k+1}$.

(a) Montrer que $I_{n,n} = S_n$.

▶ On a :

$$\begin{aligned} I_{n,n} &= \int_0^1 x^n (1-x)^n \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^n \Big(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-x)^k \underbrace{1^{n-k}}_{=1} \Big) \mathrm{d}x \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^1 x^{n+k} \mathrm{d}x \quad \text{par linéarité} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \left[\frac{x^{n+k+1}}{n+k+1} \right]_0^1 \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \left(\frac{1}{n+k+1} - 0 \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n+k+1} = \boxed{S_n}. \end{aligned}$$

(b) En déduire que $S_n = \dfrac{1}{\binom{2n}{n}(2n+1)}$.

▶ On a :

$$\begin{aligned} S_n &= I_{n,n} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\ &= \frac{n!n!}{(n+n+1)!} \quad \text{d'après le résultat de la question 4} \\ &= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\binom{2n}{n}(2n+1)} &= \frac{1}{\frac{(2n!)}{n!(2n-n)!}(2n+1)} \quad \text{par définition des coefficients binomiaux} \\ &= \frac{n!n!}{(2n)!(2n+1)} \\ &= \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

On en déduit bien que $\boxed{S_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}(2n+1)}}$.

Exercice 3 (Informatique)

On utilisera seulement le langage Python et on pourra faire appel aux fonctions des questions précédentes sans avoir besoin de les réécrire. La question 3 peut être traitée sans avoir répondu aux questions 1 et 2.

1. *On considère la fonction* `mystere` *ci-dessous.*

```
def mystere(L,n):
    if n>len(L):
        return 'erreur'
    M=[]
    for i in range(n):
        M.append(L[n-1-i])
    for i in range(n,len(L)):
        M.append(L[i])
    return M
```

(a) *Que renvoie* `mystere([5,7,1,8,3],6)` *?*

▶ L'instruction `mystere([5,7,1,8,3],6)` renvoie $\boxed{\texttt{'erreur'}}$ car `n=6` est strictement supérieur à `len(L)=len([5,7,1,8,3])=5`.

(b) *Que renvoie* `mystere([5,7,1,8,3],2)` *?*

▶ L'instruction `mystere([5,7,1,8,3],2)` ne renvoie par `'erreur'` car `n=2` est inférieur à `len(L)=len([5,7,1,8,3])=5`. La liste `M` est initialisée à la liste vide `[]`. La première boucle `for` s'exécute `n=2` fois, donc pour `i=0` et `i=1`.

— Pour `i=0`, l'élément `L[n-1-i]=L[1]=7` est ajouté à la liste `M` qui devient `M=[7]`.

— Pour `i=1`, l'élément `L[n-1-i]=L[0]=5` est ajouté à la liste `M` qui devient `M=[7,5]`.

La deuxième boucle `for` s'exécute pour `i` allant de `n=2` à `len(L)-1=4`.

— Pour `i=2`, l'élément `L[i]=L[2]=1` est ajouté à la liste `M` qui devient `M=[7,5,1]`.

— Pour `i=3`, l'élément `L[i]=L[3]=8` est ajouté à la liste `M` qui devient `M=[7,5,1,8]`.

— Pour `i=4`, l'élément `L[i]=L[4]=3` est ajouté à la liste `M` qui devient `M=[7,5,1,8,3]`.

Finalement, l'instruction `mystere([5,7,1,8,3],2)` renvoie la liste $\boxed{\texttt{[7,5,1,8,3]}}$.

(c) *Que renvoie* `mystere([5,7,1,8,3],4)` *?*

▶ L'instruction `mystere([5,7,1,8,3],4)` ne renvoie par `'erreur'` car `n=4` est inférieur à `len(L)=len([5,7,1,8,3])=5`. La liste `M` est initialisée à la liste vide `[]`. La première boucle `for` s'exécute `n=4` fois, donc pour `i=0`, `i=1`, `i=2` et `i=3`.

— Pour `i=0`, l'élément `L[n-1-i]=L[3]=8` est ajouté à la liste `M` qui devient `M=[8]`.
— Pour `i=1`, l'élément `L[n-1-i]=L[2]=1` est ajouté à la liste `M` qui devient `M=[8,1]`.
— Pour `i=2`, l'élément `L[n-1-i]=L[1]=7` est ajouté à la liste `M` qui devient `M=[8,1,7]`.
— Pour `i=3`, l'élément `L[n-1-i]=L[1]=5` est ajouté à la liste `M` qui devient `M=[8,1,7,5]`.

La deuxième boucle `for` s'exécute pour `i` allant de `n=4` à `len(L)-1=4`, donc seulement pour `i=4`.

— Pour `i=4`, l'élément `L[i]=L[4]=3` est ajouté à la liste `M` qui devient `M=[8,1,7,5,3]`.

Finalement, l'instruction `mystere([5,7,1,8,3],4)` renvoie la liste $\boxed{\texttt{[8,1,7,5,3]}}$.

(d) *On fixe une liste `L` quelconque pour cette question. Expliquer ce que renvoient `mystere(L,1)` et `mystere(L,len(L))`.*

▶ En reprenant les résultats des questions précédentes, on remarque que l'instruction `mystere(L,n)` renvoie la liste des éléments de `L` dont l'ordre des `n` premiers a été inversé. En particulier, `mystere(L,1)` renvoie $\boxed{\text{la liste L}}$ et `mystere(L,len(L))` renvoie $\boxed{\text{la liste des éléments de L dans l'ordre inverse}}$.

2. *À l'aide de la fonction `mystere`, on cherche un algorithme permettant de trier les éléments d'une liste dans l'ordre croissant. Par exemple, on peut trier les éléments de la liste `L=[4,2,5,1,3]` en utilisant la suite d'instructions suivante.*

```
L=mystere(L,3)
L=mystere(L,5)
L=mystere(L,3)
L=mystere(L,4)
L=mystere(L,2)
L=mystere(L,3)
```

(a) *Qu'affiche la commande `print(L)` après l'exécution de chacune des six lignes ci-contre ?*

▶ Chaque ligne permet d'inverser l'ordre des premiers éléments de la liste `L`. On a :

commande	print(L)
L=[4,2,5,1,3]	[4,2,5,1,3]
L=mystere(L,3)	[5,2,4,1,3]
L=mystere(L,5)	[3,1,4,2,5]
L=mystere(L,3)	[4,1,3,2,5]
L=mystere(L,4)	[2,3,1,4,5]
L=mystere(L,2)	[3,2,1,4,5]
L=mystere(L,3)	[1,2,3,4,5]

(b) *En vous inspirant de l'exemple ci-contre, déterminer une suite d'instructions permettant de trier les éléments de la liste `L=[3,2,4,1]`.*

▶ Il suffit de trier les éléments de la droite vers la gauche : on utilise la fonction `mystere` deux fois pour passer le plus grand élément en 1re position puis en dernière position, ensuite on recommence avec l'élément suivant dans l'ordre décroissant, etc.

commande	print(L)
L=[3,2,4,1]	[3,2,4,1]
L=mystere(L,3)	[4,2,3,1]
L=mystere(L,4)	[1,3,2,4]
L=mystere(L,2)	[3,1,2,4]
L=mystere(L,3)	[2,1,3,4]
L=mystere(L,2)	[1,2,3,4]

(c) *Même question pour la liste `L=[1,6,4,7,4,2]`.*

▶ On utilise le même principe qu'à la question précédente.

commande	print(L)
L=[1,6,4,7,4,2]	[1,6,4,7,4,2]
L=mystere(L,4)	[7,4,6,1,4,2]
L=mystere(L,6)	[2,4,1,6,4,7]
L=mystere(L,4)	[6,1,4,2,4,7]
L=mystere(L,5)	[4,2,4,1,6,7]
L=mystere(L,4)	[1,4,2,4,6,7]
L=mystere(L,2)	[4,1,2,4,6,7]
L=mystere(L,3)	[2,1,4,4,6,7]
L=mystere(L,2)	[1,2,4,4,6,7]

3. *Écrire une fonction* `max` *qui prend en argument une liste* `L` *et un entier* `n` *puis qui renvoie le plus petit indice du maximum des* `n` *premiers éléments de* `L` *(ou la chaîne de caractères* `'erreur'` *si* `L` *contient moins de* `n` *éléments). Par exemple,* `max([3,5,2,5,9,2],4)` *renvoie l'entier* `1`*.*

   ▶ Par exemple :

```
def max(L,n):
    if n>len(L):
        return 'erreur'
    indice=0
    for i in range(1,n):
        if L[i]>L[indice]:
            indice=i
    return indice
```

4. *À l'aide des fonctions* `mystere` *et* `max` *(et sans utiliser la méthode* `.sort()`*), écrire une fonction* `trier` *qui prend en argument une liste* `L` *puis qui renvoie la liste de ses éléments triés dans l'ordre croissant.*

   ▶ Par exemple :

```
def trier(L):
    for n in range(len(L),1,-1):
        indice=max(L,n)
        L=mystere(L,indice+1)
        L=mystere(L,n)
    return L
```

Exercice 4

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ *et une matrice colonne d'inconnues* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.

1. *Discuter du nombre de solutions du système* $AX = \lambda X$ *en fonction des valeurs du paramètre* $\lambda \in \mathbb{R}$.

   ▶ On a :

$$AX = \lambda X \iff \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{aligned} -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 - \lambda x_1 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 - \lambda x_2 &= 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 - \lambda x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - \lambda x_4 &= 0 \end{aligned} \right.$$

On reconnaît un système linéaire homogène qu'on échelonne à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

$$AX=\lambda X \iff \begin{pmatrix} -2-\lambda & -3 & 3 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda & 1 \\ -2 & -2 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_4 \\ \\ \\ L_4 \leftrightarrow L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & -2 & 2 & 2-\lambda \\ 2 & 4-\lambda & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda & 1 \\ -2-\lambda & -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ \\ L_4 \leftarrow 2L_4+(-2-\lambda)L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & -2 & 2 & 2-\lambda \\ 0 & 2-\lambda & -2 & 2-\lambda \\ 0 & 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & -2+2\lambda & 2-2\lambda & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\text{où } A=2+(-2-\lambda)(2-\lambda)=2+(-4+\lambda^2)=\lambda^2-2$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & -2 & 2 & 2-\lambda \\ 0 & \boxed{1} & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -2 & 2-\lambda \\ 0 & -2+2\lambda & 2-2\lambda & \lambda^2-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3-(2-\lambda)L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4-(-2+2\lambda)L_2 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & -2 & 2 & 2-\lambda \\ 0 & \boxed{1} & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C & \lambda^2-2\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{où } \begin{cases} B=-2-(2-\lambda)(-1-\lambda)=-2-(-2-\lambda+\lambda^2)=-\lambda^2+\lambda \\ C=2-2\lambda-(-2+2\lambda)(-1-\lambda)=2-2\lambda-(2-2\lambda^2)=2\lambda^2-2\lambda \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & -2 & 2 & 2-\lambda \\ 0 & \boxed{1} & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda(\lambda-1) & \lambda(\lambda-2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4+2L_3 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & -2 & 2 & 2-\lambda \\ 0 & \boxed{1} & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda-2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a :

$$-\lambda(\lambda-1)=0 \iff (\lambda=0 \text{ ou } \lambda=1) \quad \text{et} \quad \lambda(\lambda-2)=0 \iff (\lambda=0 \text{ ou } \lambda=2).$$

On a donc trois cas en fonction des valeurs du paramètre λ.

— Si $\boxed{\lambda=0}$ alors on obtient un système linéaire échelonné de $\boxed{\text{rang } 2}$ avec deux équations auxiliaires compatibles et deux inconnues auxiliaires. Le système $AX=\lambda X$ admet donc $\boxed{\text{une infinité de solutions}}$.

— Si $\boxed{\lambda=1 \text{ ou } \lambda=2}$ alors on obtient un système linéaire échelonné de $\boxed{\text{rang } 3}$ avec une équation auxiliaire compatibles et une inconnue auxiliaire. Le système $AX=\lambda X$ admet donc $\boxed{\text{une infinité de solutions}}$.

— Si $\boxed{\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0,1,2\}}$ alors on obtient un système linéaire échelonné de $\boxed{\text{rang 4 maximal}}$. Le système $AX=\lambda X$ admet donc $\boxed{\text{une seule solution}}$.

2. *Résoudre le système $AX=\lambda X$ pour $\lambda=0$, $\lambda=1$, $\lambda=2$ et $\lambda=3$.*

▶ On reprend le système échelonné obtenu à la question précédente.

— Si $\boxed{\lambda = 0}$ alors :

$$AX = \lambda X \iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & -2 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_2 = x_3 - x_4 \\ x_1 = -x_2 + x_3 + x_4 = 2x_4. \end{cases}$$

On obtient donc une infinité de solutions de la forme :

$$\boxed{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_4, x_3 - x_4, x_3, x_4) \quad \text{où } (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2}.$$

— Si $\boxed{\lambda = 1}$ alors :

$$AX = \lambda X \iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & -2 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_4 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_2 = 2x_3 - x_4 = 2x_3 \\ x_1 = -x_2 + x_3 + \frac{1}{2}x_4 = -x_3. \end{cases}$$

On obtient donc une infinité de solutions de la forme :

$$\boxed{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_3, 2x_3, x_3, 0) \quad \text{où } x_3 \in \mathbb{R}}.$$

— Si $\boxed{\lambda = 2}$ alors :

$$AX = \lambda X \iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & -2 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_3 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 3x_3 - x_4 = -x_4 \\ x_1 = -x_2 + x_3 = x_4. \end{cases}$$

On obtient donc une infinité de solutions de la forme :

$$\boxed{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, -x_4, 0, x_4) \quad \text{où } x_4 \in \mathbb{R}}.$$

— Si $\boxed{\lambda = 3}$ alors on a un système linéaire homogène de rang maximal d'après le résultat de la question précédente. On obtient donc une seule solution :

$$\boxed{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)}.$$

Exercice 5

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions x dérivable sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$x(t) > 0 \quad \text{et} \quad x'(t) + e^t f(t)x(t)^2 + x(t) = 0 \quad \text{où} \quad f(t) = \frac{t+1}{t^2+1}.$$

1. (a) *Justifier que la fonction f admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'unique primitive qui s'annule en 0 qu'on notera F_0.*

▶ On a $t^2+1 \geqslant 0+1 > 0$ donc $t^2+1 \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par conséquent, la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. D'après le théorème fondamental de l'analyse, on en déduit que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ admet une infinité de primitives sur l'intervalle } \mathbb{R}}$. On note F_0 l'unique primitive qui s'annule en 0. On a :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_0(t) &= \int_0^t f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^t \frac{x+1}{x^2+1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \frac{2x}{x^2+1}\mathrm{d}x + \int_0^t \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité} \\
&= \frac{1}{2}\Big[\ln\left(x^2+1\right)\Big]_0^t + \Big[\arctan(x)\Big]_0^t \quad \text{en reconnaissant des dérivées usuelles} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\ln\left(t^2+1\right) - \underbrace{\ln(1)}_{=0}\Big) + \Big(\arctan(t) - \underbrace{\arctan(0)}_{=0}\Big) \\
&= \boxed{\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right) + \arctan(t)}.
\end{aligned}$$

(b) *Montrer que F_0 admet un minimum et calculer sa valeur qu'on notera m.*

▶ Puisque F_0 est une primitive de f, F_0 est dérivable et $F_0' = f$. Or :

$$f(t) > 0 \iff \frac{t+1}{\underbrace{t^2+1}_{>0}} > 0 \iff t+1 > 0 \iff t > -1.$$

D'après le principe de Lagrange, on en déduit le tableau des variations de F_0.

t	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(t)$		$-$	0	$+$	
$F_0(t)$	↘		$F_0(-1)$		↗

Par conséquent, $\boxed{F_0 \text{ admet un minimum en } -1}$ qui vaut d'après le résultat de la question précédente :

$$m = F_0(-1) = \frac{1}{2}\ln\left((-1)^2+1\right) + \arctan(-1) = \boxed{\frac{1}{2}\ln(2) - \frac{\pi}{4}}.$$

2. *Pour cette question, on fixe une fonction x solution du problème et on pose $y = 1/x$.*

(a) *Montrer que y est solution d'une équation différentielle linéaire à déterminer.*

▶ La fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme inverse de la fonction x supposée dérivable et qui ne s'annule pas (car $x(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$). On sait que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) + e^t f(t)x(t)^2 + x(t) = 0.$$

Or, $y = 1/x \iff x = 1/y$ donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \frac{1}{y(t)} \quad \text{et} \quad x'(t) = \frac{-y'(t)}{y(t)^2}.$$

En reportant ces expressions dans la relation précédente, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{-y'(t)}{y(t)^2} + e^t f(t) \left(\frac{1}{y(t)}\right)^2 + \frac{1}{y(t)} = 0 \\
\text{donc} \quad & \frac{-y'(t) + e^t f(t) + y(t)}{y(t)^2} = 0 \\
\text{donc} \quad & -y'(t) + e^t f(t) + y(t) = 0 \\
\text{donc} \quad & \boxed{y'(t) - y(t) = e^t f(t)}.
\end{aligned}$$

On reconnaît une $\boxed{\text{équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants}}$.

(b) *Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question précédente. On pourra chercher une solution particulière de la forme $t \mapsto \lambda(t)e^t$ où λ est une fonction à déterminer.*

► On commence par résoudre l'équation différentielle linéaire homogène associée :

$$y'_{\mathrm{H}} - y_{\mathrm{H}} = 0 \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \ y_{\mathrm{H}} : t \mapsto \lambda e^{-t}.$$

Puis on cherche une solution particulière de la forme $y_{\mathrm{P}} : t \mapsto \lambda(t)e^t$. On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse. On cherche une fonction λ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'_{\mathrm{P}}(t) - y_{\mathrm{P}}(t) = e^t f(t).$$

Il suffit que la fonction λ soit dérivable sur $\mathbb{R}$ afin que $y_{\mathrm{P}} : t \mapsto \lambda(t)e^t$ soit dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. Dans ce cas :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'_{\mathrm{P}}(t) = \lambda'(t)e^t + \lambda(t)e^t.$$

En reportant les expressions de y'_{P} et y_{P} dans l'équation différentielle, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\lambda'(t)e^t + \lambda(t)e^t - \lambda(t)e^t = e^t f(t) \iff \lambda'(t)e^t = e^t f(t) \iff \lambda'(t) = f(t).$$

Ainsi, λ est une primitive de f.

Synthèse. On pose $\boxed{\lambda = F_0}$. On vérifie que $y_{\mathrm{P}} : t \mapsto F_0(t)e^t$ est bien une solution particulière de l'équation différentielle obtenue à la question précédente d'après les calculs effectués en analyse.

D'après le principe de superposition, on en déduit que toutes les solutions sont de la forme :

$$\boxed{y : t \mapsto y_{\mathrm{H}}(t) + y_{\mathrm{P}}(t) = \lambda e^t + F_0(t)e^t \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}}.$$

3. *En déduire que toutes les solutions du problème sont de la forme :*

$$x : t \mapsto \frac{e^{-t}}{C + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \arctan(t)}$$

où C est une constante telle que $C > -m$.

► On sait que $y = 1/x \iff x = 1/y$. Or on a d'après le résultat de la question précédente :

$$y(t) = 0 \iff \big(\lambda + F_0(t)\big)e^t = 0 \iff F_0(t) = -\lambda.$$

D'après le tableau des variations de F_0 obtenu à la question 1(b), on en déduit que y ne s'annule pas si et seulement si $-\lambda$ n'est pas une valeur image de F_0, donc si et seulement si $-\lambda < m$. Dans ce cas, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x(t) = \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{\big(\lambda + F_0(t)\big)e^t} = \frac{e^{-t}}{\lambda + F_0(t)}.$$

Réciproquement si x est une fonction de cette forme où $-\lambda < m \iff \lambda > -m$, on vérifie bien que x est solution du problème d'après les calculs effectués dans les questions précédentes.

N'oubliez pas de vérifier la réciproque. La question 2 démontre seulement une implication : si x est solution du problème alors x est de cette forme. D'autre part, il est nécessaire que $\lambda > -m$ pour que le dénominateur des fonctions x de cette forme soit strictement positif afin de vérifier que $x(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Finalement, on a bien montré que toutes les solutions du problème sont de la forme :

$$\boxed{x : t \mapsto \frac{e^{-t}}{C + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \arctan(t)}}$$

où C est une constante telle que $\boxed{C > -m}$.