DS n^{o} 5 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

Problème 1

Ce problème propose d'étudier, en fonction d'un paramètre $\alpha > 0$, la nature de la suite définie par :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha + n^\alpha}.$$

1. Dans cette question, on fixe une valeur quelconque du paramètre $\alpha > 0$.
   (a) Montrer que : $$\forall n \geqslant 1, \quad \tfrac{n^{1-\alpha}}{2} \leqslant u_n \leqslant \tfrac{n}{1+n^\alpha}.$$
   (b) En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ dans les cas $\alpha \in]0,1[$ et $\alpha \in]1,+\infty[$. Dans chacun de ces deux cas, préciser la valeur de la limite de u_n quand $n \to +\infty$ si elle existe.
2. Dans cette question, on considère le cas $\alpha = 1$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
   (b) Prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.
   (c) Montrer que $\ln(1+x) \leqslant x \leqslant -\ln(1-x)$ pour tout $x \in]-1,1[$.
   (d) En appliquant cette inégalité à $x = \frac{1}{k+n}$, montrer que : $$\forall n \geqslant 1, \quad \ln\left(\tfrac{2n+1}{n+1}\right) \leqslant u_n \leqslant \ln(2).$$
   (e) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
3. Dans cette question, on revient au cas général $\alpha > 0$ et on souhaite déterminer un équivalent de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$. Pour cela, on pose la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha+1}$.
   (a) Soit $n \geqslant 1$. En utilisant la monotonie de f sur $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, montrer que : $$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \frac{1}{n} f(\tfrac{k}{n}) \leqslant \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n} f(\tfrac{k-1}{n}).$$
   (b) En déduire que : $$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{u_n}{n^{1-\alpha}} \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{u_n}{n^{1-\alpha}} + \frac{1}{2n}.$$
   (c) Déterminer un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$ en fonction de n, α et $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.
   (d) Calculer I dans le cas $\alpha = 1$ et retrouver le résultat de la question 2.
   (e) Déterminer un équivalent simple de u_n quand $n \to +\infty$ dans le cas $\alpha = 2$.

Informatique

Toutes les fonctions doivent être écrites en Python.

1. Écrire une fonction `suite(n,alpha)` qui calcule les termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ du Problème 1.
2. Écrire une fonction `transpose` qui prend en argument une matrice de taille quelconque et renvoie sa matrice transposée.
3. On suppose avoir écrit deux fonctions `a(n)` et `b(n)` qui calculent les termes de deux suites adjacentes $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$. On rappelle que ces deux suites convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et que $a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$ pour tout $n \geqslant 0$. Écrire une fonction `approche(epsilon)` qui prend en argument un réel `epsilon` > 0 et renvoie une valeur approchée de la limite ℓ à `epsilon` près, c'est-à-dire que : $$|\ell - \texttt{appproche(epsilon)}| \leqslant \texttt{epsilon}.$$
4. Écrire une fonction `est_colineaire` qui prend en arguments deux listes des composantes de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et renvoie le booléen `True` si ces vecteurs sont colinéaires et `False` sinon.
5. Écrire une fonction `ecarttype` qui prend en argument une liste de modalités (dont les effectifs sont supposés égaux à 1) et renvoie la valeur de leur écart type.
6. Écrire une fonction `produit` qui prend en argument deux listes des coefficients de deux polynômes (par exemple la liste `[1,2,0,3]` pour le polynôme $1+2X+3X^3$) et renvoie la liste des coefficients du produit de ces deux polynômes.

Problème 2

Dans tout ce problème, on se place dans un plan affine $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On désigne par «triangle» une figure formée par trois points distincts et non alignés de $\mathscr{P}$, appelés sommets. On rappelle que les hauteurs d'un triangle sont les trois droites passant par un des sommets de ce triangle et perpendiculaires à la droite contenant les deux autres sommets.

1. Dans cette question, on fixe un triangle ABC de $\mathscr{P}$.
   (a) Soit $M \in \mathscr{P}$ un point quelconque. Montrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$.
   (b) En déduire que les trois hauteurs de ABC sont concourantes en un point H.

On rappelle que le point H de concourance des hauteurs d'un triangle est appelé l'orthocentre de ce triangle. Étant donnée une partie $X \subset \mathscr{P}$, on note $\mathscr{H}(X)$ l'ensemble des orthocentres des triangles dont les sommets appartiennent à X. De plus, on dit que la partie X est «orthocentrique» lorsque $\mathscr{H}(X) \subset X$, c'est-à-dire lorsque tout orthocentre d'un triangle formé de trois points distincts et non alignés de X appartient à X.

2. Justifier que toute partie X incluse dans une droite de $\mathscr{P}$ est orthocentrique.

Dans la suite du problème, on considère des exemples de parties X non incluses dans une droite.

3. Dans cette question, on considère une partie X_1 formée de l'union d'une droite $\mathscr{D}$ de $\mathscr{P}$ et d'un point $M \in \mathscr{P}$ qui n'appartient pas à $\mathscr{D}$. Quitte à changer de repère orthonormé, on suppose que $\mathscr{D}$ est la droite d'équation cartésienne $y = 0$ et que M est d'abscisse nulle. On note $(0, m)$ les coordonnées de M dans ce repère.
   (a) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et passant par M.
   (b) Soient A et B deux points distincts de $\mathscr{D}$ d'abscisses respectives a et b. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABM.
   (c) Réciproquement, soit H un point de Δ d'ordonnée h. Trouver les coordonnées de deux points distincts $(A, B) \in \mathscr{D}^2$ tels que H soit l'orthocentre du triangle ABM.
   (d) En déduire $\mathscr{H}(X_1)$. La partie X_1 est-elle orthocentrique ?
   (e) Justifier brièvement que la partie $X_2 = X_1 \cup \mathscr{H}(X_1)$ est orthocentrique.
4. Dans cette question, on considère une partie de la forme $X_3 = \mathscr{C}$ où $\mathscr{C}$ est un cercle de $\mathscr{P}$. Quitte à changer de repère orthonormé, on suppose que $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon $R > 0$, c'est-à-dire l'ensemble des points $S(\theta)$ de coordonnées $(R\cos(\theta), R\sin(\theta))$ où $\theta \in [0, 2\pi[$.
   (a) Soient α, β et γ trois réels distincts de $[0, 2\pi[$. Montrer que le point H de coordonnées
   $$\Big(R(\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma)), R(\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma))\Big)$$
   est l'orthocentre du triangle $S(\alpha)S(\beta)S(\gamma)$.
   (b) Calculer la distance OH pour $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$. La partie X_3 est-elle orthocentrique ?
5. Dans cette question, on considère la partie $X_4 \subset \mathscr{P}$ d'équation cartésienne $xy = k$ où $k \in \mathbb{R}$ est un paramètre fixé.
   (a) À l'aide d'un résultat précédent, justifier que X_4 est orthocentrique dans le cas où $k = 0$.
   Dans les questions suivantes, on suppose que $k \neq 0$.
   (b) Sur un schéma du plan $\mathscr{P}$, représenter graphiquement la partie X_4 dans le cas où $k = 1$.
   (c) Soient A, B et C trois points distincts de X_4 d'abscisses respectives a, b et c.
      i. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur de ABC passant par A.
      ii. Montrer que les coordonnées (x, y) de l'orthocentre H du triangle ABC vérifient :
      $$\begin{pmatrix} abc & -kc \\ abc & -kb \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abc^2 - k^2 \\ ab^2c - k^2 \end{pmatrix}.$$
      iii. En déduire que X_4 est orthocentrique.