# DS n° 5 de mathématiques

## durée : 2 heures

*L'usage de la calculatrice ou de documents est interdit.*
*Il est recommandé de lire l'ensemble de l'énoncé attentivement et patiemment.*
*Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en mentionnant les hypothèses que vous avez été amené à formuler.*
*Le soin de la présentation, la qualité de la rédaction, ainsi que la rigueur, la clarté et la concision des raisonnements constitueront un facteur important d'appréciation de la copie.*

### Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne d'inconnues. Résoudre le système linéaire $AX = \lambda X$ en fonction des valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.

### Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3 + x + 2}$.

1. Étudier la fonction $g : x \mapsto x^3 + x + 2$ et en déduire que $f$ admet des primitives sur $]-1, +\infty[$.
2. À l'aide d'un système linéaire, trouver trois constantes $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3$ telles que :
$$\forall x > -1, \quad f(x) = \mu_1 \left(\frac{1}{x+1}\right) + \mu_2 \left(\frac{2x-1}{x^2 - x + 2}\right) + \mu_3 \left(\frac{1}{x^2 - x + 2}\right).$$
3. Déterminer les primitives des fonctions $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ et $f_2 : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x^2 - x + 2}$ sur $]-1, +\infty[$.
4. Pour cette question, on fixe un réel $x > -1$.
   (a) Écrire l'expression $x^2 - x + 2$ sous la forme $\gamma\big((\alpha x + \beta)^2 + 1\big)$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ sont trois constantes à déterminer.
   (b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - t + 2}$ à l'aide du changement de variable $s = \alpha t + \beta$.
5. Déduire des résultats précédents la forme des primitives de $f$ sur $]-1, +\infty[$.

### Exercice 3

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer $M^2$ et $M^3$.
2. À l'aide d'un système linéaire, trouver trois constantes $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ telles que $P(M) = 0_3$ où $P$ est la fonction polynomiale $P : x \mapsto x^3 + ax^2 + bx + c$.
3. En déduire que $M$ est inversible et calculer son inverse.

### Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^1 x^n e^{1-x} \mathrm{d}x$.

1. Calculer $I_0$ et $I_1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre $I_{n+1}$ et $I_n$.
3. En déduire que $I_n = e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.