Corrigé du DS n° 5 de mathématiques

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *et on pose* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *une matrice colonne d'inconnues. Résoudre le système linéaire* $AX = \lambda X$ *en fonction des valeurs du paramètre* $\lambda \in \mathbb{R}$.

► On a :

$$\begin{aligned}
AX = \lambda X &\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} y+z \\ -2x+3y+2z \\ 2x-2y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} \quad \text{par calcul matriciel} \\
&\iff \begin{cases} y+z = \lambda x \\ -2x+3y+2z = \lambda y \\ 2x-2y-z = \lambda z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -\lambda x + y + z = 0 \\ -2x + (3-\lambda)y + 2z = 0 \\ 2x - 2y - (1+\lambda)z = 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

On reconnaît un système linéaire homogène, donc $(x,y,z) = (0,0,0)$ est une solution évidente, qu'on va échelonner à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned}
AX = \lambda X &\iff \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -2 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & -2 & -(1+\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \end{array} \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & 3-\lambda & 2 \\ -\lambda & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -(1+\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 - \lambda L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & 3-\lambda & 2 \\ 0 & * & 2-2\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{où} \quad * = 2-\lambda(3-\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \\ \qquad\quad = (\lambda-1)(\lambda-2) = (1-\lambda)(2-\lambda) \\ \text{car 1 et 2 sont racines évidentes} \end{array} \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & (1-\lambda)(2-\lambda) & 2(1-\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{après } L_2 \leftrightarrow L_3.
\end{aligned}$$

On raisonne par disjonction de cas.
<u>1^er cas :</u> $1 - \lambda = 0 \iff \boxed{\lambda = 1}$. Alors :

$$AX = \lambda X \iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = y + z.$$

On obtient un système linéaire homogène échelonné de $\boxed{\text{rang } 1}$ qui admet une infinité de solutions de la forme : $(x,y,z) = (y+z, y, z)$ où $(y,z) \in \mathbb{R}^2$ sont quelconques.

2^{e} cas : $\boxed{\lambda \neq 1}$. Puisque $1-\lambda \neq 0$, on peut simplifier par $1-\lambda$ dans les lignes L_2 et L_3 à l'aide des opérations $L_2 \leftarrow \frac{1}{1-\lambda}L_2$ et $L_3 \leftarrow \frac{1}{1-\lambda}L_3$. On a alors :

$$\begin{aligned}
AX = \lambda X &\iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & 3-\lambda & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - (2-\lambda)L_2 \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & 3-\lambda & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

1er sous-cas : $\boxed{\lambda \neq 0}$. On obtient un système linéaire échelonné de $\boxed{\text{rang 3 maximal}}$ qui admet pour unique solution la solution évidente $(x,y,z) = (0,0,0)$.
2^{e} sous-cas : $\boxed{\lambda = 0}$. On obtient un système linéaire échelonné de $\boxed{\text{rang 2}}$ qui admet une infinité de solutions qu'on peut exprimer en fonction de l'inconnue auxiliaire z :

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} y+z=0 \\ -2x+3y+2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -z \\ x = \dfrac{1}{2}(3y+2z) = \dfrac{-z}{2} \end{cases}.$$

Conclusion. Finalement, l'ensemble des $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ solutions de $AX = \lambda X$ est égal à :

$$\boxed{\begin{cases} \left\{(-z/2, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\right\} & \text{si } \lambda = 0 \\ \left\{(0,0,0)\right\} & \text{si } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \\ \left\{(y+z, y, z) \mid (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} & \text{si } \lambda = 1 \end{cases}}.$$

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3+x+2}$.

1. *Étudier la fonction $g : x \mapsto x^3+x+2$ et en déduire que f admet des primitives sur $]-1,+\infty[$.*

   ▶ La fonction $g : x \mapsto x^3+x+2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale. On a :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 3x^2+1 \geqslant 1 > 0 \quad \text{car } x^2 \geqslant 0.$$

   On en déduit que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	↗	0	↗

   On remarque que $g(-1) = (-1)^3 - 1 + 2 = 0$, donc g est strictement positive sur $]-1,+\infty[$. Par conséquent, f est continue sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ comme inverse d'une fonction continue (car dérivable) qui ne s'annule pas. On en déduit que $\boxed{f \text{ admet des primitives sur }]-1,+\infty[}$.

2. *À l'aide d'un système linéaire, trouver trois constantes $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3$ telles que :*

   $$\forall x > -1, \quad f(x) = \mu_1\left(\frac{1}{x+1}\right) + \mu_2\left(\frac{2x-1}{x^2-x+2}\right) + \mu_3\left(\frac{1}{x^2-x+2}\right).$$

▶ On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse. On cherche trois constantes $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3$ telles que :

$$\forall x > -1, \quad \frac{1}{x^3+x+2} = \mu_1\left(\frac{1}{x+1}\right) + \mu_2\left(\frac{2x-1}{x^2-x+2}\right) + \mu_3\left(\frac{1}{x^2-x+2}\right)$$
$$= \frac{\mu_1(x^2-x+2) + \mu_2 \overbrace{(2x-1)(x+1)}^{=2x^2+x-1} + \mu_3(x+1)}{(x+1)(x^2-x+2)}$$
$$= \frac{(\mu_1+2\mu_2)x^2 + (-\mu_1+\mu_2+\mu_3)x + (2\mu_1-\mu_2+\mu_3)}{x^3+x+2}.$$

En multipliant par x^3+x+2 de chaque côté, on veut donc que :

$$\forall x > -1, \quad 0x^2+0x+1 = (\mu_1+2\mu_2)x^2 + (-\mu_1+\mu_2+\mu_3)x + (2\mu_1-\mu_2+\mu_3).$$

En identifiant les coefficients de polynômes de degré 2, on obtient le système linéaire suivant qu'on échelonne à l'aide de la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} \mu_1+2\mu_2 = 0 \\ -\mu_1+\mu_2+\mu_3 = 0 \\ 2\mu_1-\mu_2+\mu_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1 \end{matrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow 3L_3+5L_2$$
$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On obtient un système linéaire échelonné de $\boxed{\text{rang 3 maximal}}$ qui admet une unique solution :

$$\begin{cases} 8\mu_3 = 3 \\ 3\mu_2+\mu_3 = 0 \\ \mu_1+2\mu_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu_3 = 3/8 \\ \mu_2 = -\mu_3/3 = -1/8 \\ \mu_1 = -2\mu_2 = 1/4 \end{cases}.$$

Synthèse. On pose $\boxed{\mu_1 = \frac{1}{4}}$, $\boxed{\mu_2 = \frac{-1}{8}}$ et $\boxed{\mu_3 = \frac{3}{8}}$. D'après les calculs de l'analyse, on a bien :

$$\forall x > -1, \quad f(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{2x-1}{x^2-x+2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{x^2-x+2}\right).$$

3. *Déterminer les primitives des fonctions $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ et $f_2 : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x^2-x+2}$ sur $]-1,+\infty[$.*

▶ On reconnaît des fonctions de la forme $\dfrac{u'}{u}$ qui est la dérivée usuelle de $\ln|u|$.

— Pour f_1, on pose $u : x \mapsto x+1$ (donc $u' : x \mapsto 1$). Puisque $x+1 > 0$ pour tout $x \in]-1,+\infty[$, on en déduit que les primitives de f_1 sur $]-1,+\infty[$ sont toutes de la forme :

$$\boxed{F_1 : x \mapsto \ln(x+1) + C_1 \quad \text{où } C_1 \in \mathbb{R} \text{ est une constante quelconque}}.$$

— Pour f_2, on pose $u : x \mapsto x^2-x+2$ (donc $u' : x \mapsto 2x-1$). On reconnaît un polynôme de degré 2 de discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0$. Donc $x^2-x+2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que les primitives de f_2 sur $]-1,+\infty[$ sont toutes de la forme :

$$\boxed{F_2 : x \mapsto \ln(x^2-x+2) + C_2 \quad \text{où } C_2 \in \mathbb{R} \text{ est une constante quelconque}}.$$

N'oubliez pas de vérifier que $u(x) > 0$ pour tout $x \in]-1,+\infty[$ afin de justifier la disparition des valeurs absolues.

4. *Pour cette question, on fixe un réel $x > -1$.*

(a) *Écrire l'expression $x^2 - x + 2$ sous la forme $\gamma\big((\alpha x+\beta)^2+1\big)$ où $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$ sont trois constantes à déterminer.*

► On utilise la forme canonique des polynômes de degré 2 :

$$\begin{aligned} x^2 - x + 2 &= \underbrace{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}_{=x^2-x+\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} + 2 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \\ &= \frac{7}{4}\left(\frac{4}{7}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1\right) = \frac{7}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)^2+1\right) \\ &= \frac{7}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{7}}x-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2+1\right). \end{aligned}$$

Il suffit donc de poser $\boxed{\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}}$, $\boxed{\beta = \frac{-1}{\sqrt{7}}}$ et $\boxed{\gamma = \frac{7}{4}}$.

(b) *Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+2}$ à l'aide du changement de variable $s = \alpha t + \beta$.*

► D'après le résultat de la question précédente, on utilise le changement de variable :

$$s = \alpha t + \beta = \frac{2}{\sqrt{7}}t - \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{2t-1}{\sqrt{7}} \iff t = \frac{\sqrt{7}s+1}{2} = \varphi(s).$$

On commence par vérifier les hypothèses du théorème de changement de variable dans une intégrale.
— la fonction $\varphi : s \mapsto (\sqrt{7}s+1)/2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale ;
— si $t = 0$ alors $s = -1/\sqrt{7}$, et si $t = x$ alors $s = (2x-1)/\sqrt{7}$;
— $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}\varphi(s)}{\mathrm{d}s} = \varphi'(s) = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ donc $\mathrm{d}t = \dfrac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{d}s$.

De plus, on a d'après le résultat de la question précédente :

$$t^2 - t + 2 = \gamma\big((\alpha t+\beta)^2+1\big) = \frac{7}{4}\big(s^2+1\big).$$

On peut aussi retrouver ce résultat par le calcul :

$$\begin{aligned} t^2 - t + 2 &= \left(\frac{\sqrt{7}s+1}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{7}s+1}{2} + 2 \\ &= \frac{1}{4}\left(7s^2 + 2\sqrt{7}s + 1 - 2\left(\sqrt{7}s+1\right) + 4\times 2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(7s^2+7\right) = \frac{7}{4}\left(s^2+1\right). \end{aligned}$$

C'est plus long, mais ça permet de vérifier les calculs de la question précédente.

Par conséquent, on a en appliquant le théorème de changement de variable dans une intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+2} &= \int_{-1/\sqrt{7}}^{(2x-1)/\sqrt{7}} \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{d}s}{\frac{7}{4}(s^2+1)}\\
&= \frac{2\sqrt{7}}{7}\int_{-1/\sqrt{7}}^{(2x-1)/\sqrt{7}} \frac{\mathrm{d}s}{s^2+1} \quad \text{par linéarité de l'intégrale}\\
&= \frac{2\sqrt{7}}{7}\Big[\arctan(s)\Big]_{-1/\sqrt{7}}^{(2x-1)/\sqrt{7}} \quad \text{en reconnaissant la dérivée de arctangente}\\
&= \boxed{\frac{2\sqrt{7}}{7}\left(\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)-\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{7}}\right)\right)}.
\end{aligned}$$

5. *Déduire des résultats précédents la forme des primitives de f sur $]-1,+\infty[$.*

► On sait que f admet une infinité de primitives sur $]-1,+\infty[$ d'après le résultat de la question 1. On note F_0 l'unique primitive de f sur $]-1,+\infty[$ qui s'annule en 0. D'après le théorème fondamental de l'analyse, on sait que :

$$\begin{aligned}
\forall x>-1,\quad F_0(x) &= \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^3+t+2}\\
&= \int_0^x \left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t+1}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{2t-1}{t^2-t+2}\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{1}{t^2-t+2}\right)\right)\mathrm{d}t \quad \text{d'après le résultat de la question 2}\\
&= \frac{1}{4}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t+1}-\frac{1}{8}\int_0^x \frac{2t-1}{t^2-t+2}\mathrm{d}t+\frac{3}{8}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+2} \quad \text{par linéarité de l'intégrale}\\
&= \frac{1}{4}\Big[\ln(t+1)\Big]_0^x-\frac{1}{8}\Big[\ln(t^2-t+2)\Big] \quad \text{d'après les résultats de la question 3}\\
&\quad +\frac{3}{8}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}\left(\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)-\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{7}}\right)\right) \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}\\
&= \frac{1}{4}\Big(\ln(x+1)-\underbrace{\ln(1)}_{=0}\Big)-\frac{1}{8}\Big(\ln(x^2-x+2)-\ln(2)\Big)\\
&\quad +\frac{3\sqrt{7}}{28}\left(\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)-\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{7}}\right)\right)\\
&= \frac{1}{4}\ln(x+1)-\frac{1}{8}\ln(x^2-x+2)+\frac{3\sqrt{7}}{28}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)\\
&\quad +\underbrace{\frac{\ln(2)}{8}-\frac{3\sqrt{7}}{28}\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{7}}\right)}_{\text{constante}}.
\end{aligned}$$

Finalement, on en déduit que les primitives de f sur $]-1,+\infty[$ sont toutes de la forme :

$$\boxed{\begin{array}{c} F : x\mapsto \frac{1}{4}\ln(x+1)-\frac{1}{8}\ln(x^2-x+2)+\frac{3\sqrt{7}}{28}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)+C\\ \text{où } C\in\mathbb{R} \text{ est un constante quelconque}\end{array}}.$$

Exercice 3

On considère la matrice $M=\begin{pmatrix}-1&0&-1\\-4&1&4\\2&0&-4\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. *Calculer M^2 et M^3.*

▶ On a par définition du produit matriciel :

$$M^2 = MM = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 8 & 1 & -8 \\ -10 & 0 & 14 \end{pmatrix}},$$

$$\text{et} \quad M^3 = MM^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 8 & 1 & -8 \\ -10 & 0 & 14 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 11 & 0 & -19 \\ -28 & 1 & 28 \\ 38 & 0 & -46 \end{pmatrix}}.$$

2. *À l'aide d'un système linéaire, trouver trois constantes $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ telles que $P(M) = 0_3$ où P est la fonction polynomiale $P : x \mapsto x^3 + ax^2 + bx + c$.*

▶ On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse. On cherche trois constantes $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ telles que $P(M) = 0_3$. Or :

$$\begin{aligned} P(M) &= M^3 + aM^2 + bM + cI_3 \\ &= \begin{pmatrix} 11 & 0 & -19 \\ -28 & 1 & 28 \\ 38 & 0 & -46 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 8 & 1 & -8 \\ -10 & 0 & 14 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} && \text{d'après les résultats de la question précédente} \\ &= \begin{pmatrix} 11 - a - b + c & 0 & -19 + 5a - b \\ -28 + 8a - 4b & 1 + a + b + c & 28 - 8a + 4b \\ 38 - 10a + 2b & 0 & -46 + 14a - 4b + c \end{pmatrix} && \text{par calcul matriciel.} \end{aligned}$$

En identifiant avec les coefficients de la matrice nulle 0_3, on obtient le système linéaire de 9 équations suivant :

$$P(M) = 0_3 \iff \begin{cases} 11 - a - b + c = 0 \\ 0 = 0 \\ -19 + 5a - b = 0 \\ -28 + 8a - 4b = 0 \\ 1 + a + b + c = 0 \\ 28 - 8a + 4b = 0 \\ 38 - 10a + 2b = 0 \\ 0 = 0 \\ -46 + 14a - 4b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b - c = 11 \\ 0 = 0 \\ 5a - b = 19 \\ 2a - b = 7 \quad \text{en divisant par } 4 \\ a + b + c = -1 \\ 2a - b = 7 \quad \text{en divisant par } -4 \\ 5a - b = -19 \quad \text{en divisant par } -2 \\ 0 = 0 \\ 14a - 4b + c = 46 \end{cases}.$$

En supprimant les équations inutiles ou en double, on peut se ramener à un système linéaire de 5 équations qu'on échelonne à l'aide de la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} P(M) = 0_3 &\iff \begin{cases} a + b - c = 11 \\ 5a - b = 19 \\ 2a - b = 7 \\ a + b + c = -1 \\ 14a - 4b + c = 46 \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 14 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 19 \\ 7 \\ -1 \\ 46 \end{pmatrix} \begin{array}{r} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 14L_1 \end{array} \\ &\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{-6} & 5 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -18 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -36 \\ -15 \\ -12 \\ -108 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \\ \\ L_5 \leftarrow L_5 - 3L_2 \end{array} \end{aligned}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{-6} & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -36 \\ 6 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{-6} & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -36 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient un système linéaire échelonné de $\boxed{\text{rang } 3}$ avec deux équations auxiliaires qui sont compatibles et pas d'inconnue auxiliaire. Il admet donc une unique solution :

$$\begin{cases} -c = 6 \\ -6b + 5c = -36 \\ a + b - c = 11 \end{cases} \iff \begin{cases} c = -6 \\ b = (36 + 5c)/6 = 6/6 = 1 \\ a = 11 - b + c = 4 \end{cases}$$

Synthèse. On pose $\boxed{a = 4}$, $\boxed{b = 1}$ et $\boxed{c = -6}$. D'après les calculs de l'analyse, on a bien que $P(M) = 0_3$.

3. *En déduire que M est inversible et calculer son inverse.*

► On cherche une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AM = I_3$ et $MA = I_3$. On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse. D'après le résultat de la question précédente, on sait que :

$$P(M) = M^3 + 4M^2 + M - 6I_3 = 0_3.$$

Par conséquent :

$$I_3 = \frac{1}{6}\big(M^3 + 4M^2 + \underbrace{M}_{=I_3M}\big) = \underbrace{\frac{1}{6}\big(M^2 + 4M + I_3\big)}_{=A} M \quad \text{en factorisant à droite par } M.$$

Synthèse. On pose $A = \frac{1}{6}(M^2 + 4M + I_3)$. D'après les calculs de l'analyse, on a que $AM = I_3$. De même, on a d'après le résultat de la question précédente :

$$MA = M\frac{1}{6}\big(M^2 + 4M + I_3\big) = \frac{1}{6}\big(M^3 + 4M^2 + M\big) = I_3.$$

On en déduit que $\boxed{M \text{ est inversible}}$ et que son inverse est égal à :

$$\begin{aligned} M^{-1} = A &= \frac{1}{6}\big(M^2 + 4M + I_3\big) \\ &= \frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 8 & 1 & -8 \\ -10 & 0 & 14 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} -2/3 & 0 & 1/6 \\ -4/3 & 1 & 4/3 \\ -1/3 & 0 & -1/6 \end{pmatrix}} \quad \text{par calcul matriciel.} \end{aligned}$$

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 x^n e^{1-x}\mathrm{d}x$.

1. *Calculer I_0 et I_1.*

▶ On a :

$$I_0 = \frac{1}{0!}\int_0^1 x^0 e^{1-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{1-x}\mathrm{d}x = \Big[-e^{1-x}\Big]_0^1 = -e^0 + e^1 = \boxed{e-1},$$

$$\begin{aligned} \text{et}\quad I_1 &= \frac{1}{1!}\int_0^1 x^1 e^{1-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 x e^{1-x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 u(x)v'(x)\mathrm{d}x \quad \text{en posant} \quad \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{1-x} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{1-x} \end{cases}. \end{aligned}$$

Les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto -e^{1-x}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composées de fonctions usuelles qui le sont. On peut donc appliquer le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_1 &= \Big[u(x)v(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\mathrm{d}x \\ &= \Big[-xe^{1-x}\Big]_0^1 - \int_0^1 -e^{1-x}\mathrm{d}x = -e^0 - 0 - \Big[e^{1-x}\Big]_0^1 = -1 - \Big(e^0 - e^1\Big) = \boxed{e-2}. \end{aligned}$$

2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.*

▶ On a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 x^{n+1}e^{1-x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 u(x)v'(x)\mathrm{d}x \quad \text{en posant} \quad \begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = e^{1-x} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = -e^{1-x} \end{cases}. \end{aligned}$$

Les fonctions $u : x \mapsto x^{n+1}$ et $v : x \mapsto -e^{1-x}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composées de fonctions usuelles qui le sont. On peut donc appliquer le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!}\left(\Big[u(x)v(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left(\Big[-x^{n+1}e^{1-x}\Big]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)x^n e^{1-x}\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left(-e^0 - 0 + (n+1)\int_0^1 x^n e^{1-x}\mathrm{d}x\right) \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \frac{-1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+1)!}\int_0^1 x^n e^{1-x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{-1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n e^{1-x}\mathrm{d}x \quad \text{car } (n+1)! = n! \times (n+1) \\ &= \boxed{\frac{-1}{(n+1)!} + I_n}. \end{aligned}$$

3. *En déduire que $I_n = e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

▶ On raisonne par récurrence.

<u>Initialisation.</u> Pour $n = 0$, on a $I_0 = e - 1$ d'après le résultat de la question 1 et :

$$e - \sum_{k=0}^{0}\frac{1}{k!} = e - \frac{1}{0!} = e - 1.$$

Donc le résultat est vérifié au rang $n = 0$.

Hérédité. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $I_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. On a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{-1}{(n+1)!} + I_n \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\ &= \frac{-1}{(n+1)!} + e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= e - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \quad \text{par associativité de la somme.} \end{aligned}$$

Donc si le résultat est vrai au rang n alors il est vrai aussi au rang $n+1$, et cette implication est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}.$$

Ce résultat permet de calculer des valeurs approchées de la constante e. En effet, on remarque que :

$$\forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant 1^n \times e^1 = e.$$

D'où, par monotonie de l'intégrale :

$$0 = \frac{1}{n!}\int_0^1 0 \mathrm{d}x \leqslant \underbrace{\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n e^{1-x} \mathrm{d}x}_{=I_n} \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 e \mathrm{d}x = \frac{e}{n!}.$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes. Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e.$$

Il suffit donc de calculer cette somme pour une grande valeur de n (par exemple avec une fonction Python) afin d'obtenir une valeur approchée de la constante e.