Corrigé du DS n° 5 de mathématiques et d'informatique

Problème 1

Ce problème propose d'étudier, en fonction d'un paramètre $\alpha > 0$, la nature de la suite définie par :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha + n^\alpha}.$$

1. *Dans cette question, on fixe une valeur quelconque du paramètre $\alpha > 0$.*

   (a) *Montrer que :* $\forall n \geqslant 1, \quad \frac{n^{1-\alpha}}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{n}{1+n^\alpha}$.

   ► Soit $n \geqslant 1$. Puisque $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On en déduit que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

   $$1 = 1^\alpha \leqslant k^\alpha \leqslant n^\alpha \quad \text{donc} \quad 1 + n^\alpha \leqslant k^\alpha + n^\alpha \leqslant n^\alpha + n^\alpha = 2n^\alpha.$$

   Puis on a d'après la stricte décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$:

   $$\frac{1}{1+n^\alpha} \geqslant \frac{1}{k^\alpha + n^\alpha} \geqslant \frac{1}{2n^\alpha}.$$

   En sommant pour $k \in [\![1, n]\!]$ toutes ces inégalités, on obtient :

   $$\frac{n}{1+n^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+n^\alpha} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha + n^\alpha} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n^\alpha} = \frac{n}{2n^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{2}.$$

   Finalement, on a bien montré que :

   $$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{\frac{n^{1-\alpha}}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{n}{1+n^\alpha}}.$$

   (b) *En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ dans les cas $\alpha \in]0, 1[$ et $\alpha \in]1, +\infty[$. Dans chacun de ces deux cas, préciser la valeur de la limite de u_n quand $n \to +\infty$ si elle existe.*

   ► Si $\alpha \in]0, 1[$ alors $1 - \alpha > 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{2} = +\infty$. D'après le résultat de la question précédente et le théorème de limite par comparaison, on en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$ et donc que $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 1} \text{ est divergente de } 1^{\text{re}} \text{ espèce}}$.

   Si $\alpha \in]1, +\infty[$ alors $1 - \alpha < 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{2} = 0$. De plus, on a :

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{1+n^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{n^{-\alpha}+1} = \frac{0}{0+1} = 0 \quad \text{car } -\alpha < 0.$$

   D'après le résultat de la question précédente et le théorème de limite par encadrement, on en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$ et donc que $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 1} \text{ est convergente}}$.

2. *Dans cette question, on considère le cas $\alpha = 1$.*

   (a) *Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.*

▶ Soit $n \geqslant 1$. On a dans le cas $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^1 + (n+1)^1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^1 + n^1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k+1)+n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \\
&= \sum_{i=2}^{n+2} \frac{1}{i+n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \quad \text{en posant } i = k+1 \\
&= \frac{1}{n+2+n} + \frac{1}{n+1+n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+n} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+n} - \frac{1}{1+n} \quad \text{par associativité} \\
&= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{(2n+1)(n+1) + (2n+2)(n+1) - (2n+2)(2n+1)}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} \\
&= \frac{(2n^2+3n+1) + (2n^2+4n+2) - (4n^2+6n+2)}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} \\
&= \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} > 0.
\end{aligned}$$

On en déduit bien que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ est croissante}}$.

On peut aussi aller plus vite au début du calcul de $u_{n+1} - u_n$ en reconnaissant des sommes télescopiques.

(b) *Prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.*

▶ D'après le résultat de la question 1(a), on a :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n \leqslant \frac{n}{1+n^1} = \frac{n}{1+n} \leqslant 1 \quad \text{car } 0 < n \leqslant 1+n.$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée par 1.

Attention : $\frac{n}{1+n}$ n'est pas un majorant car il dépend de n !!

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante d'après le résultat de la question précédente et majorée. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ est convergente}}$.

(c) *Montrer que $\ln(1+x) \leqslant x \leqslant -\ln(1-x)$ pour tout $x \in]-1,1[$.*

▶ On pose la fonction $g : x \mapsto x - \ln(1+x)$. Cette fonction est bien définie et dérivable sur $]-1,1[$ comme somme et composée de fonctions usuelles. On a pour tout $x \in]-1,1[$:

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Puisque $1+x > 0$ car $x > -1$, on en déduit que $g'(x)$ est du signe de x. Par conséquent, la fonction g est strictement décroissante sur $]-1,0]$ et strictement croissante sur $[0,1[$. En particulier, la fonction g admet un minimum en 0 valant $g(0) = 0 - \ln(1) = 0$. On en déduit pour tout $x \in]-1,1[$ que :

$$g(x) \geqslant 0 \quad \text{donc} \quad \ln(1+x) \leqslant x.$$

De plus, si $x \in]-1,1[$ alors $-x \in]-1,1[$. Ainsi, l'inégalité précédente donne aussi en remplaçant x par $-x$:

$$\ln(1-x) \leqslant -x \quad \text{donc} \quad x \leqslant -\ln(1-x).$$

On peut aussi étudier la fonction $h : x \mapsto -\ln(1-x) - x$ pour démontrer cette inégalité (comme pour obtenir la première inégalité à l'aide de l'étude de la fonction g) mais c'est plus long.

Finalement, on a bien montré que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \boxed{\ln(1+x) \leqslant x \leqslant -\ln(1-x)}.$$

(d) En appliquant cette inégalité à $x = \frac{1}{k+n}$, montrer que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \ln\left(\tfrac{2n+1}{n+1}\right) \leqslant u_n \leqslant \ln(2).$$

► Soient $n \geqslant 1$ et $k \in [\![1, n]\!]$. En reprenant le raisonnement de la question 1(a), on a :

$$-1 < 0 < \frac{1}{2n^1} \leqslant \frac{1}{k+n} \leqslant \frac{n}{1+n^1} < 1 \quad \text{car } 0 < 1 < 1+n.$$

On peut donc appliquer l'inégalité de la question précédente à $x = \frac{1}{k+n} \in]-1, 1[$:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{k+n}\right) \leqslant \frac{1}{k+n} \leqslant -\ln\left(1 - \frac{1}{k+n}\right).$$

En sommant pour $k \in [\![1, n]\!]$ toutes ces inégalités, on obtient :

$$\begin{aligned}
u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k+n}\right) &= \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k+n}\right)\right) \\
&= \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k+n+1}{k+n}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\prod_{k=1}^{n}((k+1)+n)}{\prod_{k=1}^{n}(k+n)}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\prod_{i=2}^{n+1}(i+n)}{\prod_{k=1}^{n}(k+n)}\right) \quad \text{en posant } i = k+1 \\
&= \ln\left(\frac{n+1+n}{1+n}\right) \quad \text{après simplifications} \\
&= \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

On peut aussi aller plus vite en reconnaissant un produit télescopique.

et de même
$$\begin{aligned}
u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \leqslant -\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k+n}\right) &= -\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{k+n}\right)\right) \\
&= -\ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k+n-1}{k+n}\right) \\
&= -\ln\left(\frac{1+n-1}{n+n}\right) \quad \text{après simplifications} \\
&= -\ln\left(\frac{n}{2n}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2).
\end{aligned}$$

Finalement, on a bien montré que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{\ln\left(\tfrac{2n+1}{n+1}\right) \leqslant u_n \leqslant \ln(2)}.$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

► On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right) = \ln\left(\frac{2+0}{1+0}\right) = \ln(2).$$

D'après le résultat de la question précédente et le théorème de limite par encadrement, on en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(2)}$.

3. *Dans cette question, on revient au cas général $\alpha > 0$ et on souhaite déterminer un équivalent de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$. Pour cela, on pose la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha+1}$.*

   (a) *Soit $n \geqslant 1$. En utilisant la monotonie de f sur $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, montrer que :*

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \frac{1}{n} f(\tfrac{k}{n}) \leqslant \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n} f(\tfrac{k-1}{n}).$$

► Soit $k \in [\![1,n]\!]$. La fonction f est définie est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme et composée de fonctions usuelles. On a pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{-\alpha x^{\alpha-1}}{(x^\alpha+1)^2} < 0.$$

Par conséquent, la fonction f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. En particulier, on a pour tout $x \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$:

$$f(\tfrac{k-1}{n}) \geqslant f(x) \geqslant f(\tfrac{k}{n}).$$

Puisque f est continue sur $]0,+\infty[$, on en déduit par croissance de l'intégrale sur $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ que :

$$\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(\tfrac{k}{n})\mathrm{d}x = f(\tfrac{k}{n})\Big[x\Big]_{(k-1)/n}^{k/n} = f(\tfrac{k}{n})\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) = \frac{1}{n} f(\tfrac{k}{n})$$

$$\text{et de même} \quad \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(\tfrac{k-1}{n})\mathrm{d}x = \frac{1}{n} f(\tfrac{k-1}{n}).$$

Finalement, on a bien montré que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \boxed{\frac{1}{n} f(\tfrac{k}{n}) \leqslant \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n} f(\tfrac{k-1}{n})}.$$

   (b) *En déduire que :*

$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{u_n}{n^{1-\alpha}} \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{u_n}{n^{1-\alpha}} + \frac{1}{2n}.$$

► Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(\tfrac{k}{n}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\Big((\frac{k}{n})^\alpha + 1\Big)} = \frac{1}{\frac{n}{n^\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha + n^\alpha} = \frac{u_n}{n^{1-\alpha}}$$

et de même :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(\tfrac{k-1}{n}) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f(\tfrac{i}{n}) \quad \text{en posant } i = k-1 \\
&= \frac{1}{n} f(\tfrac{0}{n}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(\tfrac{k}{n}) - \frac{1}{n} f(\tfrac{n}{n}) \\
&= \frac{1}{n(0^\alpha+1)} + \frac{u_n}{n^{1-\alpha}} - \frac{1}{n(1^\alpha+1)} = \frac{u_n}{n^{1-\alpha}} + \frac{1}{2n}.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^{1/n} f(x)\mathrm{d}x + \int_{1/n}^{2/n} f(x)\mathrm{d}x + \int_{2/n}^{3/n} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{(n-1)/n}^{1} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Par conséquent, en sommant pour $k \in [\![1, n]\!]$ toutes les inégalités obtenues à la question précédente, on obtient :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{\frac{u_n}{n^{1-\alpha}} \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{u_n}{n^{1-\alpha}} + \frac{1}{2n}}.$$

(c) *Déterminer un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$ en fonction de n, α et $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.*

▶ Soit $n \geqslant 1$. On a $u_n > 0$ par définition de la suite. D'où, d'après le résultat de la question précédente :

$$I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{u_n}{n^{1-\alpha}} > 0.$$

On peut donc diviser l'inégalité obtenue à la question précédente par $I > 0$ et on obtient :

$$\forall n \geqslant 1, \quad 1 - \frac{1}{2In} \leqslant \frac{u_n}{In^{1-\alpha}} \leqslant 1.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{2In} = 1$. D'après le théorème de limite par encadrement, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{In^{1-\alpha}} = 1 \quad \text{donc} \quad \boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} In^{1-\alpha}}.$$

(d) *Calculer I dans le cas $\alpha = 1$ et retrouver le résultat de la question 2.*

▶ On a dans le cas $\alpha = 1$:

$$I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^1+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \Big[\ln(x+1)\Big]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$$

D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} In^{1-1} = \ln(2).$$

Par conséquent, on retrouve que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(2)}$.

(e) *Déterminer un équivalent simple de u_n quand $n \to +\infty$ dans le cas $\alpha = 2$.*

▶ On a dans le cas $\alpha = 2$:

$$I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \Big[\arctan(x)\Big]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

D'après le résultat de la question 3(c), on en déduit que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} In^{1-2} = \frac{\pi}{4}n^{-1} = \boxed{\frac{\pi}{4n}}.$$

En particulier, on retrouve que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{4n} = 0$ dans le cas $\alpha = 2 \in]1, +\infty[$ comme démontré à la question 1(b).

Informatique

Toutes les fonctions doivent être écrites en Python.

1. *Écrire une fonction* `suite(n,alpha)` *qui calcule les termes de la suite* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *du Problème 1.*

   ▶ Par exemple :

```
def suite(n,alpha):
    S=0
    for k in range(1,n+1):
        S+=1/((k**alpha)+(n**alpha))
    return S
```

2. *Écrire une fonction* `transpose` *qui prend en argument une matrice de taille quelconque et renvoie sa matrice transposée.*

   ▶ Par exemple :

```
import numpy as np
def transpose(M):
    n=len(M)
    p=len(M[0])
    tM=np.zeros((p,n))
    for i in range(p):
        for j in range(n):
            tM[i,j]=M[j,i]
    return tM
```

On peut également utiliser la fonction `shape` *de la bibliothèque* `numpy` *pour calculer les nombres de lignes et de colonnes :* `(n,p)=np.shape(M)`*.*

3. *On suppose avoir écrit deux fonctions* `a(n)` *et* `b(n)` *qui calculent les termes de deux suites adjacentes* $(a_n)_{n\geqslant 0}$ *et* $(b_n)_{n\geqslant 0}$*. On rappelle que ces deux suites convergent vers la même limite* $\ell \in \mathbb{R}$ *et que* $a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$ *pour tout* $n \geqslant 0$*. Écrire une fonction* `approche(epsilon)` *qui prend en argument un réel* `epsilon` > 0 *et renvoie une valeur approchée de la limite* ℓ *à* `epsilon` *près, c'est-à-dire que :*

$$\Big|\ell - \texttt{appproche(epsilon)}\Big| \leqslant \texttt{epsilon}.$$

   ▶ Par exemple :

```
def approche(epsilon):
    n=0
    while b(n)-a(n)>epsilon:
        n+=1
    return a(n)
```

L'approximation de la limite ℓ *par le terme* a_n *est justifiée par :*

$$0 \leqslant \ell - a_n \leqslant b_n - a_n \quad \text{donc} \quad |\ell - a_n| \leqslant b_n - a_n.$$

Ainsi, il suffit de choisir un n *suffisamment grand afin que* $b_n - a_n \leqslant$ `epsilon`*. Et ceci est possible car* $\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$*. On peut également approcher la limite* ℓ *par le terme* b_n *car :*

$$-(b_n - a_n) = a_n - b_n \leqslant \ell - b_n \leqslant 0 \quad \text{donc} \quad |\ell - b_n| \leqslant b_n - a_n.$$

4. *Écrire une fonction* `est_colineaire` *qui prend en arguments deux listes des composantes de deux vecteurs de* $\mathbb{R}^2$ *et renvoie le booléen* `True` *si ces vecteurs sont colinéaires et* `False` *sinon.*

   ▶ Par exemple :

```
def est_colineaire(u,v):
    det=u[0]*v[1]-u[1]*v[0]
    if det==0:
        return True
    else:
        return False
```

Pensez au déterminant dans le cas de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$!

5. *Écrire une fonction* `ecarttype` *qui prend en argument une liste de modalités (dont les effectifs sont supposés égaux à 1) et renvoie la valeur de leur écart type.*

   ▶ Par exemple :

```
def ecarttype(x):
    n=len(x)
    S=0
    for i in range(n):
        S+=x[i]
    moyenne=S/n
    S=0
    for i in range(n):
        S+=(x[i]-moyenne)**2
    return (S/n)**(1/2)
```

6. *Écrire une fonction* `produit` *qui prend en argument deux listes des coefficients de deux polynômes (par exemple la liste* `[1,2,0,3]` *pour le polynôme $1+2X+3X^3$) et renvoie la liste des coefficients du produit de ces deux polynômes.*

   ▶ Par exemple :

```
def produit(P,Q):
    degP=len(P)-1
    degQ=len(Q)-1
    degR=degP+degQ
    R=[]
    for k in range(degR+1):
        S=0
        for i in range(k+1):
            if i<=degP and k-i<=degQ:
                S+=P[i]*Q[k-i]
        R+=[S]
    return R
```

Cette fonction utilise la définition du produit de deux polynômes :

$$\left(\sum_{k=0}^{m} a_k X^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) X^k.$$

On peut utiliser des algorithmes différents mais plus efficaces, par exemple :

```
def produit(P,Q):
    R=[0 for i in range(len(P)+len(Q)-1)]
    for i in range(len(P)):
        for j in range(len(Q)):
            R[i+j]+=P[i]*Q[j]
    return R
```

Problème 2

Dans tout ce problème, on se place dans un plan affine $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par «triangle» une figure formée par trois points distincts et non alignés de $\mathscr{P}$, appelés sommets. On rappelle que les hauteurs d'un triangle sont les trois droites passant par un des sommets de ce triangle et perpendiculaires à la droite contenant les deux autres sommets.

1. *Dans cette question, on fixe un triangle ABC de $\mathscr{P}$.*

   (a) *Soit $M \in \mathscr{P}$ un point quelconque. Montrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$.*

   ▶ On a :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}\\
=&\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}\right).\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} \quad \text{d'après la relation de Chasles}\\
=&\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} \quad \text{par bilinéarité}\\
=&\overrightarrow{MB}.\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MC} \quad \text{par bilinéarité et par symétrie}\\
=&\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MC} \quad \text{d'après la relation de Chasles et car } \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}\\
=&\overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MC}\right) \quad \text{par symétrie et par bilinéarité}\\
=&\overrightarrow{BA}.\vec{0} \quad \text{d'après la relation de Chasles}\\
=&\boxed{0}.
\end{aligned}$$

   (b) *En déduire que les trois hauteurs de ABC sont concourantes en un point H.*

   ▶ Puisque les trois points A, B et C sont distincts et non alignés (car ils forment un triangle), les trois hauteurs du triangle ABC se coupent deux à deux. Soit H le point d'intersection des hauteurs passant par A et B. Ainsi $\overrightarrow{HA}$ est un vecteur directeur de la hauteur passant par A qui est perpendiculaire à la droite (BC) dirigée par $\overrightarrow{BC}$. On en déduit que $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0$. De même, on a $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} = 0$ par définition de H et de la hauteur passant par B. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que :

$$0 = \underbrace{\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}}_{=0} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB}.$$

   Par conséquent, le point H appartient aussi à la droite passant par C et perpendiculaire à la droite (AB), c'est-à-dire la hauteur passant par C. Autrement dit, $\boxed{\text{les trois hauteurs de } ABC \text{ se coupent au même point } H}$.

On rappelle que le point H de concourance des hauteurs d'un triangle est appelé l'orthocentre de ce triangle. Étant donnée une partie $X \subset \mathscr{P}$, on note $\mathscr{H}(X)$ l'ensemble des orthocentres des triangles dont les sommets appartiennent à X. De plus, on dit que la partie X est «orthocentrique» lorsque $\mathscr{H}(X) \subset X$, c'est-à-dire lorsque tout orthocentre d'un triangle formé de trois points distincts et non alignés de X appartient à X.

2. *Justifier que toute partie X incluse dans une droite de $\mathscr{P}$ est orthocentrique.*

   ▶ Soit $X \subset \mathscr{P}$ une partie incluse dans une droite de $\mathscr{P}$. Alors tout triplet de points distincts de X sont alignés. Par conséquent, il n'existe pas de triangle dont les sommets appartiennent à X et donc $\mathscr{H}(X) = \emptyset$. Puisque l'ensemble vide est inclus dans tout ensemble, on en déduit que $\mathscr{H}(X) \subset X$, c'est-à-dire que $\boxed{X \text{ est orthocentrique}}$.

Dans la suite du problème, on considère des exemples de parties X non incluses dans une droite.

3. *Dans cette question, on considère une partie X_1 formée de l'union d'une droite $\mathscr{D}$ de $\mathscr{P}$ et d'un point $M \in \mathscr{P}$ qui n'appartient pas à $\mathscr{D}$. Quitte à changer de repère orthonormé, on suppose que $\mathscr{D}$ est la droite d'équation cartésienne $y = 0$ et que M est d'abscisse nulle. On note $(0, m)$ les coordonnées de M dans ce repère.*

(a) *Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et passant par M.*

▶ Le vecteur $\overrightarrow{j} = (0,1)$ est normal à la droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $0x + 1y = 0$. Ainsi $\overrightarrow{j} = (0,1)$ est un vecteur directeur de la droite Δ perpendiculaire à $\mathscr{D}$. Or $\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j} = 0$ car $\overrightarrow{i} = (1,0)$, donc le vecteur $\overrightarrow{i}$ est normal à la droite Δ. On en déduit qu'une équation cartésienne de la droite Δ est de la forme $1x + 0y + c = 0$ où $c \in \mathbb{R}$. Puisque $M \in \Delta$, on a en injectant les coordonnées du point M :

$$1 \times 0 + 0 \times m + c = 0 \quad \text{donc} \quad c = 0.$$

Finalement, une équation cartésienne de la droite Δ est $\boxed{x = 0}$.

Ce résultat est évident à l'aide d'un dessin.

(b) *Soient A et B deux points distincts de $\mathscr{D}$ d'abscisses respectives a et b. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABM.*

▶ La hauteur du triangle ABM passant par M est perpendiculaire à la droite $(AB) = \mathscr{D}$, elle est donc confondue avec la droite Δ d'équation cartésienne $y = 0$ d'après le résultat de la question précédente. D'autre part, le vecteur $\overrightarrow{BM} = (0 - b, m - 0) = (-b, m)$ est normal à la hauteur passant par A. On en déduit qu'une équation cartésienne de cette hauteur est de la forme $-bx + my + c' = 0$ où $c' \in \mathbb{R}$. Puisque cette hauteur passe par A, on a en injectant les coordonnées du point A :

$$-b \times a + m \times 0 + c' = 0 \quad \text{donc} \quad c' = ab.$$

Une équation cartésienne de la hauteur passant par A est donc $-bx + my + ab = 0$. On note (x, y) les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABM. Puisque H est le point d'intersection des hauteurs passant par M et A, on obtient le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrl} \boxed{1}x & & = 0 \\ -bx & +my & = -ab \end{array}\right. \quad L_2 \leftarrow L_2 + bL_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrl} \boxed{1}x & & = 0 \\ & \boxed{m}y & = -ab \end{array}\right. .$$

On a $m \neq 0$ car $M \notin \mathscr{D}$. Par conséquent, on obtient un système linéaire de rang maximal qui admet une unique solution. On en déduit que les coordonnées du point H sont $\boxed{(0, \frac{-ab}{m})}$

Inutile de perdre du temps à déterminer une équation cartésienne de la troisième hauàteur. Deux hauteurs suffisent pour déterminer les coordonnées de l'orthocentre.

(c) *Réciproquement, soit H un point de Δ d'ordonnée h. Trouver les coordonnées de deux points distincts $(A, B) \in \mathscr{D}^2$ tels que H soit l'orthocentre du triangle ABM.*

▶ On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse. On cherche A et B deux points distincts de $\mathscr{D}$ tels que l'orthocentre du triangle ABM est égal à H. On note $(a, 0)$ et $(b, 0)$ les coordonnées respectives de A et B. Ainsi, on cherche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \neq b$ et tels que les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABM sont égales à $(0, h)$. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que :

$$\frac{-ab}{m} = h \quad \text{donc} \quad ab = -mh.$$

Synthèse. On pose $a = 1$ et $b = -mh$ si $-mh \neq 1$. Sinon, $-mh = 1$ et on pose $a = 2$ et $b = \frac{1}{2}$. On a bien $a \neq b$ dans tous les cas. De plus, on a $ab = -mh$ dans tous les cas, donc H est l'orthocentre du triangle ABM d'après le résultat de la question précédente. Finalement, on a trouvé deux points A et B qui conviennent et qui ont pour coordonnées respectives $\boxed{(0,1) \text{ et } (0,-mh) \text{ si } -mh \neq 1 \text{ et } (0,2) \text{ et } (0,\frac{1}{2}) \text{ si } -mh = 1}$.

N'oubliez pas de vérifier que $A \neq B$. Si votre synthèse comporte des cas particuliers, n'hésitez pas à distinguer ces cas.

(d) *En déduire $\mathscr{H}(X_1)$. La partie X_1 est-elle orthocentrique ?*

▶ Puisque $X_1 = \mathscr{D} \cup \{M\}$, tout triplet de points distincts et non alignés de X_1 contient le point M et deux points distincts A et B de $\mathscr{D}$. D'après, le résultat de la question 3(b), l'orthocentre H du triangle ABM appartient à la droite Δ. Puisque ceci est vrai pour tout orthocentre d'un triangle formé de trois points distincts et non alignés de X_1, on en déduit que $\mathscr{H}(X_1) \subset \Delta$. Réciproquement, on a montré à la question précédente que tout point de Δ est l'orthocentre d'un triangle formé de trois points distincts et non alignés de X_1. Par conséquent, $\Delta \subset \mathscr{H}(X_1)$. Par double inclusion, on en déduit que $\boxed{\mathscr{H}(X_1) = \Delta}$.

Montrez que vous avez compris l'énoncé en distinguant bien chacune des deux inclusions et en concluant par double inclusion.

Puisque Δ est la droite perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par M, il existe des points de $\mathscr{H}(X_1) = \Delta$ qui n'appartiennent pas à $X_1 = \mathscr{D} \cup \{M\}$. Autrement dit, $\mathscr{H}(X_1) \not\subset X_1$ donc $\boxed{\text{la partie } X_1 \text{ n'est pas orthocentrique}}$.

(e) *Justifier brièvement que la partie $X_2 = X_1 \cup \mathscr{H}(X_1)$ est orthocentrique.*

▶ Soit H l'orthocentre d'un triangle ABC formé de trois points distincts et non alignés de X_2. D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$X_2 = X_1 \cup \mathscr{H}(X_1) = (\mathscr{D} \cup \{M\}) \cup \Delta = \mathscr{D} \cup (\{M\} \cup \Delta) = \mathscr{D} \cup \Delta \quad \text{car } M \in \Delta.$$

Puisque A, B et C sont non alignés, il y a deux cas possibles :

<u>1^er cas</u> : deux des trois points A, B ou C appartiennent à la droite $\mathscr{D}$ et le troisième appartient à la droite Δ. En raisonnant comme à la question 3(b), on peut montrer que l'orthocentre de ABC appartient à la droite Δ.

<u>2^e cas</u> : deux des trois points A, B ou C appartiennent à la droite Δ et le troisième appartient à la droite $\mathscr{D}$. À l'aide d'un raisonnement analogue à celui de la question 3(b), on peut montrer que l'orthocentre de ABC appartient à la droite $\mathscr{D}$.

<u>Conclusion</u> : dans tous les cas, on obtient que $H \in \mathscr{D} \cup \Delta = X_2$. Puisque ceci est vrai pour tout orthocentre d'un triangle formé de trois points distincts et non alignés de X_2, on en déduit que $\mathscr{H}(X_2) \subset X_2$ donc $\boxed{\text{la partie } X_2 \text{ est orthocentrique}}$.

En utilisant un raisonnement analogue à celui de la question 3(c), on peut aussi montrer par disjonction de cas que $X_2 \subset \mathscr{H}(X_2)$ Donc $\mathscr{H}(X_2) = X_2$ par double inclusion. Mais inutile de perdre du temps à démontrer quelque chose non demandée dans l'énoncé.

4. *Dans cette question, on considère une partie de la forme $X_3 = \mathscr{C}$ où $\mathscr{C}$ est un cercle de $\mathscr{P}$. Quitte à changer de repère orthonormé, on suppose que $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon $R > 0$, c'est-à-dire l'ensemble des points $S(\theta)$ de coordonnées $(R\cos(\theta), R\sin(\theta))$ où $\theta \in [0, 2\pi[$.*

(a) *Soient α, β et γ trois réels distincts de $[0, 2\pi[$. Montrer que le point H de coordonnées*

$$\Big(R(\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma)), R(\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma))\Big)$$

est l'orthocentre du triangle $S(\alpha)S(\beta)S(\gamma)$.

▶ On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{S(\alpha)H} &= \Big(R(\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma)) - R\cos(\alpha), R(\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma)) - R\sin(\alpha)\Big)\\ &= \Big(R(\cos(\beta) + \cos(\gamma)), R(\sin(\beta) + \sin(\gamma))\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{et} \quad \overrightarrow{S(\beta)S(\gamma)} &= \Big(R\cos(\gamma) - R\cos(\beta), R\sin(\gamma) - R\sin(\beta)\Big)\\ &= \Big(R(\cos(\gamma) - \cos(\beta)), R(\sin(\gamma) - \sin(\beta))\Big).\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{S(\alpha)H}.\overrightarrow{S(\beta)S(\gamma)} =& R(\cos(\beta)+\cos(\gamma))R(\cos(\gamma)-\cos(\beta))\\ &+R(\sin(\beta)+\sin(\gamma))R(\sin(\gamma)-\sin(\beta))\\ =& R^2(\cos^2(\gamma)-\cos^2(\beta))+R^2(\sin^2(\gamma)-\sin^2(\beta))\\ =& R^2\underbrace{(\cos^2(\gamma)+\sin^2(\gamma))}_{=1}-R^2\underbrace{(\cos^2(\beta)+\sin^2(\beta))}_{=1}\\ =& R^2-R^2=0.\end{aligned}$$

On en déduit que la droite $(S(\alpha)H)$ dirigée par $\overrightarrow{S(\alpha)H}$ est perpendiculaire à la droite $(S(\beta)S(\gamma))$ dirigée par $\overrightarrow{S(\beta)S(\gamma)}$. Autrement dit, la droite $(S(\alpha)H)$ est la hauteur du triangle $S(\alpha)S(\beta)S(\gamma)$ passant par $S(\alpha)$ et le point H appartient à cette hauteur. À l'aide de calculs et de raisonnements similaires, on peut montrer que :

$$\overrightarrow{S(\beta)H}.\overrightarrow{S(\gamma)S(\alpha)}=0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{S(\gamma)H}.\overrightarrow{S(\alpha)S(\beta)}=0$$

et donc que le point H appartient aux hauteurs passant par $S(\beta)$ et $S(\gamma)$. Par conséquent, H est le point de concourance des trois hauteurs, donc $\boxed{H \text{ est l'orthocentre de } S(\alpha)S(\beta)S(\gamma)}$.

(b) *Calculer la distance OH pour $(\alpha,\beta,\gamma)=(0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$. La partie X_3 est-elle orthocentrique ?*

▶ On a :

$$\begin{aligned}OH &= \left\|\overrightarrow{OH}\right\|\\ &= \sqrt{\Big(R(\cos(\alpha)+\cos(\beta)+\cos(\gamma))-0\Big)^2+\Big(R(\sin(\alpha)+\sin(\beta)+\sin(\gamma))-0\Big)^2}\\ &= \sqrt{R^2\Big(\cos(0)+\cos(\tfrac{\pi}{4})+\cos(\tfrac{\pi}{2})\Big)^2+R^2\Big(\sin(0)+\sin(\tfrac{\pi}{4})+\sin(\tfrac{\pi}{2})\Big)^2}\\ &= R\sqrt{\Big(1+\tfrac{\sqrt{2}}{2}+0\Big)^2+\Big(0+\tfrac{\sqrt{2}}{2}+1\Big)^2} \quad \text{car } R>0\\ &= R\sqrt{2\left(\tfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2}=R\sqrt{2\left(\tfrac{6+4\sqrt{2}}{4}\right)}=R\sqrt{3+2\sqrt{2}}=R\sqrt{\Big(1+\sqrt{2}\Big)^2}=\boxed{R\left(1+\sqrt{2}\right)}.\end{aligned}$$

En particulier, on a $OH \neq R$ donc H n'appartient pas au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon R. Or, d'après le résultat de la question précédente, le point H est l'orthocentre du triangle $S(\alpha)S(\beta)S(\gamma)$ formé de trois points distincts et non alignés de $X_3=\mathscr{C}$. Puisque $H \notin X_3$, on en déduit que $\boxed{\text{la partie } X_3 \text{ n'est pas orthocentrique}}$.

En poursuivant l'étude, on pourrait montrer que $\mathscr{H}(X_3)$ est le disque ouvert de centre O et de rayon $3R$.

5. *Dans cette question, on considère la partie $X_4 \subset \mathscr{P}$ d'équation cartésienne $xy=k$ où $k\in\mathbb{R}$ est un paramètre fixé.*

(a) *À l'aide d'un résultat précédent, justifier que X_4 est orthocentrique dans le cas où $k=0$.*

▶ Si $k=0$ alors l'équation cartésienne de X_4 est :

$$xy=0 \iff x=0 \text{ ou } y=0.$$

On reconnaît les équations des droites Δ et $\mathscr{D}$ de la question 3. D'après le résultat de la question 3(d), on en déduit que $\boxed{\text{la partie } X_4=\mathscr{D}\cup\Delta=X_2 \text{ est orthocentrique}}$.

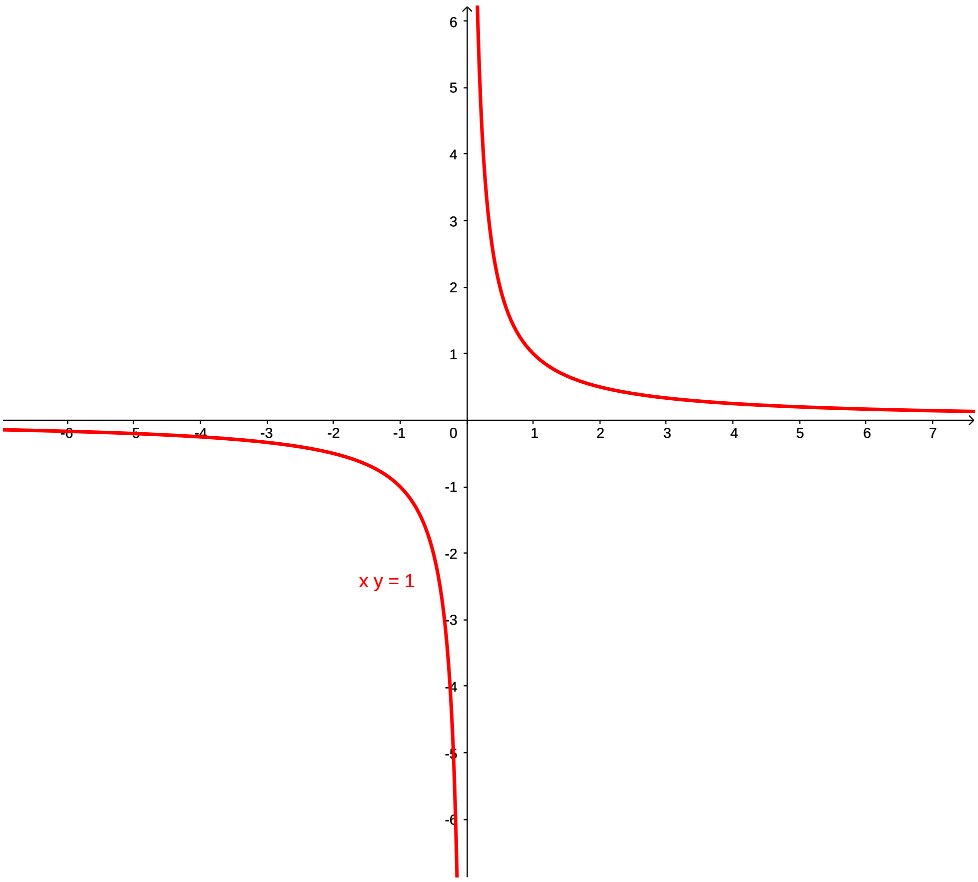
Dans les questions suivantes, on suppose que $k\neq 0$.

(b) *Sur un schéma du plan $\mathscr{P}$, représenter graphiquement la partie X_4 dans le cas où $k=1$.*

▶ Si $k=1$ alors l'équation cartésienne de X_4 est :

$$xy=1 \iff y=\frac{1}{x}.$$

On reconnaît donc la courbe représentative de la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$.



(c) *Soient A, B et C trois points distincts de X_4 d'abscisses respectives a, b et c.*

i. *Déterminer une équation cartésienne de la hauteur de ABC passant par A.*

▶ Soit y_A l'ordonnée du point A. Puisque l'abscisse de A est égale à a, $A \in X_4$ et l'équation cartésienne de X_4 est $xy = k$, on en déduit que $ay_A = k$ donc $y_A = \frac{k}{a}$. De même, les ordonnées respectives de B et C sont $\frac{k}{b}$ et $\frac{k}{c}$. Soit $M \in \mathscr{P}$ un point quelconque de coordonnées (x, y). Par définition de la hauteur de ABC passant par A, le point M appartient à cette hauteur si et seulement si :

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \iff & \left(x - a, y - \tfrac{k}{a}\right).\left(c - b, \tfrac{k}{c} - \tfrac{k}{b}\right) = 0 \\ \iff & (x-a)(c-b) + \left(y - \tfrac{k}{a}\right)\left(\tfrac{k}{c} - \tfrac{k}{b}\right) = 0 \\ \iff & \boxed{(c-b)x + \left(\frac{k(b-c)}{bc}\right) y + \left(-ac + ab - \frac{k^2}{ac} + \frac{k^2}{ab}\right) = 0}. \end{aligned}$$

On reconnaît bien l'équation cartésienne d'une droite du plan $\mathscr{P}$.

ii. *Montrer que les coordonnées (x, y) de l'orthocentre H du triangle ABC vérifient :*

$$\begin{pmatrix} abc & -kc \\ abc & -kb \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abc^2 - k^2 \\ ab^2c - k^2 \end{pmatrix}.$$

▶ En simplifiant l'équation cartésienne obtenue à la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} & (c-b)x + \left(\frac{k(b-c)}{bc}\right) y + \left(-ac + ab - \frac{k^2}{ac} + \frac{k^2}{ab}\right) = 0 \\ \iff & \left(\frac{abc(c-b)}{abc}\right) x + \left(\frac{ka(b-c)}{abc}\right) y + \left(\frac{a^2bc(-c+b)}{abc} + \frac{k^2(-b+c)}{abc}\right) = 0 \\ \iff & abc(c-b)x - ka(c-b)y + \Big(-a^2bc(c-b) + k^2(c-b)\Big) = 0 \\ \iff & abcx - kay + \Big(-a^2bc + k^2\Big) = 0 \quad \text{car } b - c \neq 0 \text{ puisque } B \text{ et } C \text{ sont deux points distincts de } X_4 \\ \iff & abcx - kay = a^2bc - k^2. \end{aligned}$$

En raisonnant de même, on obtient les équations cartésiennes des hauteurs de ABC passant par B et C respectivement :

$$abcx - kby = ab^2c - k^2 \quad \text{et} \quad abcx - kcy = abc^2 - k^2.$$

Inutile de perdre du temps à refaire les mêmes calculs. Il suffit seulement d'utiliser la même équation cartésienne en changeant les rôles de a, b et c.

Puisque l'orhocentre H du triangle ABC est le point de concourance des trois hauteurs, ses coordonnées (x, y) vérifient ces trois équations cartésiennes :

$$\begin{cases} abcx - kay = a^2bc - k^2 & (L_1) \\ abcx - kby = ab^2c - k^2 & (L_2) \\ abcx - kcy = abc^2 - k^2 & (L_3) \end{cases}.$$

En conservant seulement les lignes (L_3) et (L_2), on obtient le système linéaire suivant qu'on peut écrire sous forme matricielle :

$$\begin{cases} abcx - kcy = abc^2 - k^2 \\ abcx - kby = ab^2c - k^2 \end{cases} \iff \boxed{\begin{pmatrix} abc & -kc \\ abc & -kb \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abc^2 - k^2 \\ ab^2c - k^2 \end{pmatrix}}.$$

iii. En déduire que X_4 est orthocentrique.

▶ Le déterminant de la matrice carrée d'ordre 2 des coefficients du système obtenu à la question précédente est égal à :

$$abc(-kb) - abc(-kc) = kabc(-b + c) = -kabc(b - c).$$

Ce déterminant est non nul car :
— $k \neq 0$ par hypothèse,
— $a \neq 0$ car $A \in X_4$ (sinon $ay_A = 0$ ce qui est absurde car les coordonnées de A vérifient l'équation cartésienne de X_4 c'est-à-dire $ay_A = k \neq 0$) et de même $b \neq 0$ et $c \neq 0$,
— $b - c \neq 0$ puisque B et C sont deux points distincts de X_4.

On en déduit que la matrice est inversible et donc que le système admet une unique solution.

Tout cela est parfaitement logique puisque l'orthocentre existe et est unique d'après le résultat de la question 1(b).

Par conséquent, les coordonnées (x, y) de l'orthocentre H du triangle ABC sont égales à :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{-kabc(b-c)}\begin{pmatrix} -kb & kc \\ -abc & abc \end{pmatrix}\begin{pmatrix} abc^2 - k^2 \\ ab^2c - k^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{kabc(b-c)}\begin{pmatrix} -kb(abc^2 - k^2) + kc(ab^2c - k^2) \\ -abc(abc^2 - k^2) + abc(ab^2c - k^2) \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{kabc(b-c)}\begin{pmatrix} -kab^2c^2 + k^3b + kab^2c^2 - k^3c \\ abc(-abc^2 + k^2 + ab^2c - k^2) \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{kabc(b-c)}\begin{pmatrix} k^3(b-c) \\ abc(abc(b-c)) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad x = \frac{-k^3(b-c)}{kabc(b-c)} = \boxed{\frac{-k^2}{abc}} \quad \text{et} \quad y = \frac{-(abc)^2(b-c)}{kabc(b-c)} = \boxed{\frac{-abc}{k}}.$$

En particulier, on remarque que :

$$xy = \frac{-k^2}{abc} \times \frac{-abc}{k} = k \quad \text{donc} \quad H \in X_4.$$

Puisque ceci est vrai pour l'orthocentre H de tout triangle ABC formé de trois points distincts de X_4, on en déduit que $\mathscr{H}(X_4) \subset X_4$ et donc que $\boxed{\text{la partie } X_4 \text{ est orthocentrique}}$.