# DS n$^{\text{o}}$ 6 de mathématiques et d'informatique

## durée : 3 heures

*L'usage de la calculatrice ou de documents est interdit.*
*Il est recommandé de lire l'ensemble de l'énoncé attentivement et patiemment.*
*Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en mentionnant les hypothèses que vous avez été amené à formuler.*
*Le soin de la présentation, la qualité de la rédaction, ainsi que la rigueur, la clarté et la concision des raisonnements constitueront un facteur important d'appréciation de la copie.*

## Exercice (Raisonnement)

Soit $\rho \in ]0,1[$. On considère une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} \geqslant \rho x_{n+1} + (1-\rho)x_n \tag{$*$}$$

On propose d'étudier la nature de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour cela, on pose $y_n = \min(x_n, x_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Dans cette question, on considère le cas particulier où la condition $(*)$ est une égalité.
   (a) Exprimer le terme général de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $\rho$, $x_0$ et $x_1$.
   (b) En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite à déterminer en fonction de $\rho$, $x_0$ et $x_1$.

On revient désormais au cas général.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $y_n \leqslant x_{n+2}$ puis que $y_n \leqslant y_{n+1}$.
   (b) Que peut-on en déduire pour la nature de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ?
3. On suppose que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
4. On suppose désormais que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on note $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouver que si $x_{n+1} > \ell$ alors $y_{n+1} \geqslant \rho x_{n+1} + (1-\rho)y_n$.
   (b) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \max\left(\ell, \frac{y_{n+1} - (1-\rho)y_n}{\rho}\right).$$
   (c) En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?

Finalement, on a montré que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ admet une limite (finie ou non) dans tous les cas.

5. Ce résultat se généralise-t-il pour $\rho = 1$ ? Justifier.
6. Dans le cas où $\rho = 0$, trouver un exemple de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la condition $(*)$ mais n'admettant pas de limite.

**Problème** (Modélisation)

Le but de ce problème est de modéliser la cuisson d'un œuf plongé dans une casserole d'eau bouillante.

La coquille calcaire de l'œuf protège ses deux composantes principales : le blanc (ou albumen) qui entoure le jaune (ou vitellus). On note respectivement $T_B(t)$ et $T_J(t)$ les températures (mesurées en degré Celsius) du blanc et du jaune à l'instant $t$ (mesuré en minutes) et on suppose que les fonctions $T_B$ et $T_J$ ainsi définies sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$. On néglige la présence des autres constituants de l'œuf.

L'œuf est initialement stocké à une température notée $T_0$, ainsi $T_B(0) = T_J(0) = T_0$. Puis il est plongé à l'instant $t = 0$ dans la casserole dont l'eau est maintenue à sa température d'ébullition : $T_E = 100°\text{C}$. On suppose que $T_0 < T_E$.

Les paramètres régissant la cuisson d'un œuf se trouvent dans tout guide culinaire. À savoir, le blanc commence à coaguler à partir de 62°C, le jaune à partir de 68°C et les différents niveaux de cuisson sont : œuf tiède cru (blanc et jaune non coagulés), œuf à la coque (blanc peu coagulé, jaune coulant), œuf mollet (blanc ferme, jaune peu coagulé) et œuf dur (blanc et jaune fermes)

### A) Cuisson du blanc

D'après les lois de la thermodynamique, la variation de la température dans le blanc est proportionnelle à la différence de température $T_E - T_B$ entre l'eau et le blanc. La fonction $T_B$ vérifie donc l'équation différentielle suivante :

$$T_B' = \alpha\Big(T_E - T_B\Big) \qquad (\mathscr{E}_B)$$

où la constante $\alpha > 0$ désigne le paramètre de conduction thermique à travers la coquille.

1. Résoudre $(\mathscr{E}_B)$ en fonction des données de l'énoncé.
2. Esquisser l'allure de la courbe représentative de la fonction $t \mapsto T_B(t)$ sur $\mathbb{R}_+$ en précisant sa tangente en $t = 0$, sa position relative par rapport à cette tangente et sa limite lorsque $t \to +\infty$.
3. Sachant que, partant d'un œuf stocké à température ambiante $T_0 = 20°\text{C}$, il faut un peu plus de 3min de cuisson pour obtenir un œuf à la coque, déterminer une valeur approchée de $\alpha$.

Pour la suite du problème, on prendra $\alpha = 1/4$.

4. Dans le cas où l'œuf est initialement stocké à la température d'un réfrigérateur $T_0 = 4°\text{C}$, déterminer le temps de cuisson nécessaire pour obtenir un œuf à la coque.

### B) Cuisson du jaune

Comme pour la cuisson du blanc, on a d'après les lois de la thermodynamique :

$$T_J' = \beta\Big(T_B - T_J\Big) \qquad (\mathscr{E}_J)$$

où la constante $\beta > 0$ désigne le paramètre de conduction thermique à travers la membrane séparant le blanc et le jaune. Cette membrane étant moins épaisse que la coquille, on suppose que $\beta > \alpha$.

5. Que valent $T_J(0)$ et $T_J'(0)$ ?
6. Justifier que la fonction $T_J$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ puis montrer qu'elle vérifie l'équation différentielle suivante :
$$T_J'' + (\alpha + \beta)T_J' + \alpha\beta T_J = \alpha\beta T_E \qquad (\mathscr{E}_J')$$
7. Résoudre $(\mathscr{E}_J')$ en fonction des données de l'énoncé.
8. Esquisser l'allure de la courbe représentative de la fonction $t \mapsto T_J(t)$ sur $\mathbb{R}_+$ en précisant sa tangente en $t = 0$, sa position relative par rapport à cette tangente et sa limite lorsque $t \to +\infty$.

Pour la suite du problème, on prendra $\beta = 1/2$.

9. En partant d'un œuf stocké à température ambiante $T_0 = 20°\text{C}$, déterminer le temps de cuisson nécessaire pour obtenir un œuf mollet.
10. Pour toute fonction temporelle $t \mapsto f(t)$, on définit sa valeur moyenne entre les instants $t_1$ et $t_2$ par :
$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\mathrm{d}t.$$
Sachant que, partant d'un œuf stocké à température ambiante $T_0 = 20°\text{C}$, il faut un peu moins de 10min de cuisson pour obtenir un œuf dur, calculer une valeur approchée de la température moyenne du jaune durant cette cuisson.