Corrigé du DS n$^{\text{o}}$ 6 de mathématiques et d'informatique

Exercice (Raisonnement)

Soit $\rho \in]0,1[$. On considère une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} \geqslant \rho x_{n+1} + (1-\rho)x_n \tag{$*$}$$

On propose d'étudier la nature de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour cela, on pose $y_n = \min(x_n, x_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. *Dans cette question, on considère le cas particulier où la condition $(*)$ est une égalité.*

   (a) *Exprimer le terme général de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de ρ, x_0 et x_1.*

   ▶ Dans le cas où la condition $(*)$ est une égalité, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} = \rho x_{n+1} + (1-\rho)x_n.$$

On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique :

$$q^2 = \rho q + (1-\rho) \iff q^2 - \rho q - (1-\rho) = 0.$$

On remarque que $q_1 = 1$ est une solution évidente. La deuxième solution vérifie $q_1 + q_2 = \rho$ et $q_1 q_2 = -(1-\rho) = \rho - 1$, donc $q_2 = \rho - 1$. Puisque $\rho \in]0,1[$, on a :

$$-1 < \underbrace{\rho - 1}_{=q_2} < 0 < \underbrace{\rho}_{=q_1} < 1.$$

Ainsi l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes, donc son discriminant est strictement positif.

> *Pensez à utiliser les solutions évidentes (s'il y en a) pour résoudre rapidement des équations. On aurait aussi pu calculer les solutions à l'aide du discriminant, mais c'est plus long (et il faut faire attention aux erreurs de signe) :*
>
> $$\Delta = (-\rho)^2 - 4(-(1-\rho)) = \rho^2 - 4\rho + 4 = (\rho-2)^2 > 0 \quad \textit{car } \rho \neq 2$$
>
> $$\textit{donc} \quad q_1 = \frac{-(-\rho) - (\rho - 2)}{2} = 1 \quad \textit{et} \quad q_2 = \frac{-(-\rho) + (\rho-2)}{2} = \rho - 1.$$

Par conséquent, on sait qu'il existe deux constantes $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n = \lambda_1 + \lambda_2(\rho-1)^n.$$

Pour déterminer les constantes λ_1 et λ_2, on utilise les premiers termes :

$$\begin{cases} x_0 = \lambda_1 + \lambda_2(\rho-1)^0 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_1 = \lambda_1 + \lambda_2(\rho-1)^1 = \lambda_1 + (\rho-1)\lambda_2 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \rho-1 \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(M) = 1 \times (\rho - 1) - 1 \times 1 = \rho - 2 \neq 0$ car $\rho \in]0,1[$ donc la matrice M est inversible et le système linéaire admet une unique solution :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} \rho-1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho-2} \begin{pmatrix} (\rho-1)x_0 - x_1 \\ -x_0 + x_1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \frac{(\rho-1)x_0 - x_1}{\rho - 2} + \frac{x_1 - x_0}{\rho - 2}(\rho-1)^n}.$$

(b) *En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite à déterminer en fonction de ρ, x_0 et x_1.*

▶ On sait que $\rho \in]0,1[$ donc $\rho - 1 \in]-1,0[$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}(\rho-1)^n = 0$. Par conséquent, on a d'après le résultat de la question précédente :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\rho-1)x_0 - x_1}{\rho - 2} + \frac{x_1 - x_0}{\rho - 2}\underbrace{(\rho-1)^n}_{\to 0} = \boxed{\frac{(\rho-1)x_0 - x_1}{\rho - 2}}.$$

On revient désormais au cas général.

2. (a) *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $y_n \leqslant x_{n+2}$ puis que $y_n \leqslant y_{n+1}$.*

▶ On a $y_n = \min(x_n, x_{n+1})$ donc $\boxed{y_n \leqslant x_n}$ et $\boxed{y_n \leqslant x_{n+1}}$. Puisque $\rho \in]0,1[$, on en déduit que $\rho y_n \leqslant \rho x_{n+1}$ (car $\rho > 0$) et $(1-\rho)y_n \leqslant (1-\rho)x_n$ (car $1-\rho > 0$). En injectant ces inégalités dans la condition $(*)$, on obtient :

$$x_{n+2} \geqslant \underbrace{\rho x_{n+1}}_{\geqslant \rho y_{n+1}} + \underbrace{(1-\rho)x_n}_{\geqslant (1-\rho)y_n} \geqslant \rho y_n + (1-\rho)y_n = \big(\rho + 1 - \rho\big)y_n = y_n.$$

Ainsi, on a bien montré que $\boxed{y_n \leqslant x_{n+2}}$. Puisqu'on a aussi montré que $y_n \leqslant x_{n+1}$, on en déduit que $y_n \leqslant \min(x_{n+1}, x_{n+2})$. Or $y_{n+1} = \min(x_{n+1}, x_{n+2})$, donc $\boxed{y_n \leqslant y_{n+1}}$.

(b) *Que peut-on en déduire pour la nature de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$?*

▶ D'après le résultat de la question précédente, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On obtient donc seulement deux cas possibles pour la nature de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'après le $\boxed{\text{théorème de la limite monotone}}$:

si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ; sinon, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Dans les deux cas, la limite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe.

3. *On suppose que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.*

▶ Dans ce cas, on sait que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone. De plus, on a montré à la question 2(a) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{y_n}_{\to+\infty} \leqslant x_n \quad \text{car } y_n = \min(x_n, x_{n+1}).$$

D'après le $\boxed{\text{théorème de limite par comparaison}}$, on en déduit que $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty}$.

4. *On suppose désormais que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on note $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite.*

(a) *Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouver que si $x_{n+1} > \ell$ alors $y_{n+1} \geqslant \rho x_{n+1} + (1-\rho)y_n$.*

▶ On suppose que $x_{n+1} > \ell$. Pour montrer que $y_{n+1} \geqslant \rho x_{n+1} + (1-\rho)y_n$, il suffit de montrer que $x_{n+2} = y_{n+1}$ et $x_n = y_n$ dans la condition $(*)$. Or $y_n = \min(x_n, x_{n+1})$ et $x_{n+1} > \ell$. De plus, on sait que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (d'après le résultat de la question 2(a)) et qu'elle converge vers ℓ (par hypothèse de l'énoncé). Donc $y_n \leqslant \ell$. On en déduit que $y_n \neq x_{n+1}$ et donc que $\boxed{y_n = x_n}$. De même, $y_{n+1} = \min(x_{n+1}, x_{n+2})$ mais $y_{n+1} \neq x_{n+1}$ (car $y_{n+1} \leqslant \ell$ et $x_{n+1} > \ell$), donc $\boxed{y_{n+1} = x_{n+2}}$. Finalement, en injectant ces résultats dans la condition $(*)$, on obtient :

$$\underbrace{x_{n+2}}_{=y_{n+1}} \geqslant \rho x_{n+1} + (1-\rho)\underbrace{x_n}_{=y_n} \quad \text{donc} \quad \boxed{y_{n+1} \geqslant \rho x_{n+1} + (1-\rho)y_n}.$$

(b) *Montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \max\left(\ell, \frac{y_{n+1} - (1-\rho)y_n}{\rho}\right).$$

► Soit $n \in \mathbb{N}$. On a déjà montré à la question 2(a) que $y_n \leqslant x_{n+1}$ (car $y_n = \min(x_n, x_{n+1})$). Il suffit donc de montrer la deuxième inégalité. On raisonne par disjonction de cas.
<u>1^er^ cas : $x_{n+1} > \ell$</u>. Alors on a d'après le résultat de la question précédente :

$$y_{n+1} \geqslant \rho x_{n+1} + (1-\rho) y_n \quad \text{donc} \quad x_{n+1} \leqslant \frac{y_{n+1} - (1-\rho)y_n}{\rho} \quad \text{car } \rho > 0.$$

Puisque $\dfrac{y_{n+1} - (1-\rho)y_n}{\rho} \leqslant \max\left(\ell, \dfrac{y_{n+1} - (1-\rho)y_n}{\rho}\right)$, on en déduit bien que :

$$x_{n+1} \leqslant \max\left(\ell, \frac{y_{n+1} - (1-\rho)y_n}{\rho}\right).$$

<u>2^e^ cas : $x_{n+1} \leqslant \ell$</u>. Puisque $\ell \leqslant \max\left(\ell, \dfrac{y_{n+1} - (1-\rho)y_n}{\rho}\right)$, on en déduit bien que :

$$x_{n+1} \leqslant \max\left(\ell, \frac{y_{n+1} - (1-\rho)y_n}{\rho}\right).$$

<u>Conclusion</u>. La deuxième inégalité est vraie dans tous les cas. Finalement, on a bien montré que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \max\left(\ell, \frac{y_{n+1} - (1-\rho)y_n}{\rho}\right)}.$$

(c) En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?
► On sait que $\lim_{n\to+\infty} y_n = \ell$ (par hypothèse de l'énoncé). Donc $\lim_{n\to+\infty} y_{n+1} = \ell$ et :

$$\lim_{n\to+\infty} \max\left(\ell, \frac{\overbrace{y_{n+1}}^{\to\ell} - (1-\rho)\overbrace{y_n}^{\to\ell}}{\rho}\right) = \max\left(\ell, \frac{\overbrace{\ell - (1-\rho)\ell}^{=\rho\ell}}{\rho}\right) = \max(\ell, \ell) = \ell.$$

De plus, on a d'après le résultat de la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{y_n}_{\to\ell} \leqslant x_{n+1} \leqslant \underbrace{\max\left(\ell, \frac{y_{n+1} - (1-\rho)y_n}{\rho}\right)}_{\to\ell}.$$

D'après le $\boxed{\text{théorème de limite par encadrement}}$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \ell$ et donc que $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell}$ (quitte à changer de variable pour se ramener à $\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell$).

Finalement, on a montré que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ admet une limite (finie ou non) dans tous les cas.

5. *Ce résultat se généralise-t-il pour $\rho = 1$? Justifier.*
► Dans le cas où $\rho = 1$, la condition $(*)$ devient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} \geqslant x_{n+1}.$$

Quitte à changer de variable pour se ramener à $x_{n+1} \geqslant x_n$ pour tout $n \geqslant 1$, on en déduit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. On obtient donc seulement deux cas possibles pour la nature de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'après le $\boxed{\text{théorème de la limite monotone}}$: si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ; sinon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. Dans les deux cas, la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et donc $\boxed{\text{le résultat se généralise bien pour } \rho = 1}$.

6. *Dans le cas où $\rho = 0$, trouver un exemple de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la condition $(*)$ mais n'admettant pas de limite.*

▶ Dans le cas où $\rho = 0$, la condition $(*)$ devient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} \geqslant x_n.$$

Par conséquent :

$$\forall k \geqslant 0, \quad x_{2(k+1)} = x_{2k+2} \geqslant x_{2k} \quad \text{et} \quad x_{2(k+1)+1} = x_{2k+3} \geqslant x_{2k+1}.$$

Ainsi, trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la condition $(*)$ revient à trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les sous-suites extraites $(x_{2k})_{k\geqslant 0}$ et $(x_{2k+1})_{k\geqslant 0}$ sont croissantes et admettent donc des limites d'après le théorème de la limite monotone. Par conséquent, pour que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admette pas de limite, il suffit, d'après le théorème des suites extraites, que ces deux sous-suites extraites n'aient pas la même limite.

Par exemple, il suffit de choisir la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = (-1)^n}.$$

Il existe bien sûr d'autres exemples possibles. Par exemple :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \quad \text{ou} \quad x_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 - \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \ldots$$

Il suffit que les deux sous-suites extraites soient croissantes et aient des limites différentes.

Problème (Modélisation)

Le but de ce problème est de modéliser la cuisson d'un œuf plongé dans une casserole d'eau bouillante.

La coquille calcaire de l'œuf protège ses deux composantes principales : le blanc (ou albumen) qui entoure le jaune (ou vitellus). On note respectivement $T_B(t)$ et $T_J(t)$ les températures (mesurées en degré Celsius) du blanc et du jaune à l'instant t (mesuré en minutes) et on suppose que les fonctions T_B et T_J ainsi définies sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$. On néglige la présence des autres constituants de l'œuf.

L'œuf est initialement stocké à une température notée T_0, ainsi $T_B(0) = T_J(0) = T_0$. Puis il est plongé à l'instant $t = 0$ dans la casserole dont l'eau est maintenue à sa température d'ébullition : $T_E = 100°\text{C}$. On suppose que $T_0 < T_E$.

Les paramètres régissant la cuisson d'un œuf se trouvent dans tout guide culinaire. À savoir, le blanc commence à coaguler à partir de 62°C, le jaune à partir de 68°C et les différents niveaux de cuisson sont : œuf tiède cru (blanc et jaune non coagulés), œuf à la coque (blanc peu coagulé, jaune coulant), œuf mollet (blanc ferme, jaune peu coagulé) et œuf dur (blanc et jaune fermes).

A) Cuisson du blanc

D'après les lois de la thermodynamique, la variation de la température dans le blanc est proportionnelle à la différence de température $T_E - T_B$ entre l'eau et le blanc. La fonction T_B vérifie donc l'équation différentielle suivante :

$$T_B' = \alpha\Big(T_E - T_B\Big) \qquad (\mathscr{E}_B)$$

où la constante $\alpha > 0$ désigne le paramètre de conduction thermique à travers la coquille.

1. *Résoudre $(\mathscr{E}_B)$ en fonction des données de l'énoncé.*

▶ On a :

$$(\mathscr{E}_B) \iff T_B' + \alpha T_B = \alpha T_E.$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 1 non homogène. On commence par résoudre l'équation différentielle linéaire homogène associée :

$$T_H' + \alpha T_H = 0 \iff T_H : t \mapsto \lambda e^{-\alpha t} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ est une constante quelconque.}$$

Puis on cherche une solution particulière de $(\mathscr{E}_B)$. On remarque que $T_P : t \mapsto T_E$ est une solution particulière évidente. En effet, puisque T_P est constante, on a :

$$\underbrace{T_P'}_{=0} + \alpha \underbrace{T_P}_{=T_E} = \alpha T_E.$$

Il est cohérent que $T_P : t \mapsto T_E$ soit une solution évidente puisque la température reste constante dans le cas où l'œuf est stocké à la température d'ébullition $T_0 = T_E$. Thermodynamiquement, T_E est appelée la température d'équilibre.

Finalement, on en déduit d'après le principe de superposition que :

$$(\mathscr{E}_B) \iff T_B : t \mapsto T_H(t) + T_P(t) = \lambda e^{-\alpha t} + T_E \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ est une constante.}$$

Pour déterminer la constante λ, on utilise la condition initiale :

$$T_0 = T_B(0) = \lambda \underbrace{e^{-\alpha 0}}_{=1} + T_E \quad \text{donc} \quad \lambda = T_0 - T_E.$$

Finalement, on obtient que :

$$\forall t \geqslant 0, \quad \boxed{T_B(t) = (T_0 - T_E)e^{-\alpha t} + T_E}.$$

2. *Esquisser l'allure de la courbe représentative de la fonction $t \mapsto T_B(t)$ sur $\mathbb{R}_+$ en précisant sa tangente en $t = 0$, sa position relative par rapport à cette tangente et sa limite lorsque $t \to +\infty$.*

► D'après le résultat de la question précédente, la fonction T_B est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall t \geqslant 0, \quad T_B'(t) = (T_0 - T_E)(-\alpha)e^{-\alpha t} + 0 = \underbrace{-\alpha}_{<0} \left(\underbrace{T_0 - T_E}_{<0} \right) \underbrace{e^{-\alpha t}}_{>0}.$$

Puisque $\alpha > 0$ et $T_0 < T_E$ d'après l'énoncé, on en déduit que $\boxed{T_B \text{ est strictement croissante}}$ sur $\mathbb{R}_+$. De plus, l'équation de sa tangente en $t = 0$ est donnée par :

$$y = T_B(0) + T_B'(0)(x - 0) = T_0 - \alpha(T_0 - T_E)x = \underbrace{\alpha(T_E - T_0)}_{>0} x + T_0.$$

Donc $\boxed{\text{sa tangente en } t = 0 \text{ passe par la condition initiale } (t = 0, T_0) \text{ et est strictement croissante}}$. On a :

$$\begin{aligned} \forall t \geqslant 0, \quad T_B(t) - \Big(\alpha(T_E - T_0)t + T_0\Big) &= \underbrace{(T_0 - T_E)}_{=-(T_E - T_0)} e^{-\alpha t} + T_E - \alpha(T_E - T_0)t - T_0 \\ &= \underbrace{(T_E - T_0)}_{>0} \Big[\underbrace{-e^{-\alpha t} + 1 - \alpha t}_{=f(t)} \Big]. \end{aligned}$$

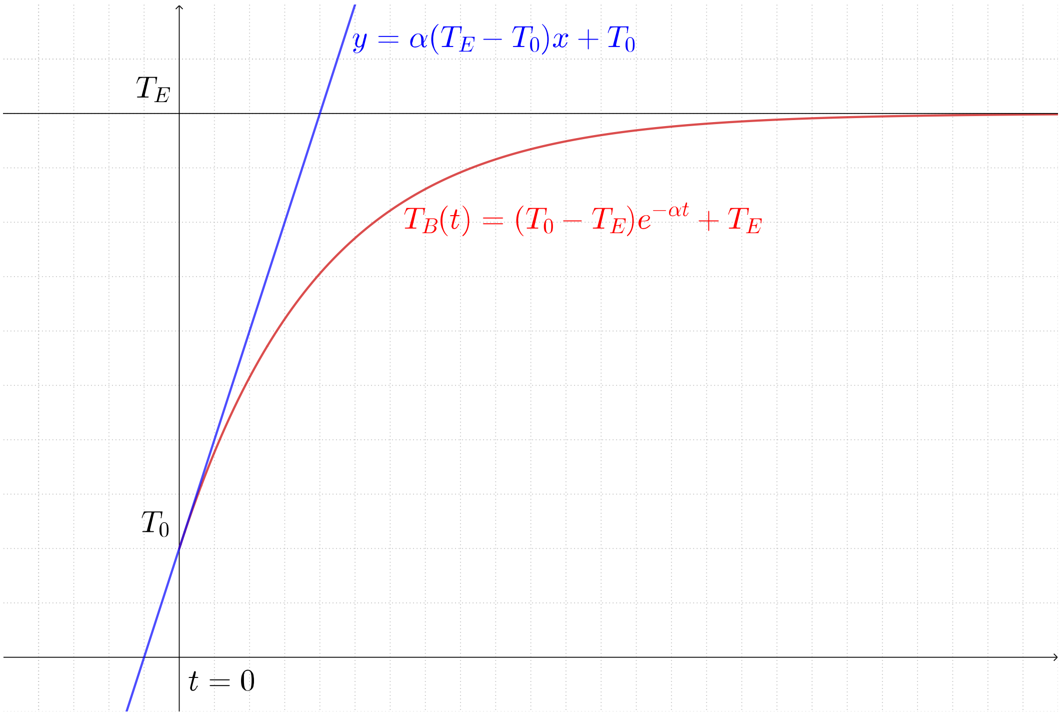
Pour étudier la position relative de la courbe représentative de T_B par rapport à sa tangente en $t = 0$, il suffit donc d'étudier le signe de la fonction $f : t \mapsto -e^{-\alpha t} + 1 - \alpha t$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall t \geqslant 0, \quad f'(t) = -(-\alpha)e^{-\alpha t} + 0 - \alpha = \underbrace{\alpha}_{>0} \underbrace{\Big(\overbrace{\underbrace{e^{-\alpha t}}_{\leqslant 1}}^{\leqslant 0} - 1 \Big)}_{\leqslant 0} \leqslant 0 \quad \text{d'après les propriétés de la fonction exponentielle.}$$

Ainsi f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et admet un maximum qui vaut $f(0) = -e^0 + 1 - 0 = 0$. On en déduit que $f(t) \leqslant 0$ pour tout $t \geqslant 0$ et donc que $\boxed{\text{la courbe représentative de } T_B \text{ est en-dessous de sa tangente en } t = 0}$. D'autre part, on a :

$$\lim_{t \to +\infty} T_B(t) = \lim_{t \to +\infty} (T_0 - T_E) \underbrace{e^{\overbrace{-\alpha t}^{\to -\infty}}}_{\to 0} + T_E = T_E \quad \text{d'après les propriétés de la fonction exponentielle.}$$

Ainsi, $\boxed{T_B(t) \text{ tend vers } T_E \text{ lorsque } t \to +\infty}$. Finalement, on peut esquisser la courbe représentative de T_B à l'aide de toutes ces propriétés.



3. *Sachant que, partant d'un œuf stocké à température ambiante $T_0 = 20°\mathrm{C}$, il faut un peu plus de $3\mathrm{min}$ de cuisson pour obtenir un œuf à la coque, déterminer une valeur approchée de α.*

   ▶ D'après l'énoncé, pour obtenir à œuf à la coque T_B doit être environ égale à $62°\mathrm{C}$ pour $t = 3\mathrm{min}$, $T_0 = 20°\mathrm{C}$ et $T_E = 100°\mathrm{C}$. On injecte ces valeurs dans le résultat de la question 1 et on résout l'équation obtenue d'inconnue α :

$$\begin{aligned}
\underbrace{62}_{\approx T_B(t)} = \Big(\underbrace{20}_{=T_0} - \underbrace{100}_{=T_E}\Big)e^{-\alpha \overbrace{3}^{=t}} + \underbrace{100}_{=T_E} &\iff 80e^{-3\alpha} = 38 \\
&\iff -3\alpha = \ln\left(\frac{38}{80}\right) = -\ln\left(\frac{40}{19}\right) \\
&\iff \boxed{\alpha = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{40}{19}\right)}.
\end{aligned}$$

Numériquement, on obtient $\alpha \approx 0,248$. La valeur $1/4 = 0,25$ est donc une bonne approximation.

Pour la suite du problème, on prendra $\alpha = 1/4$.

4. *Dans le cas où l'œuf est initialement stocké à la température d'un réfrigérateur $T_0 = 4°\mathrm{C}$, déterminer le temps de cuisson nécessaire pour obtenir un œuf à la coque.*

   ▶ On raisonne comme à la question précédente puis on résout l'équation obtenue d'inconnue t qui représente le temps nécessaire pour obtenir un œuf à la coque dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\underbrace{62}_{\approx T_B(t)} = \Big(\underbrace{4}_{=T_0} - \underbrace{100}_{=T_E}\Big)e^{-\overbrace{\frac{1}{4}}^{=\alpha} t} + \underbrace{100}_{=T_E} &\iff 96e^{-t/4} = 38 \\
&\iff -\frac{t}{4} = \ln\left(\frac{38}{96}\right) = -\ln\left(\frac{48}{19}\right) \\
&\iff \boxed{t = 4\ln\left(\frac{48}{19}\right)}.
\end{aligned}$$

Numériquement, on obtient $t \approx 3,707$. Il faut donc un peu moins de 4min de cuisson pour obtenir un œuf à la coque lorsqu'il est conservé au réfrigérateur.

B) Cuisson du jaune

Comme pour la cuisson du blanc, on a d'après les lois de la thermodynamique :

$$T_J' = \beta\Big(T_B - T_J\Big) \qquad (\mathscr{E}_J)$$

où la constante $\beta > 0$ désigne le paramètre de conduction thermique à travers la membrane séparant le blanc et le jaune. Cette membrane étant moins épaisse que la coquille, on suppose que $\beta > \alpha$.

5. *Que valent $T_J(0)$ et $T_J'(0)$?*

▶ D'après l'énoncé, on sait que $\boxed{T_J(0) = T_0}$ et $T_B(0) = T_0$, ce qui donne en injectant dans $(\mathscr{E}_J)$:

$$T_J'(0) = \beta\Big(T_B(0) - T_J(0)\Big) = \beta\Big(T_0 - T_0\Big) = 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{T_J'(0) = 0}.$$

6. *Justifier que la fonction T_J est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ puis montrer qu'elle vérifie l'équation différentielle suivante :*

$$T_J'' + (\alpha+\beta)T_J' + \alpha\beta T_J = \alpha\beta T_E \qquad (\mathscr{E}_J')$$

▶ D'après l'énoncé, les fonctions T_B et T_J sont supposées dérivables sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, $T_J' = \beta(T_B - T_J)$ (d'après $(\mathscr{E}_J)$) est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que $\boxed{T_J \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}_+}$. De plus :

$$\begin{aligned}
T_J'' &= \beta\Big(T_B' - T_J'\Big) \quad \text{en dérivant } (\mathscr{E}_J)\\
&= \beta\Big(\alpha\Big(T_E - T_B\Big) - T_J'\Big) \quad \text{en injectant } (\mathscr{E}_B)\\
&= \alpha\beta T_E - \alpha\beta T_B - \beta T_J'\\
&= \alpha\beta T_E - \alpha\beta T_B - \beta^2\Big(T_B - T_J\Big) \quad \text{en injectant } (\mathscr{E}_J)\\
&= \alpha\beta T_E - \beta(\alpha+\beta)T_B + \beta^2 T_J
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
T_J'' + (\alpha+\beta)T_J' + \alpha\beta T_J &= \underbrace{\alpha\beta T_E - \beta(\alpha+\beta)T_B + \beta^2 T_J}_{\text{expression précédente de } T_J''} + (\alpha+\beta)\underbrace{\beta\Big(T_B - T_J\Big)}_{\text{d'après } (\mathscr{E}_J)} + \alpha\beta T_J\\
&= \alpha\beta T_E \overbrace{-\beta(\alpha+\beta)T_B}^{\text{-I}} \underbrace{+\beta^2 T_J}_{\text{+II}} \overbrace{+(\alpha+\beta)\beta T_B}^{\text{+I}} \underbrace{-\alpha\beta T_J}_{\text{-III}} \underbrace{-\beta^2 T_J}_{\text{-II}} \underbrace{+\alpha\beta T_J}_{\text{+III}}\\
&= \alpha\beta T_E \quad \text{après simplifications.}
\end{aligned}$$

On a bien montré que $\boxed{T_J \text{ vérifie } (\mathscr{E}_J')}$.

7. *Résoudre $(\mathscr{E}_J')$ en fonction des données de l'énoncé.*

▶ On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 2 non homogène. On commence par résoudre l'équation différentielle linéaire homogène associée :

$$T_H'' + (\alpha+\beta)T_H' + \alpha\beta T_H = 0.$$

Son équation caractéristique est :

$$r^2 + (\alpha+\beta)r + \alpha\beta = 0 \iff r^2 - \Big(\underbrace{(-\alpha)+(-\beta)}_{=\text{somme des sol.}}\Big)r + \underbrace{(-\alpha)(-\beta)}_{=\text{produit des sol.}} = 0.$$

On remarque que $r_1 = -\alpha$ et $r_2 = -\beta$ sont des solutions évidentes. Puisque $\beta > \alpha$ d'après l'énoncé, on a $r_1 \neq r_2$. Ainsi l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes, donc son discriminant est strictement positif.

Pensez à utiliser les solutions évidentes (s'il y en a) pour résoudre rapidement des équations. On aurait aussi pu calculer les solutions à l'aide du discriminant, mais c'est plus long (et il faut faire attention aux erreurs) :

$$\begin{aligned}\Delta &= (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha\beta \\ &= \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha-\beta)^2 > 0 \quad \textit{car } \alpha \neq \beta\end{aligned}$$

$$\textit{donc} \quad r_1 = \frac{-(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)}{2} = -\alpha \quad \textit{et} \quad r_1 = \frac{-(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)}{2} = -\beta.$$

Par conséquent, on sait qu'il existe deux constantes $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$T_H : t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} = \lambda_1 e^{-\alpha t} + \lambda_2 e^{-\beta t}.$$

Puis on cherche une solution particulière de $(\mathscr{E}_J')$. On remarque que $T_P : t \mapsto T_E$ est une solution particulière évidente. En effet, puisque T_P est constante, on a :

$$\underbrace{T_P''}_{=0} + (\alpha+\beta)\underbrace{T_P'}_{=0} + \alpha\beta\underbrace{T_P}_{=T_E} = \alpha\beta T_E.$$

Il est cohérent que $T_P : t \mapsto T_E$ soit une solution évidente puisque la température reste constante dans le cas où l'œuf est stocké à la température d'ébullition $T_0 = T_E$. Thermodynamiquement, T_E est appelée la température d'équilibre.

Finalement, on en déduit d'après le principe de superposition que :

$$(\mathscr{E}_J') \iff T_J : t \mapsto T_H(t) + T_P(t) = \lambda_1 e^{-\alpha t} + \lambda_2 e^{-\beta t} + T_E \quad \text{où } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ sont des constantes.}$$

Pour déterminer les constantes λ_1 et λ_2, on utilise les conditions initiales de la question 5 :

$$\begin{cases} T_0 = T_J(0) = \lambda_1 \underbrace{e^{-\alpha 0}}_{=1} + \lambda_2 \underbrace{e^{-\beta 0}}_{=1} + T_E & \text{donc} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = T_0 - T_E \\ 0 = T_J'(0) = \lambda_1(-\alpha)\underbrace{e^{-\alpha 0}}_{=1} + \lambda_2(-\beta)\underbrace{e^{-\beta 0}}_{=1} + 0 & \text{donc} \quad \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_0 - T_E \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $\det(M) = 1 \times \beta - \alpha \times 1 = \beta - \alpha \neq 0$ car $\beta > \alpha$ donc la matrice M est inversible et le système linéaire admet une unique solution

$$\iff \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} T_0 - T_E \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0 - T_E \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta-\alpha} \begin{pmatrix} \beta(T_0 - T_E) \\ -\alpha(T_0 - T_E) \end{pmatrix}.$$

Finalement, on en déduit que :

$$\forall t \geqslant 0, \quad \boxed{\begin{aligned} T_J(t) &= \frac{\beta}{\beta-\alpha}(T_0 - T_E)e^{-\alpha t} - \frac{\alpha}{\beta-\alpha}(T_0 - T_E)e^{-\beta t} + T_E \\ &= (T_0 - T_E)\frac{\beta e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} + T_E \end{aligned}}.$$

8. *Esquisser l'allure de la courbe représentative de la fonction $t \mapsto T_J(t)$ sur $\mathbb{R}_+$ en précisant sa tangente en $t = 0$, sa position relative par rapport à cette tangente et sa limite lorsque $t \to +\infty$.*

► D'après le résultat de la question précédente, la fonction T_J est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\begin{aligned} \forall t \geqslant 0, \quad T_J'(t) &= (T_0 - T_E)\frac{\beta(-\alpha)e^{-\alpha t} - \alpha(-\beta)e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} + 0 \\ &= \underbrace{\frac{\overbrace{-\alpha\beta}^{<0}}{\beta-\alpha}}_{>0} \underbrace{(T_0 - T_E)}_{<0} \Big[\underbrace{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}_{=g(t)}\Big]. \end{aligned}$$

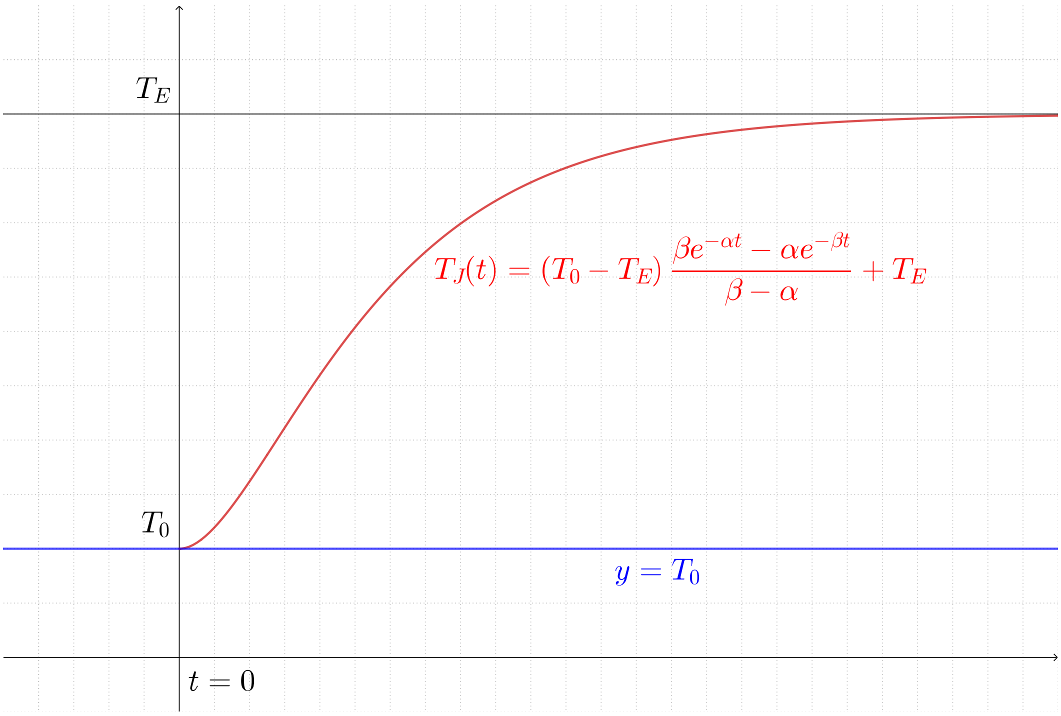
Puisque $\beta > \alpha > 0$ et $T_0 < T_E$ d'après l'énoncé, il suffit d'étudier le signe de $g : t \mapsto e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}$ pour étudier la monotonie de T_J. Or $\beta > \alpha$ d'après l'énoncé, donc $-\alpha t \geqslant -\beta t$ pour tout $t \geqslant 0$. On en déduit que $e^{-\alpha t} \geqslant e^{-\beta}$ par croissance de la fonction exponentielle et donc que $g(t) \geqslant 0$ pour tout $t \geqslant 0$. Par conséquent, $\boxed{T_J \text{ est strictement croissante}}$ sur $\mathbb{R}_+$. De plus, l'équation de sa tangente en $t = 0$ est donnée par :

$$y = \underbrace{T_J(0)}_{=T_0} + \underbrace{T_J'(0)}_{=0}(x - 0) = T_0 \quad \text{d'après les résultats de la question 5.}$$

Donc $\boxed{\text{sa tangente en } t = 0 \text{ passe par la condition initiale } (t = 0, T_0) \text{ et est horizontale}}$. Puisque T_J est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $\boxed{\text{la courbe représentative de } T_J \text{ est au-dessus de sa tangente en } t = 0}$. D'autre part, on a :

$$\lim_{t \to +\infty} T_J(t) = \lim_{t \to +\infty} (T_0 - T_E) \frac{\beta \overbrace{e^{-\alpha t}}^{\to 0} - \alpha \overbrace{e^{-\beta t}}^{\to 0}}{\beta - \alpha} + T_E = T_E.$$

Ainsi, $\boxed{T_J(t) \text{ tend vers } T_E \text{ lorsque } t \to +\infty}$. Finalement, on peut esquisser la courbe représentative de T_J à l'aide de toutes ces propriétés.



On remarque que la cuisson du jaune est plus lente que celle du blanc, même si les deux ont la même température initiale T_0 et tendent vers la même température d'équilibre T_E. Le modèle proposé par l'énoncé semble cohérent.

Pour la suite du problème, on prendra $\beta = 2\alpha = 1/2$.

9. *En partant d'un œuf stocké à température ambiante $T_0 = 20°\text{C}$, déterminer le temps de cuisson nécessaire pour obtenir un œuf mollet.*

► On raisonne comme aux questions 3 et 4 en injectant les valeurs de l'énoncé dans le résultat de la question 7, puis on résout l'équation obtenue d'inconnue t qui représente le temps nécessaire pour obtenir un œuf mollet :

$$\underbrace{68}_{\approx T_J(t)} = \Big(\underbrace{20}_{=T_0} - \underbrace{100}_{=T_E}\Big) \underbrace{\frac{\frac{1}{2}e^{-t/4} - \frac{1}{4}e^{-t/2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}}_{\text{car } \alpha = 1/4 \text{ et } \beta = 1/2} + \underbrace{100}_{=T_E}$$

$$\iff 0 = -320\left(\frac{1}{2}e^{-t/4} - \frac{1}{4}e^{-t/2}\right) + 32$$
$$\iff 0 = -10e^{-t/4} + 5\underbrace{e^{-t/2}}_{\substack{=e^{-2t/4}\\=(e^{-t/4})^2}} + 2 \quad \text{en simplifiant par } 16$$
$$\iff 5x^2 - 10x + 2 = 0 \quad \text{en posant } x = e^{-t/4} \iff t = -4\ln(x).$$

On reconnaît une équation de degré 2 de discriminant :

$$\Delta = (-10)^2 - 4\times 5\times 2 = 100 - 40 = 60 > 0.$$

L'équation admet donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-(-10)-\sqrt{60}}{2\times 5} = \frac{10-2\sqrt{15}}{10} = \frac{5-\sqrt{15}}{5} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+\sqrt{15}}{5}.$$

Or $9 < 15 < 16$ donc $3 < \sqrt{15} < 4$ par stricte croissance de la fonction racine. On en déduit que :

$$\frac{1}{5} < x_1 < \frac{2}{5} < 1 < \frac{8}{5} < x_2 < \frac{9}{5}.$$

Ce qui donne comme solutions pour l'inconnue $t = -4\ln(x)$:

$$\underbrace{-4\ln\left(\frac{1}{5}\right)}_{=4\ln(5)>0} > \underbrace{-4\ln(x_1)}_{=t_1} > \underbrace{-4\ln\left(\frac{2}{5}\right)}_{=4\ln(5/2)>0} > \underbrace{-4\ln(1)}_{=0} > \underbrace{-4\ln\left(\frac{8}{5}\right)}_{<0} > \underbrace{-4\ln(x_2)}_{=t_2} > \underbrace{-4\ln\left(\frac{9}{5}\right)}_{<0}$$

par stricte croissance de la fonction logarithme. La solution $t = t_2$ est donc absurde car $t \in \mathbb{R}_+$. Finalement, on a :

$$t = -4\ln\left(\frac{5-\sqrt{15}}{5}\right) = 4\ln\left(\frac{5}{5-\sqrt{15}}\right) = 4\ln\left(\frac{5\left(5+\sqrt{15}\right)}{25-15}\right) = \boxed{4\ln\left(\frac{5+\sqrt{15}}{2}\right)}.$$

Numériquement, on obtient $t \approx 5,959$. Il faut donc un peu moins de 6min de cuisson pour obtenir un œuf mollet lorsqu'il est conservé à température ambiante.

10. *Pour toute fonction temporelle $t \mapsto f(t)$, on définit sa valeur moyenne entre les instants t_1 et t_2 par :*

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\mathrm{d}t.$$

Sachant que, partant d'un œuf stocké à température ambiante $T_0 = 20$°C, il faut un peu moins de 10min de cuisson pour obtenir un œuf dur, calculer une valeur approchée de la température moyenne du jaune durant cette cuisson.

► On injecte les valeurs de l'énoncé dans résultat de la question 7 comme à la question précédente, puis on calcule la valeur moyenne de la fonction $t \mapsto T_J(t)$ entre les instants $t_1 = 0$ et $t_2 = 10$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{10-0}\int_0^{10} T_J(t)\mathrm{d}t &= \frac{1}{10}\int_0^{10}\left((20-100)\frac{\frac{1}{2}e^{-t/4} - \frac{1}{4}e^{-t/2}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} + 100\right)\mathrm{d}t \\
&= -16\int_0^{10} e^{-t/4}\mathrm{d}t + 8\int_0^{10} e^{-t/2}\mathrm{d}t + 10\int_0^{10} 1\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= -16\left[\frac{e^{-t/4}}{-1/4}\right]_0^{10} + 8\left[\frac{e^{-t/2}}{-1/2}\right]_0^{10} + 10\Big[t\Big]_0^{10} \\
&= 64\left(e^{-10/4} - 1\right) - 16\left(e^{-10/2} - 1\right) + 10(10-0) \\
&= \boxed{64e^{-5/2} - 16e^{-5} + 52}.
\end{aligned}$$

Numériquement, on obtient une température moyenne d'environ 57°C.