DS n$^{\text{o}}$ 6 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de documents est interdit.
Il est recommandé de lire l'ensemble de l'énoncé attentivement et patiemment.
Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en mentionnant les hypothèses que vous avez été amené à formuler.
Le soin de la présentation, la qualité de la rédaction, ainsi que la rigueur, la clarté et la concision des raisonnements constitueront un facteur important d'appréciation de la copie.

Problème 2

On considère le polynôme $P_t = 4X^5 + 5tX^4 - 4$ où $t \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

1. **(Informatique)** Écrire une fonction `polynome(t,x)` qui prend en arguments une valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$ et un réel $x \in \mathbb{R}$ puis qui renvoie la valeur de $P_t(x)$.
2. Pour cette question, on fixe $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Factoriser le polynôme dérivé P_t' dans $\mathbb{C}[X]$. Quelles sont ses racines et leur multiplicité ?
   (b) En déduire que P_t admet cinq racines simples dans $\mathbb{C}$ si $t \neq 4^{1/5}$.
3. Déterminer le nombre de racines de P_t dans $\mathbb{C}$ et leur multiplicité dans le cas où $t = 4^{1/5}$.
4. Pour cette question, on fixe $t > 0$.
   (a) Dresser le tableau des variations de la fonction $x \mapsto P_t(x)$.
   (b) En déduire le nombre de racines de P_t dans $\mathbb{R}$ en distinguant plusieurs cas.

Pour la suite de l'énoncé, on note $r(t)$ l'unique racine réelle positive de P_t pour tout $t > 0$.

5. Justifier que $r(t) \in]0,1[$ pour tout $t > 0$.
6. **(Informatique)**
   (a) En utilisant la fonction `polynome`, écrire une fonction `dichotomie1(t,n)` qui prend en arguments une valeur du paramètre $t > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ puis qui renvoie, à l'aide d'un algorithme de dichotomie, le n-ième terme d'une suite qui converge vers $r(t)$.
   (b) Écrire une fonction `approximation1(t,epsilon)` qui prend en arguments une valeur du paramètre $t > 0$ et une précision $\varepsilon > 0$ puis qui renvoie une valeur approchée de $r(t)$ à ε près.
7. (a) On fixe $t_2 > t_1 > 0$ dans cette question. Déterminer le signe de $P_{t_1}(r(t_2))$.
   (b) En déduire la monotonie de la fonction $r : t \mapsto r(t)$ sur $]0, +\infty[$.
8. (a) Justifier que r se prolonge par continuité en 0.
   (b) On note encore r le prolongement obtenu. Déterminer $r(0)$.
   (c) Montrer que $r(t) - 1$ est équivalent à $-t/4$ quand t tend vers 0^+.
9. (a) Justifier que $\ell = \lim_{t\to+\infty} r(t)$ existe et est finie.
   (b) Montrer que $\ell > 0$ est absurde. En déduire la valeur de ℓ.
   (c) Montrer que $r(t)$ est équivalent à $(4/(5t))^{1/4}$ quand t tend vers $+\infty$.
10. On pose la fonction $f : x \mapsto 4(1 - x^5)/(5x^4)$.
    (a) Montrer que f réalise une bijection de $]0, 1]$ vers un intervalle à déterminer.
    (b) Justifier que r est la bijection réciproque de f et en déduire que r est continue sur $[0, +\infty[$.

11. (a) Justifier que P_t admet également une unique racine réelle positive pour tout $t < 0$.
On note encore $r(t)$ cette racine pour tout $t < 0$.

(b) **(Informatique)** On considère la fonction `mystere` suivante.

```
def mystere(t):
    k=0
    while polynome(t,k)<=0:
        k=k+1
    return k
```

i. Expliquer ce que renvoie la fonction `mystere`.

ii. À l'aide de la fonction `mystere`, écrire une fonction `dichotomie2(t,n)` et une fonction `approximation2(t,epsilon)` similaires à celles des questions 6(a) et 6(b) mais qui prennent en argument une valeur du paramètre $t < 0$.

(c) À l'aide de la fonction f définie à la question 10, montrer que r est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, puis déterminer $\lim_{t \to -\infty} r(t)$ et un équivalent simple de $r(t)$ quand $t \to -\infty$.