Corrigé du DS n° 6 de mathématiques et d'informatique

Problème 2

On considère le polynôme $P_t = 4X^5 + 5tX^4 - 4$ où $t \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

1. ***(Informatique)** Écrire une fonction* `polynome(t,x)` *qui prend en arguments une valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$ et un réel $x \in \mathbb{R}$ puis qui renvoie la valeur de $P_t(x)$.*

   ▶ Par exemple :

```
def polynome(t,x):
    return 4*(x**5)+5*t*(x**4)-4
```

2. *Pour cette question, on fixe $t \in \mathbb{R}$.*

   (a) *Factoriser le polynôme dérivé P_t' dans $\mathbb{C}[X]$. Quelles sont ses racines et leur multiplicité ?*

   ▶ On a :
$$P_t' = 20X^4 + 20tX^3 = \boxed{20X^3(X+t)} = 20(X-0)^3(X-(-t)).$$
   Ainsi, si $t \neq 0$ alors les racines de P_t' sont $\boxed{0 \text{ de multiplicité } 3}$ et $\boxed{-t \text{ de multiplicité } 1}$. Mais si $t = 0$ alors la seule racine de P_t' est $\boxed{0 \text{ de multiplicité } 4}$.

   (b) *En déduire que P_t admet cinq racines simples dans $\mathbb{C}$ si $t \neq 4^{1/5}$.*

   ▶ On a $P_t(0) = -4 \neq 0$ et :
$$P_t(-t) = 4(-t)^5 + 5t(-t)^4 - 4 = -4t^5 + 5t^5 - 4 = t^5 - 4.$$
   Donc :
$$P_t(-t) = 0 \iff t^5 - 4 = 0 \iff t^5 = 4 \iff t = 4^{1/5}.$$
   Ainsi, si $t \neq 4^{1/5}$, les racines de P_t' ne sont pas des racines de P_t. Par conséquent, toutes les racines de P_t sont de multiplicité 1. Puisque P_t est de degré 5, on en déduit d'après le théorème fondamental de l'algèbre que $\boxed{P_t \text{ admet cinq racines simples dans } \mathbb{C}}$.

3. *Déterminer le nombre de racines de P_t dans $\mathbb{C}$ et leur multiplicité dans le cas où $t = 4^{1/5}$.*

   ▶ Si $t = 4^{1/5}$, on a vu aux questions précédentes que $P_t'(-t) = 0$ et $P_t(-t) = 0$. Par conséquent, $-t$ est une racine de P_t de multiplicité au moins égale à 2.

   > *Attention : on n'a pas encore démontré que la multiplicité de la racine $-t$ est exactement égale à 2. La multiplicité peut être plus grande si les dérivées d'ordre supérieur de P_t s'annulent en $-t$.*

   De plus, on a :
$$P_t'' = 20 \times 4X^3 + 20t \times 3X^2 = 20X^2(4X + 3t)$$
$$\text{donc} \quad P_t''(-t) = 20(-t)^2(-4t + 3t) = -20t^3 = -20(4^{1/5})^3 = -20 \times 4^{3/5} \neq 0.$$
   Par conséquent, $-t$ est une racine de P_t de multiplicité exactement égale à 2. En raisonnant comme à la question précédente, on montre que toutes les autres racines de P_t sont de multiplicité 1. Puisque P_t est de degré 5, on en déduit d'après le théorème fondamental de l'algèbre que $\boxed{P_t \text{ admet quatre racines } \mathbb{C} \text{ : trois racines simples et une racine double égale à } -t = -4^{1/5}}$.

4. *Pour cette question, on fixe $t > 0$.*

(a) Dresser le tableau des variations de la fonction $x \mapsto P_t(x)$.

► On a vu à la question 2(a) que :

$$x \mapsto P_t'(x) = 20x^3(x+t).$$

Or $20 > 0$, $x^3 > 0 \iff x > 0$ et $x + t > 0 \iff x > -t$. Puisque $-t < 0$, on en déduit le tableau des variations suivant :

x	$-\infty$		$-t$		0		$+\infty$
$P_t'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P_t(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$t^5 - 4$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

car :

- $\lim_{x\to-\infty} P_t(x) = \lim_{x\to-\infty} 4x^5 = -\infty$ à l'aide de l'équivalent $4x^5 + 5tx^4 - 4 \sim_{x\to-\infty} 4x^5$
- $P_t(-t) = t^5 - 4$ en reprenant le calcul de la question 2(b)
- $P_t(0) = -4$
- $\lim_{x\to+\infty} P_t(x) = \lim_{x\to+\infty} 4x^5 = +\infty$ à l'aide de l'équivalent $4x^5 + 5tx^4 - 4 \sim_{x\to+\infty} 4x^5$.

(b) En déduire le nombre de racines de P_t dans $\mathbb{R}$ en distinguant plusieurs cas.

► La fonction $x \mapsto P_t(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale. On a $-4 < 0$ et

$$t^5 - 4 > 0 \iff t > 4^{1/5} \quad \text{car la fonction } t \mapsto t^{1/5} \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

À l'aide du tableau des variations de la question précédente et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $P_t(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet :

- une seule solution $x_1 \in]0, +\infty[$ si $t^5 - 4 < 0 \iff t < 4^{1/5}$
- deux solutions $x_1 = -t$ et $x_2 \in]0, +\infty[$ si $t^5 - 4 = 0 \iff t = 4^{1/5}$
- trois solutions $x_1 \in]-\infty, -t[$, $x_2 \in]-t, 0[$ et $x_3 \in]0, +\infty[$ si $t^5 - 4 > 0 \iff t > 4^{1/5}$.

Finalement, le nombre de racines de P_t dans $\mathbb{R}$ vaut $\boxed{1 \text{ si } t < 4^{1/5},\ 2 \text{ si } t = 4^{1/5} \text{ et } 3 \text{ si } t > 4^{1/5}}$.

Pour la suite de l'énoncé, on note $r(t)$ l'unique racine réelle positive de P_t pour tout $t > 0$.

5. *Justifier que $r(t) \in]0, 1[$ pour tout $t > 0$.*

► Soit $t > 0$. On a :

$$P_t(0) = -4 < 0 \quad \text{et} \quad P_t(1) = 4 + 5t - 4 = 5t > 0.$$

D'après le tableau des variations de la question 4(a), on en déduit que $\boxed{r(t) \in]0, 1[}$.

x	0		$r(t)$		1
$P_t(x)$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$5t$

6. ***(Informatique)***

(a) En utilisant la fonction `polynome`*, écrire une fonction* `dichotomie1(t,n)` *qui prend en arguments une valeur du paramètre $t > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ puis qui renvoie, à l'aide d'un algorithme de dichotomie, le n-ième terme d'une suite qui converge vers $r(t)$.*

▶ On définit deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ par :

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0,\ a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f(a_n)f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0 \\ \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0,\ b_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f(a_n)f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0 \\ b_n & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après la méthode de dichotomie, les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes et convergent vers une solution de l'équation $P_t(x) = 0$ d'inconnue $x \in [0,1]$. Puisque cette équation admet $r(t)$ comme unique solution d'après le résultat de la question précédente, il suffit donc que la fonction `dichotomie1` renvoie le n-ième terme d'une de ces deux suites. Par exemple :

```
def dichotomie1(t,n):
    a=0
    b=1
    for i in range(n):
        if polynome(t,a)*polynome(t,(a+b)/2)<0:
            b=(a+b)/2
        else:
            a=(a+b)/2
    return a
```

(b) *Écrire une fonction* `approximation1(t,epsilon)` *qui prend en arguments une valeur du paramètre $t > 0$ et une précision $\varepsilon > 0$ puis qui renvoie une valeur approchée de $r(t)$ à ε près.*

▶ De plus, on sait d'après la méthode de dichotomie que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad a_n \leqslant r(t) \leqslant b_n \quad \text{et} \quad b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{1}{2^n}.$$

On en déduit que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant r(t) - a_n \leqslant b_n - a_n = \frac{1}{2^n} \quad \text{donc} \quad |a_n - r(t)| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Ainsi, pour obtenir une valeur approchée de $r(t)$ à ε près, il suffit de renvoyer le terme a_n en choisissant une valeur de $n \geqslant 0$ suffisamment grande pour que $\frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon$. Par exemple :

```
def approximation1(t,epsilon):
    n=0
    while 1/(2**n)>epsilon:
        n=n+1
    return dichotomie1(t,n)
```

On peut également résoudre l'inéquation $\frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon \iff n \geqslant \ln(\frac{1}{\varepsilon})/\ln(2)$. Il suffit donc de choisir pour valeur de n l'entier $\lfloor \ln(\frac{1}{\varepsilon})/\ln(2) \rfloor + 1$. N'oubliez pas la partie entière ! Ce qui donne en Python :

```
import numpy as np
def approximation1(t,epsilon):
    n=int(np.log(1/epsilon)/np.log(2))+1
    return dichotomie1(t,n)
```

7. (a) *On fixe $t_2 > t_1 > 0$ dans cette question. Déterminer le signe de $P_{t_1}(r(t_2))$.*

▶ On a :

$$P_{t_1}(r(t_2)) = 4(r(t_2))^5 + 5t_1(r(t_2))^4 - 4.$$

Or :

$$4(r(t_2))^5 + 5t_2(r(t_2))^4 - 4 = P_{t_2}(r(t_2)) = 0 \quad \text{par définition de } r(t_2).$$

Donc :
$$4(r(t_2))^5 = -5t_2(r(t_2))^4 + 4$$
et :
$$P_{t_1}(r(t_2)) = -5t_2(r(t_2))^4 + 4 + 5t_1(r(t_2))^4 - 4 = 5(t_1 - t_2)(r(t_2))^4.$$
Puisque $t_1 - t_2 < 0$ (car $t_2 > t_1$) et $r(t_2) > 0$ d'après le résultat de la question 5, on en déduit que $\boxed{P_{t_1}(r(t_2)) < 0}$.

(b) *En déduire la monotonie de la fonction $r : t \mapsto r(t)$ sur $]0, +\infty[$.*

▶ On fixe $t_2 > t_1 > 0$. On sait que la fonction $x \mapsto P_{t_1}(x)$ est strictement croissante sur $]0, 1[$ d'après le tableau des variations de la question 4(a). Or $P_{t_1}(r(t_2)) < 0 = P_{t_1}(r(t_1))$ d'après le résultat de la question précédente. Par conséquent, on a montré que $r(t_2) < r(t_1)$.

x	0	$r(t_2)$	$r(t_1)$	1
$P_{t_1}(x)$	-4	< 0	$= 0$	$5t_1$

Puisque ceci est vrai pour tout $(t_1, t_2) \in]0, +\infty[^2$ tels que $t_1 < t_2$, on en déduit que la fonction $\boxed{r : t \mapsto r(t) \text{ est strictement décroissante sur }]0, +\infty[}$.

8. (a) *Justifier que r se prolonge par continuité en 0.*

▶ La fonction r est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ d'après le résultat de la question précédente. De plus, elle est majorée par 1 d'après le résultat de la question 5. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que la limite de $r(t)$ quand t tend vers 0^+ existe et est finie. Par conséquent, $\boxed{r \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$ en posant $r(0) = \lim_{t \to 0^+} r(t)$.

(b) *On note encore r le prolongement obtenu. Déterminer $r(0)$.*

▶ On a pour tout $t > 0$:
$$4(r(t))^5 + 5t(r(t))^4 - 4 = P_t(r(t)) = 0 \quad \text{par définition de } r(t).$$
Puisque $r(0) = \lim_{t \to 0^+} r(t)$ d'après le résultat de la question précédente, on obtient en passant à la limite quand $t \to 0^+$:
$$0 = \lim_{t \to 0^+} 4(r(t))^5 + 5t(r(t))^4 - 4 = 4r(0)^5 + 5 \times 0 \times r(0)^4 - 4 = 4(r(0)^5 - 1).$$
On en déduit que $r(0)^5 = 1$ donc $\boxed{r(0) = 1}$.

(c) *Montrer que $r(t) - 1$ est équivalent à $-t/4$ quand t tend vers 0^+.*

▶ On a pour tout $t > 0$:
$$4(r(t))^5 + 5t(r(t))^4 - 4 = P_t(r(t)) = 0 \quad \text{par définition de } r(t).$$
Par conséquent :
$$\forall t > 0, \quad -\frac{5}{4}t(r(t))^4 = (r(t))^5 - 1 = \Big(1 + (r(t) - 1)\Big)^5 - 1.$$
Or $\lim_{t \to 0^+} r(t) = r(0) = 1$ d'après le résultat de la question précédente. Donc $-\frac{5}{4}t(r(t))^4$ est équivalent à $-\frac{5}{4}t$ quand t tend vers 0^+. De plus $\lim_{t \to 0^+}(r(t) - 1) = 0$ et donc d'après les équivalents usuels :
$$\Big(1 + (r(t) - 1)\Big)^5 - 1 \underset{t \to 0^+}{\sim} 5(r(t) - 1).$$
Finalement, on a :
$$-\frac{5}{4}t \underset{t \to 0^+}{\sim} -\frac{5}{4}t(r(t)) = \Big(1 + (r(t) - 1)\Big)^5 - 1 \underset{t \to 0^+}{\sim} 5(r(t) - 1) \quad \text{donc} \quad \boxed{r(t) - 1 \underset{t \to 0^+}{\sim} -\frac{t}{4}}.$$

9. (a) *Justifier que $\ell = \lim_{t\to+\infty} r(t)$ existe et est finie.*

► La fonction r est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ d'après le résultat de la question 7(b). De plus, elle est minorée par 0 d'après le résultat de la question 5. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que $\boxed{\ell = \lim_{t\to+\infty} r(t) \text{ existe et est finie}}$.

(b) *Montrer que $\ell > 0$ est absurde. En déduire la valeur de ℓ.*

► On suppose que $\ell > 0$. On a pour tout $t > 0$:

$$4(r(t))^5 + 5t(r(t))^4 - 4 = P_t(r(t)) = 0 \quad \text{par définition de } r(t).$$

Puisque $\lim_{t\to+\infty} = \ell > 0$, on obtient en passant à la limite quand $t \to +\infty$.

$$0 = \lim_{t\to+\infty} \underbrace{4(r(t))^5}_{\to+\infty} + \underbrace{5t(r(t))^4}_{\to 5\ell(+\infty)=+\infty} -4 = +\infty.$$

Ce qui est $\boxed{\text{absurde}}$. On en déduit que $\ell \leqslant 0$. Or on a $r(t) > 0$ pour tout $t > 0$ d'après le résultat de la question 5. En passant à la limite quand $t \to +\infty$, on en déduit que $\ell = \lim_{t\to+\infty} r(t) \geqslant 0$. Finalement, on a montré que $\boxed{\ell = 0}$.

(c) *Montrer que $r(t)$ est équivalent à $(4/(5t))^{1/4}$ quand t tend vers $+\infty$.*

► On a pour tout $t > 0$:

$$4(r(t))^5 + 5t(r(t))^4 - 4 = P_t(r(t)) = 0 \quad \text{par définition de } r(t).$$

Par conséquent :

$$\forall t > 0, \quad \frac{r(t)}{\left(\frac{4}{5t}\right)^{1/4}} = \left(\frac{5t(r(t))^4}{4}\right)^{1/4} = \left(\frac{4 - 4(r(t))^5}{4}\right)^{1/4} = \left(1 - (r(t))^5\right)^{1/4}.$$

Or $\lim_{t\to+\infty}(1 - (r(t))^5)^{1/4} = 1$ car $\lim_{t\to+\infty} r(t) = \ell = 0$ d'après le résultat de la question précédente. On en déduit bien que :

$$\boxed{r(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \left(\frac{4}{5t}\right)^{1/4}}.$$

10. *On pose la fonction $f : x \mapsto 4(1 - x^5)/(5x^4)$.*

(a) *Montrer que f réalise une bijection de $]0,1]$ vers un intervalle à déterminer.*

► La fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $]0,1]$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas (car $5x^4 = 0 \iff x = 0$). On a :

$$\forall x \in]0,1], \quad f'(x) = 4\frac{-5x^4(5x^4) - (1-x^5)20x^3}{(5x^4)^2} = 4\frac{-25x^8 - 20x^3 + 20x^8}{25x^8}$$
$$= -4x^3\frac{x^5+4}{5x^4} < 0 \quad \text{car } x > 0.$$

De plus :

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} 4\frac{1-x^5}{5x^4} = +\infty \quad \text{et} \quad f(1) = 4\frac{1-1}{5} = 0.$$

On en déduit le tableau des variations de f :

x	0		1
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0

Ainsi, f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0,1]$. D'après le théorème de la bijection, on en déduit que $\boxed{f :]0,1] \to [0,+\infty[\text{ est bijective}}$.

(b) *Justifier que r est la bijection réciproque de f et en déduire que r est continue sur $[0,+\infty[$.*

► On a pour tout $t > 0$:

$$4(r(t))^5 + 5t(r(t))^4 - 4 = P_t(r(t)) = 0 \quad \text{par définition de } r(t)$$

donc :

$$f(r(t)) = 4\frac{1-(r(t))^5}{5(r(t))^4} = \frac{4-4(r(t))^5}{5(r(t))^4} = \frac{5t(r(t))^4}{5(r(t))^4} = t.$$

On en déduit que $f \circ r = \mathrm{Id}_{]0,+\infty[}$.

Attention : cela ne suffit pas à montrer que r est la bijection réciproque de f. Il faut aussi vérifier que $r \circ f = \mathrm{Id}_{]0,1]}$.

Soit $x \in]0,1]$. Par définition $r(f(x))$ est l'unique racine réelle positive du polynôme $P_{f(x)}$. Or on a $x > 0$ et :

$$P_{f(x)}(x) = 4x^5 + 5f(x)x^4 - 4 = 4x^5 + 20\frac{1-x^5}{5x^4}x^4 - 4 = 4x^5 + 4 - 4x^5 - 4 = 0.$$

Par conséquent $r(f(x)) = x$ donc $r \circ f = \mathrm{Id}_{]0,1]}$. On en déduit que $\boxed{r : [0,+\infty[\to]0,1] \text{ est la bijection réciproque de } f :]0,1] \to [0,+\infty[}$.

Au lieu de montrer que $f \circ r = \mathrm{Id}_{]0,+\infty[}$ et $r \circ f = \mathrm{Id}_{]0,1]}$, on peut aussi vérifier que pour tout $t > 0$, l'unique solution de l'équation $f(x) = t$ d'inconnue $x \in]0,1]$ est $x = r(t)$.

De plus, en reprenant le raisonnement de la question précédente, on sait d'après le théorème de la bijection que la bijection réciproque de $f :]0,1] \to [0,+\infty[$ est continue. Finalement, on a bien montré que $\boxed{r \text{ est continue sur } [0,+\infty[}$.

11. (a) *Justifier que P_t admet également une unique racine réelle positive pour tout $t < 0$.*

► Soit $t < 0$. En reprenant les calculs des questions 4(a) et 4(b), on obtient le tableau des variations suivant :

x	$-\infty$		0		$-t$		$+\infty$
$P_t'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P_t(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	t^5-4	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $P_t(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une seule solution $x \in]-t,+\infty[$. Par conséquent, $\boxed{P_t \text{ admet une unique racine réelle qui est positive}}$ car $-t > 0$.

On note encore $r(t)$ cette racine pour tout $t < 0$.

(b) ***(Informatique)*** *On considère la fonction* `mystere` *suivante.*

```
def mystere(t):
    k=0
    while polynome(t,k)<=0:
        k=k+1
    return k
```

i. Expliquer ce que renvoie la fonction `mystere`.

▶ La fonction `mystere` teste tous les entiers $k \geqslant 0$ les uns après les autres et renvoie la première valeur trouvée telle que $P_t(k) > 0$. Autrement dit, la fonction `mystere` renvoie $\boxed{\text{le plus petit entier } k \geqslant 0 \text{ dont l'image par } P_t \text{ est strictement positive}}$.

ii. À l'aide de la fonction `mystere`, *écrire une fonction* `dichotomie2(t,n)` *et une fonction* `approximation2(t,epsilon)` *similaires à celles des questions 6(a) et 6(b) mais qui prennent en argument une valeur du paramètre $t < 0$.*

▶ On reprend le raisonnement des questions 6(a) et 6(b) pour l'équation $P_t(x) = 0$ d'inconnue $x \in [a, b]$ où $a < b$ sont deux réels tels que $P_t(a) < 0$ et $P_t(b) > 0$. D'après le tableau des variations de la question 11(a) et le résultat de la question précédente, on peut choisir $a = -t$ et $b =$ `mystere(t)`. Par exemple :

```
def dichotomie2(t,n):
    a=-t
    b=mystere(t)
    for i in range(n):
        if polynome(t,a)*polynome(t,(a+b)/2)<0:
            b=(a+b)/2
        else:
            a=(a+b)/2
    return a
```

On peut aussi choisir `a=0` *ou* `a=mystere-1`.

```
def approximation2(t,epsilon):
    n=0
    while (mystere(t)+t)/(2**n)>epsilon:
        n=n+1
    return dichotomie2(t,n)
```

Attention, si on choisit `a=-t` *et* `b=mystere(t)` *alors on a :*

$$\forall n \geqslant 0, \quad b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{b - a}{2^n} = \frac{\texttt{mystere(t)} + t}{2^n}.$$

Il faut donc modifier l'algorithme de la question 6(b) pour choisir une valeur de $n \geqslant 0$ suffisamment grande pour que $\frac{\texttt{mystere(t)}+t}{2^n} \leqslant \varepsilon$.

(c) À l'aide de la fonction f définie à la question 10, montrer que r est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, puis déterminer $\lim_{t\to-\infty} r(t)$ et un équivalent simple de $r(t)$ quand $t \to -\infty$.

▶ En reprenant le raisonnement de la question 10(a), on obtient que la fonction f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $f'(x) < 0$ pour tout $x > 0$. Son tableau des variations est :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

car :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 4\frac{\overbrace{1 - x^5}^{\sim -x^5}}{5x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x^5}{5x^4} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{4}{5}x = -\infty.$$

Ainsi, d'après le théorème de la bijection, $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est bijective. En reprenant le raisonnement de la question 10(b), on obtient que $f \circ r = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ et $r \circ f = \mathrm{Id}_{]0,+\infty[}$, donc $r : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ est la bijection réciproque de $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$. Par conséquent, $\boxed{r \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$ d'après le théorème de la bijection. De plus, on obtient le tableau des variations suivant :

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$r(t)$	$+\infty$	1	0

Donc $\boxed{r \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}}$ et $\boxed{\lim_{t\to-\infty} r(t) = +\infty}$. De plus on a :

$$f(x) = 4\frac{1-x^5}{5x^4} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-4x^5}{5x^4} = -\frac{4}{5}x.$$

À l'aide du changement de variable $x = r(t)$, on en déduit que :

$$t = f(r(t)) \underset{t\to-\infty}{\sim} -\frac{4}{5}r(t) \quad \text{car } \lim_{t\to-\infty} x = +\infty.$$

Finalement, on obtient en multipliant cette équivalent par $-5/4$:

$$\boxed{r(t) \underset{t\to-\infty}{\sim} -\frac{5t}{4}}.$$