DS 6 mathématiques

BCPST 1 2018-2019

— Durée : 3 heures.

— Documents et calculatrice non autorisés.

— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Problème 1 : un jeu télévisé

Introduction

Toto décide de participer au jeu télévisé "C'est le dernier 0 !" qui se déroule de la façon suivante :

1. N urnes ($N \in \mathbb{N}^\star$) numérotées de 1 à N sont placées devant le candidat.
2. Pour tout $i \in [|1, N|]$, l'urne i contient exactement i boules, numérotées respectivement $0, 1, 2, \cdots, i-1$. Par exemple, l'urne 1 contient uniquement une boule numérotée 0 et l'urne 2 contient deux boules numérotées respectivement 0 et 1.
3. Le candidat tire d'abord une boule dans l'urne 1 puis une boule dans l'urne 2, puis une dans l'urne 3 etc. Dès qu'il tombe sur un 0, on lui demande s'il pense que ce sera le dernier 0 qu'il aura tiré. Deux cas se présentent alors :
   — s'il considère que ce sera le dernier 0, il affirme alors que "c'est le dernier 0" et termine de tirer les boules des urnes suivantes. Si dans ces tirages il n'y a pas eu d'autre 0 alors le candidat gagne une mallette pleine de billets verts. Sinon, il repart les mains vides.
   — Ou bien il considère que ce ne sera pas le dernier 0 qu'il trouve, et dans ce cas il affirme qu'"il y aura d'autre 0", continue ses tirages jusqu'au prochain 0 (si celui-ci existe) et on lui demande de nouveau si c'est le dernier 0. S'il n'y en n'a pas eu, il repart les mains vides.

Par exemple, pour $N = 4$, si un candidat tire successivement $0, 1, 0, 2$, il y a eu plusieurs déroulements possibles :

— cas 1 : pour le premier 0, le candidat a affirmé que c'est le dernier 0. Il a alors perdu.

— cas 2 : pour le deuxième 0, le candidat a affirmé que c'est le dernier 0. Il a alors gagné.

— cas 3 : pour le deuxième 0, le candidat a affirmé qu'il y aura d'autre 0. Il a alors perdu.

L'objectif du problème est de trouver une stratégie optimisant les chances de gagner de Toto.

Dans la suite, $\Omega_N = \{0\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0, 1, \cdots, N-1\}$ désigne l'ensemble des tirages possibles. Par exemple, $\Omega_2 = \{0\} \times \{0,1\}$ est exactement l'ensemble $\{(0,0),(0,1)\}$, la 3-liste $(0,1,0)$ est un élément de Ω_3 et la 5-liste $(0,0,2,3,1)$ est un élément de Ω_5.

Pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, N\}$ et $i \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$, $(T_k = i)$ désigne l'événement "la boule i a été tirée dans l'urne k" et D_k désigne l'événement "la boule 0 a été tirée dans l'urne k et c'est le dernier 0".

On suppose que les tirages sont indépendants dans leur ensemble et

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, N\}, \forall i \in \{0, 1, \cdots, k-1\}, P(T_k = i) = \frac{1}{k}.$$

Calculs préliminaires

1. Décrire tous les éléments de Ω_3.
2. Soit $N \geq 1$. Déterminer le cardinal de Ω_N.
3. Soit $N \geq 1$. Montrer que pour tout $(a_1, a_2, \cdots, a_N) \in \Omega_N$, $P\left((T_1 = a_1) \cap (T_2 = a_2) \cap \cdots \cap (T_N = a_N)\right) = \frac{1}{N!}$. Ainsi, Ω_N est muni de la probabilité uniforme.
4. **(INFO)** Écrire une fonction `tirage(N)` qui prend en argument un entier $N \geq 1$ et qui renvoie un élément de Ω_N de façon aléatoire et uniforme.
5. Soit $N \geq 1$. Déterminer la probabilité de gagner si on affirme que le premier 0 tiré est le dernier.

6. Soient $N \geq 1$ et $k \in \{1, \cdots, N\}$.
   (a) Montrer que $P(D_k|(T_k = 0)) = \prod_{j=k+1}^{N}(1 - \frac{1}{j})$.
   (b) En déduire que $P(D_k|(T_k = 0)) = \frac{k}{N}$.
   (c) Exprimer $P(D_k)$ en fonction de N.
7. Soit $N \geq 1$. Pour tout $(k, \ell) \in \{1, \cdots, N\}^2$, on pose
   — A_k l'événement " après le k^{e} tirage (exclus), il y a exactement un 0",
   — $B_{k,\ell} = \cap_{i=k+1}^{\ell-1}\overline{(T_i = 0)}$. Autrement dit, $B_{k,\ell}$ est l'événement "il n'y a pas de zéro entre le k^{e} tirage (exclus) et ℓ^{e} tirage (exclus)". Par convention, si $k \geq \ell - 1$, $B_{k,\ell}$ est l'événement certain Ω_N.
   (a) Soit $(k, \ell) \in \{1, 2 \cdots, N\}^2, k < \ell - 1$. Montrer que $P(B_{k,\ell}) = \frac{k}{\ell - 1}$.
   (b) Soit $k \in \{1, 2, \cdots, N - 1\}$.
      i. Montrer que : $A_k = \displaystyle\bigcup_{\ell=k+1}^{N} (D_\ell \cap B_{k,\ell})$.
      ii. En déduire que : $P(A_k) = P(A_k|T_k = 0) = \dfrac{k}{N}\left(\displaystyle\sum_{\ell=k+1}^{N} \frac{1}{(\ell - 1)}\right)$.

Étude d'une stratégie

Toto décide d'opter pour la stratégie $\mathcal{S}$ suivante : au k^{e} tirage, si l'on a obtenu un 0, on compare $P(A_k|T_k = 0)$ et $P(D_k|T_k = 0)$. Si $P(A_k|T_k = 0) < P(D_k|T_k = 0)$, on annonce que c'est le dernier 0. Sinon, on effectue le même raisonnement au prochain 0.

Dans la suite, pour tout $N \geq 1$, on note k_N le plus petit entier k strictement positif vérifiant

$$P(A_k|T_k = 0) < P(D_k|T_k = 0).$$

Ainsi, la stratégie décrite consiste à affirmer que le premier 0 tiré à partir du $k_N{}^{\text{e}}$ tirage est le dernier. On remarque et on admet alors que l'événement G_N "le candidat gagne à l'aide de la stratégie $\mathcal{S}$" est égal à l'événement $A_{k_N - 1}$.

8. Soient $N \geq 3, k \in \{1, 2, \cdots, N - 1\}$. Montrer que : $(P(A_k|T_k = 0) < P(D_k|T_k = 0)) \Leftrightarrow \left(\displaystyle\sum_{\ell=k}^{N-1} \frac{1}{\ell} < 1\right)$.
9. Calculer k_3, k_4.
10. **(INFO)** Écrire une fonction `arrete(N)` qui prend en argument un entier $N \geq 2$ et qui renvoie k_N.
11. Dans les questions suivantes, on veut démontrer que :

$$\forall N \geq 3, \forall k \in \{2, 3, \cdots, N - 1\}, \ln\left(\frac{N}{k}\right) \leq \sum_{\ell=k}^{N-1} \frac{1}{\ell} \leq \ln\left(\frac{N-1}{k-1}\right).$$

   Soient $N \geq 3, \ell \in \{2, 3, \cdots, N - 1\}$.
   (a) Montrer que : $\forall x \in [\ell, \ell + 1], \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\ell} \leq \dfrac{1}{x - 1}$.
   (b) À l'aide du calcul intégral, montrer que $\ln(\ell + 1) - \ln(\ell) \leq \dfrac{1}{\ell} \leq \ln(\ell) - \ln(\ell - 1)$.
12. Soient $N \geq 3$, $k \in \{2, 3, \cdots, N - 1\}$. Déduire des calculs précédents que

$$\ln\left(\frac{N}{k}\right) \leq \sum_{\ell=k}^{N-1} \frac{1}{\ell} \leq \ln\left(\frac{N-1}{k-1}\right)$$

13. Soit $N \geq 5$. Montrer que $\ln(\frac{N}{k_N}) < 1$ et que $1 \leq \ln(\frac{N}{k_N - 2})$.
14. Montrer que pour tout $N \geq 5, k_N > \frac{N}{e}$. En déduire la limite de la suite $(k_N)_{N \geq 5}$.
15. Montrer que la suite $(\frac{k_N}{N})_{N \geq 5}$ est convergente et déterminer sa limite.
16. À l'aide des questions précédentes, montrer que la suite $(P(G_N))_{N \geq 5}$ est convergente et déterminer sa limite.
17. En déduire que pour tout N assez grand, en adoptant la stratégie $\mathcal{S}$, Toto a plus d'une chance sur trois de gagner. On rappelle que $e < 3$.