DS 6 mathématiques

BCPST 1 2018-2019

— Durée : 3 heures.

— Documents et calculatrice non autorisés.

— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Problème 1 : un jeu télévisé

Introduction

Toto décide de participer au jeu télévisé "C'est le dernier 0 !" qui se déroule de la façon suivante :

1. N urnes ($N \in \mathbb{N}^\star$) numérotées de 1 à N sont placées devant le candidat.
2. Pour tout $i \in [|1, N|]$, l'urne i contient exactement i boules, numérotées respectivement $0, 1, 2, \cdots, i-1$. Par exemple, l'urne 1 contient uniquement une boule numérotée 0 et l'urne 2 contient deux boules numérotées respectivement 0 et 1.
3. Le candidat tire d'abord une boule dans l'urne 1 puis une boule dans l'urne 2, puis une dans l'urne 3 etc. Dès qu'il tombe sur un 0, on lui demande s'il pense que ce sera le dernier 0 qu'il aura tiré. Deux cas se présentent alors :
   — s'il considère que ce sera le dernier 0, il affirme alors que "c'est le dernier 0" et termine de tirer les boules des urnes suivantes. Si dans ces tirages il n'y a pas eu d'autre 0 alors le candidat gagne une mallette pleine de billets verts. Sinon, il repart les mains vides.
   — Ou bien il considère que ce ne sera pas le dernier 0 qu'il trouve, et dans ce cas il affirme qu'"il y aura d'autre 0", continue ses tirages jusqu'au prochain 0 (si celui-ci existe) et on lui demande de nouveau si c'est le dernier 0. S'il n'y en n'a pas eu, il repart les mains vides.

Par exemple, pour $N = 4$, si un candidat tire successivement $0, 1, 0, 2$, il y a eu plusieurs déroulements possibles :

— cas 1 : pour le premier 0, le candidat a affirmé que c'est le dernier 0. Il a alors perdu.

— cas 2 : pour le deuxième 0, le candidat a affirmé que c'est le dernier 0. Il a alors gagné.

— cas 3 : pour le deuxième 0, le candidat a affirmé qu'il y aura d'autre 0. Il a alors perdu.

L'objectif du problème est de trouver une stratégie optimisant les chances de gagner de Toto.

Dans la suite, $\Omega_N = \{0\} \times \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1, \cdots, N-1\}$ désigne l'ensemble des tirages possibles. Par exemple, $\Omega_2 = \{0\} \times \{0, 1\}$ est exactement l'ensemble $\{(0, 0), (0, 1)\}$, la 3-liste $(0, 1, 0)$ est un élément de Ω_3 et la 5-liste $(0, 0, 2, 3, 1)$ est un élément de Ω_5.

Pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, N\}$ et $i \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$, $(T_k = i)$ désigne l'événement "la boule i a été tirée dans l'urne k" et D_k désigne l'événement "la boule 0 a été tirée dans l'urne k et c'est le dernier 0".

On suppose que les tirages sont indépendants dans leur ensemble et

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, N\}, \forall i \in \{0, 1, \cdots, k-1\}, P(T_k = i) = \frac{1}{k}.$$

Calculs préliminaires

1. Décrire tous les éléments de Ω_3.
2. Soit $N \geq 1$. Déterminer le cardinal de Ω_N.
3. Soit $N \geq 1$. Montrer que pour tout $(a_1, a_2, \cdots, a_N) \in \Omega_N$, $P((T_1 = a_1) \cap (T_2 = a_2) \cap \cdots \cap (T_N = a_N)) = \frac{1}{N!}$. Ainsi, Ω_N est muni de la probabilité uniforme.
4. **(INFO)** Écrire une fonction `tirage(N)` qui prend en argument un entier $N \geq 1$ et qui renvoie un élément de Ω_N de façon aléatoire et uniforme.
5. Soit $N \geq 1$. Déterminer la probabilité de gagner si on affirme que le premier 0 tiré est le dernier.

6. Soient $N \geq 1$ et $k \in \{1, \cdots, N\}$.
   (a) Montrer que $P(D_k|(T_k = 0)) = \prod_{j=k+1}^{N}(1 - \frac{1}{j})$.
   (b) En déduire que $P(D_k|(T_k = 0)) = \frac{k}{N}$.
   (c) Exprimer $P(D_k)$ en fonction de N.
7. Soit $N \geq 1$. Pour tout $(k, \ell) \in \{1, \cdots, N\}^2$, on pose
   — A_k l'événement " après le k^{e} tirage (exclus), il y a exactement un 0",
   — $B_{k,\ell} = \cap_{i=k+1}^{\ell-1}\overline{(T_i = 0)}$. Autrement dit, $B_{k,\ell}$ est l'événement "il n'y a pas de zéro entre le k^{e} tirage (exclus) et ℓ^{e} tirage (exclus)". Par convention, si $k \geq \ell - 1$, $B_{k,\ell}$ est l'événement certain Ω_N.
   (a) Soit $(k, \ell) \in \{1, 2 \cdots, N\}^2, k < \ell - 1$. Montrer que $P(B_{k,\ell}) = \frac{k}{\ell-1}$.
   (b) Soit $k \in \{1, 2, \cdots, N - 1\}$.
      i. Montrer que : $A_k = \displaystyle\bigcup_{\ell=k+1}^{N} (D_\ell \cap B_{k,\ell})$.
      ii. En déduire que : $P(A_k) = P(A_k|T_k = 0) = \dfrac{k}{N}\left(\displaystyle\sum_{\ell=k+1}^{N} \frac{1}{(\ell - 1)}\right)$.

Correction

1. Par définition, $\Omega_3 = \{0\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1, 2\}$. Ces éléments sont donc exactement :
$$\boxed{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 2), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 2).}$$
2. Soit $N \geq 1$. Par définition $\Omega_N = \{0\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1, 2, \cdots, N - 1\}$. Donc
$$\text{Card}(\Omega_N) = \prod_{i=1}^{N} \text{Card}(\{0, 1, \cdots, i - 1\}).$$
   D'où
$$\text{Card}(\Omega_N) = \prod_{i=1}^{N} i.$$
   Donc $\boxed{\text{Card}(\Omega_N) = N!.}$
3. Soit $(a_1, a_2, \cdots, a_N) \in \Omega_N$. Par hypothèse, les tirages étant indépendants dans leur ensemble, on en déduit que
$$P\left((T_1 = a_1) \cap (T_2 = a_2) \cap \cdots \cap (T_N = a_N)\right) = \prod_{k=1}^{N} P(T_k = a_k).$$
   De plus, pour tout $(k, i) \in \{1, 2, \cdots, N\} \times \{0, 1, \cdots, k - 1\}, P(T_k = i) = \frac{1}{k}$. D'où
$$P\left((T_1 = a_1) \cap (T_2 = a_2) \cap \cdots \cap (T_N = a_N)\right) = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{k}.$$
   Autrement dit,
$$\boxed{P\left((T_1 = a_1) \cap (T_2 = a_2) \cap \cdots \cap (T_N = a_N)\right) = \frac{1}{N!}}.$$
4. **(INFO)**

```
import random as rd
def tirage(N) :
    if N>=1 :
        L=[]
        for k in range(N) :
            a=rd.randint(0,k)
            L.append(a)
        return L
```

5. Soit $N \geq 1$. Notons A l'événement "le candidat gagne en affirmant que le premier 0 est le dernier". A est alors l'ensemble des tirages où le seul 0 est le premier. Donc $A = \{0\} \times \{1\} \times \{1,2\} \times \cdots \times \{1,2,\cdots,N-1\}$. Ω_N étant muni de la probabilité uniforme, on en déduit que

$$P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega_N)}.$$

Mais $\mathrm{Card}(A) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (N-1) = (N-1)!$. D'où

$$P(A) = \frac{(N-1)!}{N!}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{N}.}$$

6. Soient $N \geq 1$ et $k \in \{1, \cdots, N\}$.

(a) Par définition, D_k est exactement l'événement $(T_k = 0) \cap \left(\cap_{i=k+1}^{N} \overline{(T_i = 0)}\right)$. Donc

$$\begin{aligned} P(D_k|(T_k=0)) &= \tfrac{P(D_k \cap (T_k=0))}{P(T_k=0)} \\ &= \tfrac{P(D_k)}{P(T_k=0)} \qquad \text{car } D_k \subset (T_k = 0). \end{aligned}$$

Les tirages étant indépendants dans leur ensemble, il en résulte que

$$\begin{aligned} P(D_k|(T_k=0)) &= \tfrac{P(T_k=0)\prod_{i=k+1}^{N} P(\overline{(T_i=0)})}{P(T_k=0)} \\ &= \textstyle\prod_{i=k+1}^{N} P(\overline{(T_i=0)}) \\ &= \textstyle\prod_{i=k+1}^{N} (1 - P(T_i = 0)) \\ &= \textstyle\prod_{i=k+1}^{N} (1 - \frac{1}{i}) \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{P(D_k|(T_k=0)) = \prod_{i=k+1}^{N} (1 - \frac{1}{i}).}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} P(D_k|(T_k=0)) &= \textstyle\prod_{i=k+1}^{N} (1 - \frac{1}{i}), \qquad \text{D'après la question 6.a,} \\ &= \textstyle\prod_{i=k+1}^{N} \frac{i-1}{i} \\ &= \tfrac{k}{k+1}\tfrac{k+1}{k+2}\cdots\tfrac{i-1}{i}\cdots\tfrac{N-1}{N} \\ &= \tfrac{k}{\cancel{k+1}}\tfrac{\cancel{k+1}}{\cancel{k+2}}\cdots\tfrac{\cancel{i-1}}{\cancel{i}}\cdots\tfrac{\cancel{N-1}}{N} \qquad \text{Par télescopage} \\ &= \underline{\tfrac{k}{N}}. \end{aligned}$$

(c) L'événement D_k étant inclus dans $(T_k = 0)$, on en déduit que

$$\begin{aligned} P(D_k) &= P((T_k=0) \cap D_k) \\ &= P(T_k=0)P(D_k|T_k=0) \\ &= \tfrac{1}{k}\tfrac{k}{N} \qquad \text{les différents tirages étant équiprobable et d'après la question 6.c} \\ &= \underline{\tfrac{1}{N}}. \end{aligned}$$

7. Soit $N \geq 1$.

(a) Soit $(k, \ell) \in \{1, 2 \cdots, N\}^2, k < \ell - 1$. On a

$$\begin{aligned}
P(B_{k,\ell}) &= P(\cap_{i=k+1}^{\ell-1} \overline{(T_i = 0)}) \\
&= \prod_{i=k+1}^{\ell-1} P(\overline{T_i = 0}), && \text{les événements étant indépendants dans leur ensemble} \\
&= \prod_{i=k+1}^{\ell-1} (1 - P(T_i = 0)) \\
&= \prod_{i=k+1}^{\ell-1} (1 - \tfrac{1}{i}) \\
&= \prod_{i=k+1}^{\ell-1} \tfrac{i-1}{i} \\
&= \tfrac{k(k+1)\cdots(\ell-2}{(k+1)(k+2)\cdots(\ell-1)} \\
&= \underline{\tfrac{k}{\ell-1}} && \text{en simplifiant.}
\end{aligned}$$

(b) Soit $k \in \{1, 2, \cdots, N-1\}$.

i. Montrons que : $A_k = \displaystyle\bigcup_{\ell=k+1}^{N} (D_\ell \cap B_{k,\ell})$ par double inclusion.

— Soit $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N) \in A_k$. Notons k_0 l'indice du dernier 0. Par définition de k_0, ω_{k_0} est le dernier 0. Donc $\omega \in D_{k_0}$. De plus, par définition de A_k, ω_{k_0} est le seul 0 obtenu à partir du rang $k+1$. Donc $\omega \in B_{k,k_0}$. Par conséquent, $\omega \in D_{k_0} \cap B_{k,k_0}$. D'où

$$\omega \in \bigcup_{\ell=k+1}^{N} (D_\ell \cap B_{k,\ell}).$$

On a bien

$$\underline{A_k \subset \bigcup_{\ell=k+1}^{N} (D_\ell \cap B_{k,\ell}).}$$

— Soit $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N) \in \bigcup_{\ell=k+1}^{N} (D_\ell \cap B_{k,\ell})$. Il existe donc $k_0 \in \{k+1, \cdots, N\}$ tel que ω est un élément de $(D_{k_0} \cap B_{k,k_0})$. Donc l'unique 0 obtenu après le rang k (exclus) est ω_{k_0}. Donc ω est bien un élément de A_k. D'où

$$\underline{\bigcup_{\ell=k+1}^{N} (D_\ell \cap B_{k,\ell}) \subset A_k.}$$

— D'après le principe de double inclusion,

$$\boxed{\bigcup_{\ell=k+1}^{N} (D_\ell \cap B_{k,\ell}) = A_k.}$$

ii. D'après la question 7.b.i, $\bigcup_{\ell=k+1}^{N} (D_\ell \cap B_{k,\ell}) = A_k$. Les événements $(D_\ell \cap B_{k,\ell})_{k+1 \leq \ell \leq N}$ étant deux à deux incompatibles, on en déduit que

$$P(A_k) = \sum_{\ell=k+1}^{N} P(D_\ell \cap B_{k,\ell}).$$

Or pour tout $\ell \in \{k+1, \cdots, N\}$, $D_\ell = (T_\ell = 0) \cap (\cap_{i=\ell+1}^{N} \overline{(T_i = 0)})$ et $B_{k,\ell} = \cap_{i=k+1}^{\ell-1} \overline{(T_i = 0)}$. Les tirages étant indépendants dans leur ensemble, ces deux événements sont donc indépendants. D'où

$$P(A_k) = \sum_{\ell=k+1}^{N} P(D_\ell) P(B_{k,\ell}).$$

En remplaçant par leur valeur,

$$P(A_k) = \sum_{\ell=k+1}^{N} \frac{1}{N} \frac{k}{\ell - 1}.$$

D'où

$$\boxed{P(A_k) = \frac{k}{N} \left(\sum_{\ell=k+1}^{N} \frac{1}{\ell - 1} \right).}$$

L'événement A_k étant indépendant de $(T_k = 0)$, on en déduit que

$$P(A_k | T_k = 0) = P(A_k).$$

D'où

$$\boxed{P(A_k | T_k = 0) = \frac{k}{N} \left(\sum_{\ell=k+1}^{N} \frac{1}{\ell - 1} \right).}$$

Étude d'une stratégie

Toto décide d'opter pour la stratégie $\mathcal{S}$ suivante : au k^{e} tirage, si l'on a obtenu un 0, on compare $P(A_k|T_k = 0)$ et $P(D_k|T_k = 0)$. Si $P(A_k|T_k = 0) < P(D_k|T_k = 0)$, on annonce que c'est le dernier 0. Sinon, on effectue le même raisonnement au prochain 0.

Dans la suite, pour tout $N \geq 1$, on note k_N le plus petit entier k strictement positif vérifiant

$$P(A_k|T_k = 0) < P(D_k|T_k = 0).$$

Ainsi, la stratégie décrite consiste à affirmer que le premier 0 tiré à partir du ${k_N}^{\text{e}}$ tirage est le dernier. On remarque et on admet alors que l'événement G_N "le candidat gagne à l'aide de la stratégie $\mathcal{S}$" est égal à l'événement $A_{k_N - 1}$.

8. Soient $N \geq 3, k \in \{1, 2, \cdots, N-1\}$. Montrer que : $(P(A_k|T_k = 0) < P(D_k|T_k = 0)) \Leftrightarrow \left(\sum_{\ell=k}^{N-1} \frac{1}{\ell} < 1 \right)$.
9. Calculer k_3, k_4.
10. **(INFO)** Écrire une fonction `arrete(N)` qui prend en argument un entier $N \geq 2$ et qui renvoie k_N.
11. Dans les questions suivantes, on veut démontrer que :

$$\forall N \geq 3, \forall k \in \{2, 3, \cdots, N-1\}, \ln\left(\frac{N}{k}\right) \leq \sum_{\ell=k}^{N-1} \frac{1}{\ell} \leq \ln\left(\frac{N-1}{k-1}\right).$$

Soient $N \geq 3, \ell \in \{2, 3, \cdots, N-1\}$.

(a) Montrer que : $\forall x \in [\ell, \ell+1], \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\ell} \leq \frac{1}{x-1}$.

(b) À l'aide du calcul intégral, montrer que $\ln(\ell+1) - \ln(\ell) \leq \frac{1}{\ell} \leq \ln(\ell) - \ln(\ell-1)$.

12. Soient $N \geq 3$, $k \in \{2, 3, \cdots, N-1\}$. Déduire des calculs précédents que

$$\ln\left(\frac{N}{k}\right) \leq \sum_{\ell=k}^{N-1} \frac{1}{\ell} \leq \ln\left(\frac{N-1}{k-1}\right)$$

13. Soit $N \geq 5$. Montrer que $\ln(\frac{N}{k_N}) < 1$ et que $1 \leq \ln(\frac{N}{k_N - 2})$.
14. Montrer que pour tout $N \geq 5, k_N > \frac{N}{e}$. En déduire la limite de la suite $(k_N)_{N \geq 5}$.
15. Montrer que la suite $(\frac{k_N}{N})_{N \geq 5}$ est convergente et déterminer sa limite.
16. À l'aide des questions précédentes, montrer que la suite $(P(G_N))_{N \geq 5}$ est convergente et déterminer sa limite.
17. En déduire que pour tout N assez grand, en adoptant la stratégie $\mathcal{S}$, Toto a plus d'une chance sur trois de gagner. On rappelle que $e < 3$.

Correction

8. Soient $N \geq 3, k \in \{1, 2, \cdots, N-1\}$.

$$\begin{aligned}(P(A_k|T_k = 0) < P(D_k|T_k = 0)) &\Leftrightarrow \tfrac{k}{N}\textstyle\sum_{\ell=k+1}^{N} \tfrac{1}{\ell-1} < \tfrac{k}{N} \\ &\Leftrightarrow \textstyle\sum_{\ell=k+1}^{N} \tfrac{1}{\ell-1} < 1 \qquad (\tfrac{k}{N} > 0)\end{aligned}$$

En posant $\ell' = \ell - 1$, on a alors

$$\boxed{(P(A_k|T_k = 0) < P(D_k|T_k = 0)) \Leftrightarrow \sum_{\ell'=k}^{N-1} \frac{1}{\ell'} < 1.}$$

9. — Calculons k_3 : $1 + \frac{1}{2} > 1$ et $\frac{1}{2} < 1$. Donc $k_3 = 2$.
   — Calculons k_4 : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} > 1$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} < 1$. Donc $k_4 = 2$.

10.
```
def arrete(N) :
    S=0
    for i in range(N-1,0,-1) :
        S=S+(1/i)
        if S>=1 :
            return i+1
```

11. Dans les questions suivantes, on veut démontrer que :

$$\forall N \geq 3, \forall k \in \{2, 3, \cdots, N-1\}, \ln\left(\frac{N}{k}\right) \leq \sum_{\ell=k}^{N-1} \frac{1}{\ell} \leq \ln\left(\frac{N-1}{k-1}\right).$$

Soient $N \geq 3, \ell \in \{2, 3, \cdots, N-1\}$.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}x \in [\ell, \ell+1] &\Leftrightarrow (\ell \leq x \leq \ell + 1) \\ &\Leftrightarrow (\ell - 1 \leq x - 1 \leq \ell) \\ &\Leftrightarrow (x - 1 \leq \ell \leq x) \\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{x-1} \geq \tfrac{1}{\ell} \geq \tfrac{1}{x} \qquad \text{car } x \mapsto \tfrac{1}{x} \text{ strictement décroissante sur } \mathbb{R}^{+\star},\ \ell > 0\end{aligned}$$

(b) Pour tout $x \in [\ell, \ell + 1]$, on a

$$\frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{\ell} \geq \frac{1}{x}$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_{\ell}^{\ell+1} \frac{1}{t-1} dt \geq \int_{\ell}^{\ell+1} \frac{1}{\ell} dt \geq \int_{\ell}^{\ell+1} \frac{1}{t} dt.$$

D'où

$$\ln(\ell) - \ln(\ell - 1) \geq \frac{1}{\ell} \geq \ln(\ell + 1) - \ln(\ell).$$

Autrement dit,

$$\boxed{\ln(\ell + 1) - \ln(\ell) \leq \frac{1}{\ell} \leq \ln(\ell) - \ln(\ell - 1).}$$

12. Soient $N \geq 3$, $k \in \{2, 3, \cdots, N-1\}$. D'après la question 11.b,

$$\forall \ell \in \{k, k+1, \cdots, N-1\}, \ln(\ell+1) - \ln(\ell) \leq \frac{1}{\ell} \leq \ln(\ell) - \ln(\ell-1).$$

En sommant, on obtient

$$\sum_{\ell=k}^{N-1} (\ln(\ell+1) - \ln(\ell)) \leq \sum_{\ell=k}^{N-1} \frac{1}{\ell} \leq \sum_{\ell=k}^{N-1} (\ln(\ell) - \ln(\ell-1)) .$$

On reconnaît des sommes télescopiques à gauche et à droite de l'inégalité. D'où

$$\ln(N) - \ln(k) \leq \sum_{\ell=k}^{N-1} \frac{1}{\ell} \leq \ln(N-1) - \ln(k-1).$$

Autrement dit,

$$\boxed{\ln\left(\frac{N}{k}\right) \leq \sum_{\ell=k}^{N-1} \frac{1}{\ell} \leq \ln\left(\frac{N-1}{k-1}\right).}$$

13. Soit $N \geq 5$. Par définition de k_N, on a

$$\sum_{k=k_N}^{N-1} \frac{1}{k} < 1.$$

Mais d'après la question 11, $\ln(\frac{N}{k_N}) \leq \sum_{k=k_N}^{N-1} \frac{1}{k}$. D'où $\ln(\frac{N}{k_N}) < 1$. De plus,

$$\sum_{k=k_N-1}^{N-1} \frac{1}{k} \geq 1$$

et $\sum_{k=k_N-1}^{N-1} \frac{1}{k} \leq \ln(\frac{N-1}{k_N-1-1})$. D'où

$$1 \leq \ln(\frac{N-1}{k_N-1-1}) < \ln(\frac{N}{k_N-2}).$$

D'où

$$\boxed{\ln(\frac{N}{k_N}) < 1 < \ln(\frac{N}{k_N-2}).}$$

14. Soit $N \geq 5$. On a

$$\ln(\frac{N}{k_N}) < 1$$

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\frac{N}{k_N} < e.$$

D'où $\frac{N}{e} < k_N$. Mais $\lim_{N\to+\infty} \frac{N}{e} = +\infty$. D'où

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} k_N = +\infty.}$$

15. Soit $N \geq 5$. D'après la question 13, on a

$$\ln(\frac{N}{k_N}) < 1 < \ln(\frac{N}{k_N-2}).$$

D'où, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$0 < \frac{N}{k_N} < e < \frac{N}{k_N-2}.$$

Par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+\star}$:

$$\frac{k_N}{N} > e > \frac{k_N - 2}{N}$$

D'où

$$\frac{k_N}{N} > \frac{1}{e} \text{ et } \frac{1}{e} + \frac{2}{N} > \frac{k_N}{N}.$$

Autrement dit,

$$\frac{1}{e} + \frac{2}{N} > \frac{k_N}{N} > \frac{1}{e}.$$

Or $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{e} + \frac{2}{N} = \frac{1}{e}$. D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \frac{k_N}{N} = \frac{1}{e}.}$$

16. Soit $N \geq 5$. d'après l'énoncé, $G_N = A_{k_N-1}$. Donc, d'après la question 7.b, on a

$$P(G_N) = \frac{k_N - 1}{N} \sum_{k=k_N}^{N} \frac{1}{k-1} = \frac{k_N - 1}{N} \sum_{k=k_N-1}^{N-1} \frac{1}{k}.$$

Or, $\ln(\frac{N}{k_N-1}) \leq \sum_{k=k_N-1}^{N-1} \frac{1}{k} \leq \ln(\frac{N}{k_N-3})$. D'où

$$\ln(\frac{N}{k_N}) + \ln(\frac{1}{1-\frac{1}{k_N}}) \leq \sum_{k=k_N-1}^{N-1} \frac{1}{k} \leq \ln(\frac{N}{k_N}) + \ln(\frac{1}{1-\frac{3}{k_N}})$$

D'où

$$\frac{k_N - 1}{N}\left(\ln(\frac{N}{k_N}) + \ln(\frac{1}{1-\frac{1}{k_N}})\right) \leq \frac{k_N - 1}{N}(\sum_{k=k_N-1}^{N-1} \frac{1}{k}) \leq \frac{k_N - 1}{N}(\ln(\frac{N}{k_N}) + \ln(\frac{1}{1-\frac{3}{k_N}})).$$

Donc

$$(\frac{k_N}{N} - \frac{1}{N})\left(\ln(\frac{N}{k_N}) + \ln(\frac{1}{1-\frac{1}{k_N}})\right) \leq \frac{k_N - 1}{N}(\sum_{k=k_N-1}^{N-1} \frac{1}{k}) \leq (\frac{k_N}{N} - \frac{1}{N})(\ln(\frac{N}{k_N}) + \ln(\frac{1}{1-\frac{3}{k_N}})).$$

Autrement dit,

$$(\frac{k_N}{N} - \frac{1}{N})\left(\ln(\frac{N}{k_N}) + \ln(\frac{1}{1-\frac{1}{k_N}})\right) \leq P(G_N) \leq (\frac{k_N}{N} - \frac{1}{N})(\ln(\frac{N}{k_N}) + \ln(\frac{1}{1-\frac{3}{k_N}})).$$

D'après les questions 14 et 15, $\lim_{N\to+\infty} k_N = +\infty, \lim_{N\to+\infty} \frac{k_N}{N} = \frac{1}{e}$. En appliquant les calculs usuels sur les limites et par continuité sur $\mathbb{R}^{+\star}$ de ln, on en déduit que les membres gauche et droit de l'inégalité ont comme limite $\frac{1}{e}$ lorsque $N \to +\infty$. Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\underline{\lim_{N\to+\infty} P(G_N) = \frac{1}{e}}$.

17. D'après l'énoncé, $e < 3$. Donc $\frac{1}{e} > \frac{1}{3}$. Or $\lim_{N\to+\infty} P(G_N) = \frac{1}{e}$. On en déduit que pour N assez grand, on a alors $P(G_N) > \frac{1}{3}$. En adoptant la stratégie $\mathcal{S}$, on a bien plu d'une chance sur trois de gagner.