# DS n$^{\text{o}}$ 7 de mathématiques et d'informatique

## durée : 3 heures

*L'usage de la calculatrice ou de documents est interdit.*
*Il est recommandé de lire l'ensemble de l'énoncé attentivement et patiemment.*
*Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en mentionnant les hypothèses que vous avez été amené à formuler.*
*Le soin de la présentation, la qualité de la rédaction, ainsi que la rigueur, la clarté et la concision des raisonnements constitueront un facteur important d'appréciation de la copie.*

### **Exercice** (Raisonnement)

Le but de cet exercice est de montrer que $e^r \notin \mathbb{Q}$ si $r \in \mathbb{Q}^*$, et en particulier que la constante $e$ est irrationnelle. Pour cela, on considère pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ la fonction suivante :

$$f_n : x \mapsto \frac{1}{n!} \int_{-x}^{x} \left(x^2 - t^2\right)^n e^t \mathrm{d}t.$$

1. Soit $x > 0$.
   (a) En minorant et majorant la quantité $(x^2 - t^2)^n$ pour $t \in [-x, x]$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
   $$0 < f_n(x) \leqslant \frac{x^{2n}}{n!} \left(e^x - e^{-x}\right).$$
   (b) En déduire que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
   (c) Qu'en est-il pour $x < 0$ ? Et pour $x = 0$ ?
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $f_0(x)$ et $f_1(x)$.
3. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ dans cette question. À l'aide d'intégrations par parties, montrer que :
   $$f_{n+2}(x) = \frac{2}{(n+1)!} \int_{-x}^{x} t \left(x^2 - t^2\right)^{n+1} e^t \mathrm{d}t = -2(2n+3)f_{n+1}(x) + 4x^2 f_n(x).$$

Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, on définit par récurrence deux suites $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ Q_0(x) = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} P_1(x) = 2x - 2 \\ Q_1(x) = 2x + 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} P_{n+2}(x) = -2(2n+3)P_{n+1}(x) + 4x^2 P_n(x) \\ Q_{n+2}(x) = -2(2n+3)Q_{n+1}(x) + 4x^2 Q_n(x). \end{cases}$$

4. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $P_n$ et $Q_n$ sont des polynômes de degré $n$ dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{Z}$ et que : $f_n(x) = P_n(x)e^x + Q_n(x)e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. [**Info.**] Écrire chaque fonction demandée en Python. On pourra appeler les fonctions des questions précédentes même si elles n'ont pas été écrites. On représentera un polynôme par la liste de ses coefficients. Par exemples, le polynôme $x \mapsto 3x^2 - 1$ est représenté par la liste `[-1,0,3]` et la liste `[2,-1,0,1]` représente le polynôme $x \mapsto x^3 - x + 2$.
   (a) Écrire une fonction `multiplication(a,L)` qui prend en arguments un réel $a$ et une liste représentant un polynôme $R : x \mapsto R(x)$, puis qui renvoie la liste représentant $x \mapsto aR(x)$.
   (b) Écrire une fonction `somme(L1,L2)` qui prend en arguments deux listes (pas nécessairement de même longueur) représentant deux polynômes $R_1 : x \mapsto R_1(x)$ et $R_2 : x \mapsto R_2(x)$, puis qui renvoie la liste représentant $x \mapsto R_1(x) + R_2(x)$.
   (c) Écrire une fonction `produit(L1,L2)` qui prend en arguments deux listes représentant deux polynômes, puis qui renvoie la liste représentant le produit de ces deux polynômes.
   (d) Écrire deux fonctions `calculeP(n)` et `calculeQ(n)` qui prend en argument l'entier $n \in \mathbb{N}$, puis qui renvoie les listes représentant les polynômes $P_n$ et $Q_n$ respectivement.
6. Dans cette question, on fixe $p \in \mathbb{N}^*$ et on suppose qu'il existe $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $e^p = a/b$.
   (a) D'après les résultats précédents, montrer que $abf_n(p) \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire que $e^p \notin \mathbb{Q}$ si $p \in \mathbb{N}^*$.
7. (a) En vous inspirant des raisonnements précédents, montrer que $e^r \notin \mathbb{Q}$ si $r \in \mathbb{Q}^*$. Indication : commencer par le cas où $r = \alpha/\beta \in \mathbb{Q}_+^*$ et montrer que $ab\beta^n f_n(r) \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Que peut-on en déduire pour $\ln(r)$ si $r \in \mathbb{Q}_+^* \setminus \{1\}$ ?

## **Problème** (Modélisation)

Le climat des régions tempérées est caractérisé par une alternance de périodes de beau temps et de mauvais temps, entrecoupées par des périodes plus brèves et plus extrêmes de froid intense ou de forte chaleur.

Ce problème propose d'étudier un modèle (très) simplifié de ce type de climat comportant quatre états : gel (noté $G$), pluie (noté $P$), soleil (noté $S$) et canicule (noté $C$). On suppose que ces états évoluent quotidiennement selon les règles suivantes :

— s'il gèle un jour, alors, le lendemain, ou bien il continue de geler avec probabilité $1/7$ ou bien il pleut avec probabilité $6/7$ ;

— s'il pleut un jour, alors, le lendemain, ou bien il gèle avec probabilité $1/7$, ou bien il continue de pleuvoir avec probabilité $3/7$, ou bien le soleil succède à la pluie avec probabilité $3/7$ ;

— s'il fait soleil un jour, alors, le lendemain, ou bien le temps se dégrade à la pluie avec probabilité $3/7$, ou bien il reste ensoleillé avec probabilité $3/7$, ou bien il devient caniculaire avec probabilité $1/7$ ;

— si un jour est caniculaire, alors, le lendemain, ou bien le temps redevient simplement ensoleillé avec probabilité $6/7$, ou bien il reste caniculaire avec probabilité $1/7$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $G_n$ (respectivement $P_n$, $S_n$ et $C_n$) l'événement «il gèle (respectivement il pleut, il fait soleil, c'est caniculaire) le jour $n$», et $g_n = \mathbb{P}(G_n)$ (respectivement $p_n = \mathbb{P}(P_n)$, $s_n = \mathbb{P}(S_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$) sa probabilité. On suppose qu'il fait soleil au jour initial $n = 0$, ainsi $s_0 = 1$ et $g_0 = p_0 = c_0 = 0$.

1. **[Info.]** Écrire chaque fonction demandée en Python. On pourra appeler les fonctions des questions précédentes même si elles n'ont pas été écrites. Pour rappel, l'instruction `random.randint(a,b)` de la bibliothèque `random` renvoie un entier aléatoire compris entre `a` inclus et `b` inclus.
   (a) Écrire une fonction `lendemain(etat)` qui prend en argument l'état d'un jour sous la forme d'une chaîne de caractères `'G'`, `'P'`, `'S'` ou `'C'`, qui choisit un entier aléatoire entre 1 et 7, puis qui renvoie l'état du lendemain sous la même forme. Indication : utiliser plusieurs instructions `if`.
   (b) Écrire une fonction `simulation(n)` qui prend en argument l'entier $n \in \mathbb{N}$, qui simule le modèle jusqu'au jour $n$ en partant de l'état initial `etat='S'`, puis qui renvoie l'état du jour $n$.
   (c) Écrire une fonction `frequences(n,nbSimul)` qui prend en argument deux entiers, qui simule le modèle `nbSimul` fois, puis qui renvoie la liste `F=[F[0],F[1],F[2],F[3]]` des fréquences d'apparition des événements $G_n$, $P_n$, $S_n$ et $C_n$ parmi ces simulations. Par exemple, `F[2]` est égal au rapport du nombre de fois où du soleil est observé le jour $n$ par le nombre de simulations.
2. Calculer $g_1$, $p_1$, $s_1$ et $c_1$.
3. On fixe $n \in \mathbb{N}$ dans cette question.
   (a) Que peut-on dire des événements $G_n$, $P_n$, $S_n$ et $C_n$ ?
   (b) Justifier que $7g_{n+1} = g_n + p_n$ en citant précisément la formule utilisée.
   (c) Déterminer des expressions similaires pour $7p_{n+1}$ et $7s_{n+1}$ en fonction de $g_n$, $p_n$, $s_n$ et $c_n$.
   (d) Déduire des résultats précédents que $7X_{n+1} = AX_n + Y$ où :
$$X_n = \begin{pmatrix} g_n \\ p_n \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 3 \\ -6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \left(\frac{1}{7}A\right)^n (X_0 - Z) + Z$, où $Z = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
5. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $P$ est inversible et calculer $P^{-1}$.
   (b) Calculer $D = P^{-1}AP$ et vérifier que le résultat est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux appartiennent à $]-7, 7[$.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $A^n$ en fonction de $P$, $P^{-1}$ et $D^n$.
   (d) En déduire que chaque coefficient de la matrice $\left(\frac{1}{7}A\right)^n$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.
6. (a) Déduire des résultats précédents les limites des suites $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Interpréter ces résultats.