DS n° 7 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de documents est interdit.
Il est recommandé de lire l'ensemble de l'énoncé attentivement et patiemment.
Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en mentionnant les hypothèses que vous avez été amené à formuler.
Le soin de la présentation, la qualité de la rédaction, ainsi que la rigueur, la clarté et la concision des raisonnements constitueront un facteur important d'appréciation de la copie.

Problème 2

Ce problème présente une méthode numérique, appelée méthode des trapèzes, permettant de calculer des approximations de la valeur d'une intégrale. Les parties 1 et 2 détaillent cette méthode alors que la partie 3 propose de l'appliquer sur un exemple et de l'implémenter en Python. Seuls les résultats encadrés (qu'on peut admettre si besoin) sont utilisés d'une partie à l'autre.

Partie 1 - Une première approximation

On considère une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ où $a<b$ sont deux réels fixés. On pose g la fonction affine définie par $g(a)=f(a)$ et $g(b)=f(b)$. Le but de cette partie est d'estimer l'erreur commise si on approche $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ par $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ (qui correspond à l'aire d'un trapèze). Pour cela, on pose la fonction :

$$h : x \mapsto f(x)-g(x)-\lambda(x-a)(x-b)$$

où $\lambda\in\mathbb{R}$ est une constante qui sera fixée à la question 3.

1. (a) Déterminer une expression de $g(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
   (b) En déduire que $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=(b-a)(f(a)+f(b))/2$.
2. Calculer $\int_a^b(x-a)(x-b)\mathrm{d}x$ et écrire le résultat sous la forme $\mu(b-a)^3$ où $\mu\in\mathbb{R}$ est une constante à déterminer.
3. Montrer qu'on peut choisir la constante $\lambda\in\mathbb{R}$ afin que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x=0$ Dans la suite, on fixe la constante λ de cette façon et on suppose donc que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x=0$.
4. De quelle classe est la fonction h sur $[a,b]$? Justifier que la fonction h admet des primitives sur $[a,b]$. On note H une primitive de h sur $[a,b]$. Que peut-on dire des images $H(a)$ et $H(b)$?
5. (a) Déduire du résultat précédent qu'il existe un réel $c_0\in]a,b[$ tel que $h(c_0)=0$.
   (b) Prouver qu'il existe deux réels $(c_1,c_2)\in]a,b[^2$ tels que $c_1<c_2$ et $h'(c_1)=h'(c_2)=0$.
   (c) Prouver qu'il existe un réel $c\in]c_1,c_2[$ tel que $f''(c)=2\lambda$.
6. Déduire des résultats précédents que :

$$\boxed{\exists c\in[a,b],\quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(c)}.$$

Partie 2 - La méthode des trapèzes

On considère toujours une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ où $a<b$ sont deux réels fixés. De plus, on pose un entier $n\geqslant 1$. Le principe de la méthode des trapèzes est de subdiviser l'intervalle $[a,b]$ en n sous-intervalles de même longueur sur chacun desquels on va appliquer l'approximation de la partie 1. Plus précisément, on définit $n+1$ réels notés $a_0,a_1,a_2,\dots,a_{n-1},a_n$ par :

$$a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n=b \quad \text{et} \quad a_1-a_0=a_2-a_1=\cdots=a_n-a_{n-1}$$

et on remarque que $[a,b]=[a_0,a_1]\cup[a_1,a_2]\cup\cdots\cup[a_{n-1},a_n]=\bigcup_{k=0}^{n-1}[a_k,a_{k+1}]$.

7. (a) Soit $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Déterminer une expression de a_k en fonction de a, b, k et n.
   (b) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2} = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \right).$$

   Dans la suite, on note $T_n(f)$ le membre de droite de cette égalité, c'est-à-dire :

$$\boxed{T_n(f) = \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \right)}.$$

8. (a) Justifier que la fonction $x \mapsto |f''(x)|$ admet un maximum sur $[a, b]$. Dans la suite, on note M la valeur de ce maximum.
   (b) Montrer que :

$$\forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}, \quad \left| \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - (a_{k+1} - a_k) \frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2} \right| \leqslant \frac{(b-a)^3 M}{12n^3}.$$

9. Déduire des résultats précédents que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad \left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f) \right| \leqslant \frac{(b-a)^3 M}{12n^2}}.$$

10. Quelle est la limite de $T_n(f)$ quand n tend vers $+\infty$?

Partie 3 - Application numérique

Dans cette partie, on propose d'appliquer la méthode des trapèzes pour approcher la valeur de $\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$. On pose donc la fonction $f : x \mapsto \exp(-x^2)$.

11. (a) De quelle classe est la fonction f sur $\mathbb{R}$?
    (b) Prouver que pour tout entier $k \geqslant 0$, il existe un polynôme $P_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(k)}(x) = P_k(x) e^{-x^2}.$$

    (c) Calculer P_0, P_1, P_2 et P_3.
12. Montrer que le maximum de la fonction $x \mapsto |f''(x)|$ sur $[0, 1]$ est égal à $M = 2$.
13. **Informatique.** On écrira les fonctions demandées en Python et on utilisera la fonction `exp` de la bibliothèque `numpy`.
    (a) Écrire une fonction `f(x)` qui prend en argument un réel x et renvoie la valeur de e^{-x^2}.
    (b) Écrire une fonction `T(n,a,b)` qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et deux réels $a < b$ puis qui renvoie la valeur de $T_n(f)$.
    (c) Écrire une fonction `approx(epsilon)` qui prend un argument un réel $\varepsilon > 0$ et renvoie une approximation de la valeur de $\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$ à ε près.