Corrigé du DS n° 7 de mathématiques et d'informatique

Problème 2

Ce problème présente une méthode numérique, appelée méthode des trapèzes, permettant de calculer des approximations de la valeur d'une intégrale. Les parties 1 et 2 détaillent cette méthode alors que la partie 3 propose de l'appliquer sur un exemple et de l'implémenter en Python. Seuls les résultats encadrés (qu'on peut admettre si besoin) sont utilisés d'une partie à l'autre.

Partie 1 - Une première approximation

On considère une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ où $a<b$ sont deux réels fixés. On pose g la fonction affine définie par $g(a)=f(a)$ et $g(b)=f(b)$. Le but de cette partie est d'estimer l'erreur commise si on approche $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ par $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ (qui correspond à l'aire d'un trapèze). Pour cela, on pose la fonction :

$$h : x \mapsto f(x) - g(x) - \lambda(x-a)(x-b)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante qui sera fixée à la question 3.

1. (a) *Déterminer une expression de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

▶ La fonction g est affine et vérifie $g(a)=f(a)$ et $g(b)=f(b)$ d'après l'énoncé. Son coefficient directeur est donc égal à $(f(b)-f(a))/(b-a)$ et $g(x)=f(a)$ si $x=a$. On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)}.$$

On peut aussi poser la fonction affine $g : x \mapsto \alpha x + \beta$ et résoudre le système linéaire formé des deux équations $g(a)=f(a)$ et $g(b)=f(b)$ d'inconnues $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Mais cette méthode est plus longue.

(b) *En déduire que $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = (b-a)(f(a)+f(b))/2$.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right)\mathrm{d}x \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}\\
&= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\int_a^b (x-a)\mathrm{d}x + f(a)\int_a^b \mathrm{d}x \quad \text{par linéarité de l'intégrale}\\
&= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}-ax\right]_a^b + f(a)\Big[x\Big]_a^b\\
&= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(\frac{b^2}{2}-ab-\frac{a^2}{2}+a^2\right)+f(a)\Big(b-a\Big)\\
&= \frac{f(b)-f(a)}{2(b-a)}\Big(\underbrace{b^2-2ab+a^2}_{=(b-a)^2}\Big)+f(a)\Big(b-a\Big)\\
&= \frac{f(b)-f(a)}{2}\Big(b-a\Big)+\frac{2f(a)}{2}\Big(b-a\Big) \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton}\\
&= \Big(f(b)-f(a)+2f(a)\Big)\frac{b-a}{2}\\
&= \boxed{(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}}.
\end{aligned}$$

2. *Calculer $\int_a^b (x-a)(x-b)\mathrm{d}x$ et écrire le résultat sous la forme $\mu(b-a)^3$ où $\mu \in \mathbb{R}$ est une constante à déterminer.*

▶ On utilise une intégration par parties en posant les fonctions :

$$\begin{cases} u' : x \mapsto x-a \\ v : x \mapsto x-b \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} u : x \mapsto \frac{(x-a)^2}{2} \\ v' : x \mapsto 1. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme fonctions polynomiales donc on a d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \underbrace{(x-a)(x-b)}_{=u'(x)v(x)} \mathrm{d}x &= \Bigg[\underbrace{\frac{(x-a)^2}{2}(x-b)}_{=u(x)v(x)} \Bigg]_a^b - \int_a^b \underbrace{\frac{(x-a)^2}{2}}_{=u(x)v'(x)} \mathrm{d}x \\
&= 0 - 0 - \frac{1}{2}\left[\frac{(x-a)^3}{3}\right]_a^b \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{(b-a)^3}{3} - 0\right) \\
&= \boxed{-\frac{1}{6}(b-a)^3}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat en posant la constante $\boxed{\mu = -1/6}$.

On peut aussi calculer cette intégrale sans utiliser la formule d'intégration par parties. Par exemple en développant l'expression à intégrer :

$$\int_a^b (x-a)(x-b)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(x^2 - (a+b)x + ab\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - (a+b)\frac{x^2}{2} + abx\right]_a^b = \dots$$

Puis on retrouve la forme demandée à l'aide de la formule du binôme de Newton.

3. *Montrer qu'on peut choisir la constante $\lambda \in \mathbb{R}$ afin que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$ Dans la suite, on fixe la constante λ de cette façon et on suppose donc que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$.*

▶ On cherche une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$. On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse. On a :

$$\begin{aligned}
& \int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \\
\iff & \int_a^b \Big(f(x) - g(x) - \lambda(x-a)(x-b)\Big)\mathrm{d}x = 0 \quad \text{par défintion de la fonction } h \\
\iff & \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \lambda \int_a^b (x-a)(x-b)\mathrm{d}x = 0 \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
\iff & \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{\lambda}{6}(b-a)^3 = 0 \quad \text{d'après les résultats précédents} \\
\iff & \frac{\lambda}{6}(b-a)^3 = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \\
\iff & \lambda = 3\frac{f(a)+f(b)}{(b-a)^2} - \frac{6}{(b-a)^3}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{car } (b-a)^3 \neq 0 \text{ puisque } a < b.
\end{aligned}$$

Synthèse. Puisque la fonction f et les réels $a < b$ sont fixés dans l'énoncé, on peut poser la constante :

$$\boxed{\lambda = 3\frac{f(a)+f(b)}{(b-a)^2} - \frac{6}{(b-a)^3}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}.$$

En reprenant les calculs de l'analyse, on a bien que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$.

On peut aussi rédiger plus rapidement en remarquant que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$ est une équation d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$ de degré 1 par définition de la fonction h et par linéarité de l'intégrale. Elle admet donc une solution qu'il est inutile de calculer pour répondre à la question.

4. *De quelle classe est la fonction h sur $[a, b]$? Justifier que la fonction h admet des primitives sur $[a, b]$. On note H une primitive de h sur $[a, b]$. Que peut-on dire des images $H(a)$ et $H(b)$?*

   ▶ On sait que :
   - f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$ d'après l'énoncé,
   - g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a, b]$ comme fonction affine,
   - et $x \mapsto \lambda(x-a)(x-b)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a, b]$ comme fonction polynomiale.

   Par conséquent, $\boxed{h : x \mapsto f(x) - g(x) - \lambda(x-a)(x-b) \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } [a, b]}$ comme somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$. En particulier, elle est continue sur $[a, b]$ donc $\boxed{h \text{ admet des primitives sur } [a, b] \text{ d'après le théorème fondamental de l'analyse}}$. De plus, on a d'après le résultat de la question précédente :

$$0 = \int_a^b h(x)\mathrm{d}x = \Big[H(x)\Big]_a^b = H(b) - H(a) \quad \text{donc} \quad \boxed{H(a) = H(b)}.$$

5. (a) *Déduire du résultat précédent qu'il existe un réel $c_0 \in]a, b[$ tel que $h(c_0) = 0$.*

   ▶ Puisque h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$, on en déduit que sa primitive H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$. Par conséquent, on a :
   - H est continue sur $[a, b]$,
   - H est dérivable sur $]a, b[$,
   - et $H(a) = H(b)$ d'après le résultat de la question précédente.

   D'après le théorème de Rolle, on en déduit qu'il existe un réel $c_0 \in]a, b[$ tel que $H'(c_0) = 0$ donc tel que $\boxed{h(c_0) = 0}$ car $H' = h$.

   Citez précisément les hypothèses des théorèmes que vous utilisez afin de montrer que vous connaissez votre cours.

   (b) *Prouver qu'il existe deux réels $(c_1, c_2) \in]a, b[^2$ tels que $c_1 < c_2$ et $h'(c_1) = h'(c_2) = 0$.*

   ▶ On a :

$$\begin{aligned} & h(a) = f(a) - g(a) - \lambda(a-a)(a-b) = f(a) - f(a) - 0 = 0 \quad \text{car } g(a) = f(a) \\ \text{et} \quad & h(b) = f(b) - g(b) - \lambda(b-a)(b-b) = f(b) - f(b) - 0 = 0 \quad \text{car } g(b) = f(b). \end{aligned}$$

   Or h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$ et $c_0 \in]a, b[$ d'après le résultat de la question précédente. Par conséquent, on a :
   - h est continue sur $[a, c_0]$ et sur $[c_0, b]$,
   - h est dérivable sur $]a, c_0[$ et sur $]c_0, b[$,
   - et $h(a) = h(b) = h(c_0) = 0$ d'après le résultat de la question précédente.

   D'après le théorème de Rolle, on en déduit qu'il existe deux réels $c_1 \in]a, c_0[$ et $c_2 \in]c_0, b[$ tels que $\boxed{h'(c_1) = h'(c_2) = 0}$. De plus, on a $a < c_1 < c_0 < c_2 < b$ donc en particulier $\boxed{(c_1, c_2) \in]a, b[^2}$ et $\boxed{c_1 < c_2}$.

   (c) *Prouver qu'il existe un réel $c \in]c_1, c_2[$ tel que $f''(c) = 2\lambda$.*

   ▶ On sait que h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$ et $c_1 < c_2$ appartiennent à $]a, b[$ d'après le résultat de la question précédente. Par conséquent, on a :
   - h' est continue sur $[c_1, c_2]$,
   - h' est dérivable sur $]c_1, c_2[$,
   - et $h'(c_1) = h'(c_2) = 0$ d'après le résultat de la question précédente.

D'après le théorème de Rolle, on en déduit qu'il existe un réel $c \in]c_1, c_2$ tel que $h''(c) = 0$. Or on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) - \lambda(x-a)(x-b) \\ &= f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right) - \lambda\left(x^2 - (a+b)x + ab\right) \\ \text{donc} \quad h'(x) &= f'(x) - \frac{f(b)-f(x)}{(b-a)} - \lambda\left(2x - (a+b)\right) \\ \text{donc} \quad h''(x) &= f''(x) - 2\lambda. \end{aligned}$$

On a vient de démontrer l'existence d'un réel $c \in]c_1, c_2[$ tel que $f''(c) - 2\lambda = h''(c) = 0$ donc tel que $\boxed{f''(c) = 2\lambda}$.

6. *Déduire des résultats précédents que :*

$$\boxed{\exists c \in [a,b], \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(c)}.$$

► On sait que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$ d'après le choix de la constante λ fixée à la question 3. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b h(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \Big(f(x) - g(x) - \lambda(x-a)(x-b)\Big)\mathrm{d}x \quad \text{par défintion de la fonction } h \\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \lambda\int_a^b (x-a)(x-b)\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{\lambda}{6}(b-a)^3 \quad \text{d'après les résultats des questions 1(b) et 2.} \end{aligned}$$

Or $\lambda = f''(c)/2$ d'après le résultat de la question précédente. D'où :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(c)}.$$

De plus, on a $a < c_1 < c < c_2 < b$ donc en particulier $\boxed{c \in [a,b]}$

Partie 2 - La méthode des trapèzes

On considère toujours une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ où $a < b$ sont deux réels fixés. De plus, on pose un entier $n \geqslant 1$. Le principe de la méthode des trapèzes est de subdiviser l'intervalle $[a,b]$ en n sous-intervalles de même longueur sur chacun desquels on va appliquer l'approximation de la partie 1. Plus précisément, on définit $n+1$ réels notés $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ par :

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b \quad \text{et} \quad a_1 - a_0 = a_2 - a_1 = \cdots = a_n - a_{n-1}$$

et on remarque que $[a,b] = [a_0,a_1] \cup [a_1,a_2] \cup \cdots \cup [a_{n-1},a_n] = \bigcup_{k=0}^{n-1}[a_k, a_{k+1}]$.

7. (a) *Soit $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$. Déterminer une expression de a_k en fonction de a, b, k et n.*

► Puisque l'intervalle $[a,b]$ de longueur $b-a$ est subdivisé en n sous-intervalles de même longueur, la longueur de chacun des sous-intervalles est égale à :

$$a_1 - a_0 = a_2 - a_1 = \cdots = a_n - a_{n-1} = \tfrac{b-a}{n}.$$

Les réels $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ forment donc les $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique de raison $(b-a)/n$ et de premier terme $a_0 = a$. On en déduit que :

$$\boxed{\forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}, \quad a_k = a + k\tfrac{b-a}{n}}.$$

(b) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2} = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\tfrac{b-a}{n}\right)\right).$$

► On a :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\\
=&\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b-a}{n}\right)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}\\
=&\frac{b-a}{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(a_{k+1})\right) \quad \text{par linéarité de la somme}\\
=&\frac{b-a}{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) + \sum_{k=1}^{n} f(a_k)\right) \quad \text{à l'aide d'un décalage d'indice dans la deuxième somme}\\
=&\frac{b-a}{2n}\left(f(a_0) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a_k) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a_k) + f(a_n)\right) \quad \text{par associativité de la somme}\\
=&\frac{b-a}{2n}\left(f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(a_k)\right) \quad \text{car } a_0 = a \text{ et } a_n = b\\
=&\boxed{\frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\tfrac{b-a}{n}\right)\right)} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente.}
\end{aligned}$$

Dans la suite, on note $T_n(f)$ le membre de droite de cette égalité, c'est-à-dire :

$$\boxed{T_n(f) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\tfrac{b-a}{n}\right)\right)}.$$

8. *(a) Justifier que la fonction $x \mapsto |f''(x)|$ admet un maximum sur $[a,b]$. Dans la suite, on note M la valeur de ce maximum.*

► On sait que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ d'après l'énoncé. Donc f'' est continue sur $[a,b]$ par définition de la classe $\mathscr{C}^2$. Par conséquent, la fonction $x \mapsto |f''(x)|$ est continue sur le segment $[a,b]$ par composée de fonctions continues. D'après le théorème des bornes, on en déduit qu'elle est bornée et qu'elle atteint ses bornes. En particulier, $\boxed{x \mapsto |f''(x)| \text{ admet un maximum sur } [a,b]}$.

(b) Montrer que :

$$\forall k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}, \quad \left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right| \leqslant \frac{(b-a)^3 M}{12n^3}.$$

► Soit $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. D'après le résulat de la question 6 de la partie 1, puisque f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur le sous-intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, on sait qu'il existe un réel $c_k \in [a_k, a_{k+1}]$ tel que :

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2} = -\frac{(a_{k+1}-a_k)^3}{12}f''(c_k).$$

Attention : le réel c_k appartient à l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ et donc dépend de l'entier k ! Par conséquent, il est judicieux de le noté c_k et non c puisqu'il sera différent pour chaque valeur de k.

En passant à la valeur absolue, on en déduit que :

$$\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right| = \left|-\frac{(a_{k+1}-a_k)^3}{12}f''(c_k)\right| = \frac{(a_{k+1}-a_k)^3\,|f''(c_k)|}{12}$$

car $a_{k+1} > a_k$. Or :

— $a_{k+1} - a_k = (b-a)/n$ d'après le résultat de la question 7(a),

— et $|f''(c_k)| \leqslant M$ d'après le résultat de la question précédente car $c_k \in [a_k, a_{k+1}] \subset [a, b]$.

On en déduit bien que :

$$\boxed{\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right| \leqslant \frac{(b-a)^3 M}{12n^3}}$$

et ceci est vrai pour tout $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

9. *Déduire des résultats précédents que :*

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3 M}{12n^2}}.$$

▶ On a :

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f)\\
=&\int_{a_0}^{a_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\mathrm{d}x - T_n(f) \quad \text{d'après la relation de Chasles}\\
=&\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2} \quad \text{d'après le résultat de la question 7(b)}\\
=&\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right) \quad \text{par linéarité de la somme.}
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient en passant à la valeur absolue :

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f)\right|\\
=&\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right)\right|\\
\leqslant&\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire}\\
\leqslant&\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^3 M}{12n^3} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}\\
=&n\frac{(b-a)^3 M}{12n^3} = \frac{(b-a)^3 M}{12n^2}.
\end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire est la principale justification de ce calcul. Elle doit être citée explicitement.

Finalement, on a bien montré que

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3 M}{12n^2}}$$

et ceci est vrai pour tout entier $n \geqslant 1$.

10. *Quelle est la limite de $T_n(f)$ quand n tend vers $+\infty$?*

▶ On a :

$$\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3 M}{12n^2}$$

d'après le résultat de la question précédente et la définition de la valeur absolue. Or :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)^3 M}{12n^2} = 0.$$

D'après le théorème de la limite par encadrement, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f)\right| = 0 \quad \text{par conséquent} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} T_n(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x}.$$

Partie 3 - Application numérique

Dans cette partie, on propose d'appliquer la méthode des trapèzes pour approcher la valeur de $\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$. On pose donc la fonction $f : x \mapsto \exp(-x^2)$.

11. (a) *De quelle classe est la fonction f sur $\mathbb{R}$?*

▶ La fonction $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$ comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(b) *Prouver que pour tout entier $k \geqslant 0$, il existe un polynôme $P_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(k)}(x) = P_k(x)e^{-x^2}.$$

▶ On raisonne par récurrence.

Initialisation. Pour $k = 0$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(0)}(x) = f(x) = e^{-x^2} = P_0(x)e^{-x^2} \quad \text{en posant } \boxed{P_0 = 1}.$$

P_0 est bien un polynôme à coefficients réels.

Hérédité. On fixe un entier $k \geqslant 0$ et on suppose qu'il existe un polynôme P_k à coefficients réels tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(k)}(x) = P_k(x)e^{-x^2}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(k+1)}(x) &= (f^{(k)})'(x)\\ &= P_k'(x)e^{-x^2} + P_k(x)\Big(-2xe^{-x^2}\Big)\\ &= \Big(\underbrace{P_k'(x) - 2xP_k(x)}_{=P_{k+1}(x)}\Big)e^{-x^2}\\ &= P_{k+1}(x)e^{-x^2} \quad \text{en posant } \boxed{P_{k+1} = P_k' - 2XP_k}.\end{aligned}$$

P_{k+1} est bien un polynôme à coefficients réels comme somme et produit de polynômes à coefficients réels.

N'oubliez pas de justifier que les polynômes que vous posez sont bien des polynômes à coefficients réels.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$$\boxed{\forall k \geqslant 0, \quad \exists P_k \in \mathbb{R}[X], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(k)}(x) = P_k(x)e^{-x^2}}.$$

(c) Calculer P_0, P_1, P_2 et P_3.

► En reprenant les calculs du raisonnement de la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} & P_0 = \boxed{1}, \\ & P_1 = P_0' - 2XP_0 = 0 - 2X = \boxed{-2X}, \\ & P_2 = P_1' - 2XP_1 = -2 - 2X(-2X) = \boxed{4X^2 - 2}, \\ \text{et} \quad & P_3 = P_2' - 2XP_2 = 8X - 2X(4X^2 - 2) = \boxed{-8X^3 + 12X}. \end{aligned}$$

Pensez à utiliser vos calculs précédents pour gagner du temps. Il est beaucoup plus long de dériver trois fois la fonction f et de factoriser chaque dérivée par e^{-x^2}.

12. Montrer que le maximum de la fonction $x \mapsto |f''(x)|$ sur $[0,1]$ est égal à $M = 2$.

► On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad (f'')'(x) &= f^{(3)}(x) \quad \text{par défintion de } f^{(3)} \\ &= P_3(x)e^{-x^2} \quad \text{d'après le résultat de la question 11(b)} \\ &= (-8x^3 + 12x)e^{-x^2} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\ &= -8x(x^2 - \tfrac{3}{2})e^{-x^2} = -8x\left(x - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Puisque $-\sqrt{\frac{3}{2}} < 0 < 1 < \sqrt{\frac{3}{2}}$, on en déduit le tableau des variations de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		1		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$(f'')'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$			0	$-$	
$f''(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\nearrow$		$\searrow$	

car $f''(0) = P_2(0)e^{-0^2} = -2$ et $f''(1) = P_2(1)e^{-1^2} = (4-2)e^{-1} = 2/e$.

Inutile de perdre du temps à calculer les autres valeurs qui apparaissent dans le tableau de variations, elles ne serviront à rien ensuite puisque l'énoncé considère seulement f'' sur $[0,1]$. On peut même retreindre le tableau des variations au segment $[0,1]$.

Ainsi $f''(x)$ prend toutes les valeurs de -2 à $2/e$ lorsque $x \in [0,1]$. En passant, à la valeur absolue, on en déduit que $|f''(x)|$ prend toutes les valeurs de 0 à 2 lorsque $x \in [0,1]$ car $2/e < 2$ (puisque $e = \exp(1) > \exp(0) = 1$ par stricte croissance de la fonction exponentielle). Par conséquent, le maximum de la fonction $x \mapsto |f''(x)|$ sur $[0,1]$ est égal à $\boxed{M = 2}$.

*13. **Informatique.** On écrira les fonctions demandées en Python et on utilisera la fonction `exp` de la bibliothèque `numpy`.*

(a) *Écrire une fonction* `f(x)` *qui prend en argument un réel x et renvoie la valeur de e^{-x^2}.*

▶ Par exemple :

```
import numpy as np
    def f(x):
    return np.exp(-x**2)
```

(b) *Écrire une fonction* `T(n,a,b)` *qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et deux réels $a < b$ puis qui renvoie la valeur de $T_n(f)$.*

▶ Par exemple :

```
def T(n,a,b):
    S=0
    for k in range(1,n):
        S=S+f(a+k*(b-a)/n)
    return ((b-a)/n)*((f(a)+f(b))/2+S)
```

Attention à la fonction `range` *en Python : l'instruction* `range(1,n)` *représente tous les entiers allant de 1 à $n-1$ alors que l'instruction* `range(1,n-1)` *représente tous les entiers allant de 1 à $n-2$.*

(c) *Écrire une fonction* `approx(epsilon)` *qui prend un argument un réel $\varepsilon > 0$ et renvoie une approximation de la valeur de $\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$ à ε près.*

▶ D'après le résultat de la question 9 de la partie 2, on sait que, pour tout $n \geqslant 1$, la valeur de $T(n)(f)$ est une approximation de la valeur de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ à $(b-a)^3M/(12n^2)$ près. Dans l'exemple de cette partie, on a $a = 0$, $b = 1$ et $M = 2$. Il suffit donc de choisir un entier $n \geqslant 1$ tel que :

$$\frac{(b-a)^3M}{12n^2} \leqslant \varepsilon \iff \frac{(1-0)^3 \times 2}{12n^2} \leqslant \varepsilon \iff \frac{1}{6n^2} \leqslant \varepsilon$$

pour que $T_n(f)$ soit une approximation de la valeur de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ à ε près. En Python, on peut par exemple écrire :

```
def approx(epsilon):
    n=1
    while 1/(6*n**2)>epsilon:
        n=n+1
    return T(n,0,1)
```

On peut également résoudre l'inéquation $\frac{1}{6n^2} \leqslant \varepsilon \iff n \geqslant \sqrt{1/(6\varepsilon)}$. Il suffit donc de choisir pour valeur de n l'entier $\lfloor\sqrt{1/(6\varepsilon)}\rfloor + 1$. N'oubliez pas la partie entière ! Ce qui donne en Python :

```
import numpy as np
def approx(epsilon):
    n=int(np.sqrt(1/(6*epsilon)))+1
    return T(n,0,1)
```