Corrigé du DS n° 7 de mathématiques et d'informatique

Exercice (Raisonnement)

Le but de cet exercice est de montrer que $e^r \notin \mathbb{Q}$ si $r \in \mathbb{Q}^*$, et en particulier que la constante e est irrationnelle. Pour cela, on considère pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ la fonction suivante :

$$f_n : x \mapsto \frac{1}{n!} \int_{-x}^{x} \left(x^2 - t^2\right)^n e^t \mathrm{d}t.$$

1. *Soit $x > 0$.*

   (a) *En minorant et majorant la quantité $(x^2 - t^2)^n$ pour $t \in [-x, x]$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$0 < f_n(x) \leqslant \frac{x^{2n}}{n!} \left(e^x - e^{-x}\right).$$

► Soient $t \in [-x, x]$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{array}{ll} & 0 \leqslant t^2 \leqslant x^2 \quad \text{d'après la fonction usuelle } y \mapsto y^2 \\ \text{donc} & -x^2 \leqslant -t^2 \leqslant 0 \quad \text{en multipliant par } -1 \\ \text{donc} & 0 \leqslant x^2 - t^2 \leqslant x^2 \quad \text{en ajoutant } x^2 \\ \text{donc} & \boxed{0 \leqslant \left(x^2 - t^2\right)^n \leqslant x^{2n}} \quad \text{par croissance de la fonction usuelle } y \mapsto y^n \\ \text{donc} & 0 \leqslant \left(x^2 - t^2\right)^n e^t \leqslant x^{2n} e^t \quad \text{en multipliant par } e^t > 0. \end{array}$$

Puisque $x > 0$, on a $-x < x$. Par conséquent, on peut utiliser <u>la monotonie de l'intégrale</u> :

$$\underbrace{\int_{-x}^{x} 0 \mathrm{d}t}_{=0} \leqslant \int_{-x}^{x} \left(x^2 - t^2\right)^n e^t \mathrm{d}t \leqslant \underbrace{\int_{-x}^{x} x^{2n} e^t \mathrm{d}t}_{= \left[x^{2n} e^t\right]_{-x}^{x}}.$$

N'oubliez pas de vérifier l'ordre des bornes de l'intégrale avant d'utiliser la monotonie. Il est nécessaire que les bornes soient dans le bon sens.

En divisant par $n!$, on en déduit que :

$$0 \leqslant \underbrace{\frac{1}{n!} \int_{-x}^{x} \left(x^2 - t^2\right)^n e^t \mathrm{d}t}_{= f_n(x)} \leqslant \frac{x^{2n}}{n!} \left(e^x - e^{-x}\right).$$

De plus, si $f_n(x) = 0$ alors la fonction positive et continue $t \mapsto (x^2 - t^2)^n e^t$ serait constante égale à 0 par <u>stricte positivité de l'intégrale</u>, ce qui est absurde (par exemple pour $t = 0$). Finalement, on en déduit bien que :

$$\boxed{0 < f_n(x) \leqslant \frac{x^{2n}}{n!} \left(e^x - e^{-x}\right)}.$$

(b) *En déduire que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.*

▶ On sait que $x^{2n} = o_{n\to+\infty}(n!)$ d'après le théorème des croissances comparées, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}\left(e^x - e^{-x}\right) = 0.$$

D'après le résultat de la question précédente et le théorème de limite par encadrement, on en déduit que $\boxed{(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0}$.

(c) *Qu'en est-il pour $x < 0$? Et pour $x = 0$?*

▶ Pour $x < 0$, on a $-x > x$ donc on ne peut plus utiliser la monotonie de l'intégrale comme à la question 1(a). Par contre, on a en échangeant les bornes :

$$0 < \underbrace{\frac{1}{n!}\int_x^{-x}\left(x^2 - t^2\right)^n e^t \mathrm{d}t}_{=-f_n(x)} \leqslant \frac{x^{2n}}{n!}\left(e^{-x} - e^x\right).$$

Par conséquent :

$$\boxed{\frac{x^{2n}}{n!}\left(e^x - e^{-x}\right) \leqslant f_n(x) < 0}.$$

On peut aussi remarquer que f_n est impaire car :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ f_n(-x) &= \frac{1}{n!}\int_x^{-x}\left((-x)^2 - t^2\right)^n e^t\mathrm{d}t\\ &= \frac{-1}{n!}\int_{-x}^{x}\left(x^2 - t^2\right)^n e^t\mathrm{d}t = -f_n(x).\end{aligned}$$

Par conséquent, on a d'après le résultat de la question 1(a) :

$$\forall x < 0,\ 0 < \underbrace{f_n(-x)}_{=-f_n(x)} \leqslant \frac{x^{2n}}{n!}\left(e^{-x} - e^x\right)$$

et on retrouve le même résultat en multipliant ces inégalités par -1.

En raisonnant comme à la question 1(b), on en déduit que $\boxed{(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge aussi vers } 0}$.
Pour $x = 0$, on a :

$$f_n(0) = \frac{1}{n!}\int_0^0\left(x^2 - t^2\right)^n e^t\mathrm{d}t = 0.$$

Donc $\boxed{(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge aussi vers } 0}$ puisque cette suite est constante égale à 0.

2. *Soit $x\in\mathbb{R}$. Calculer $f_0(x)$ et $f_1(x)$.*

▶ On a pour $n = 0$:

$$f_0(x) = \underbrace{\frac{1}{0!}}_{=1}\int_{-x}^{x}\underbrace{\left(x^2 - t^2\right)^0}_{=1} e^t\mathrm{d}t = \int_{-x}^{x} e^t\mathrm{d}t = \left[e^t\right]_{-x}^{x} = \boxed{e^x - e^{-x}}.$$

Et pour $n = 1$:

$$f_1(x) = \frac{1}{1!}\int_{-x}^{x}\left(x^2 - t^2\right)^1 e^t\mathrm{d}t = x^2\underbrace{\int_{-x}^{x} e^t\mathrm{d}t}_{=f_0(x)} - \int_{-x}^{x} t^2 e^t\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité.}$$

On pose $u : t \mapsto t^2$ et $v' : t \mapsto e^t$, donc $u' : t \mapsto 2t$ et $v : t \mapsto e^t$. Puisque les fonctions usuelles u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on peut utiliser une intégration par parties (IPP) :

$$\begin{aligned}
\int_{-x}^{x} t^2 e^t \mathrm{d}t &= \int_{-x}^{x} u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\
&= \Big[u(t)v(t)\Big]_{-x}^{x} - \int_{-x}^{x} u'(t)v(t)\mathrm{d}t \quad \text{d'après la formule d'IPP} \\
&= \Big[t^2 e^t\Big]_{-x}^{x} - \int_{-x}^{x} 2te^t \mathrm{d}t \\
&= x^2 e^x - (-x)^2 e^{-x} - 2\int_{-x}^{x} te^t \mathrm{d}t \\
&= x^2 \underbrace{\left(e^x - e^{-x}\right)}_{=f_0(x)} - 2\left(\Big[te^t\Big]_{-x}^{x} - \underbrace{\int_{-x}^{x} e^t \mathrm{d}t}_{=f_0(x)}\right) \quad \text{à l'aide d'une deuxième IPP} \\
&= x^2 f_0(x) - 2\left(xe^x - (-x)e^{-x} - \left(e^x - e^{-x}\right)\right) \quad \text{car } f_0(x) = e^x - e^{-x} \\
&= x^2 f_0(x) - 2(x-1)e^x - 2(x+1)e^{-x}.
\end{aligned}$$

En réinjectant dans l'expression de $f_1(x)$, on obtient :

$$f_1(x) = x^2 f_0(x) - x^2 f_0(x) + 2(x-1)e^x + 2(x+1)e^{-x} = \boxed{(2x-2)e^x + (2x+2)e^{-x}}.$$

3. *On fixe $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ dans cette question. À l'aide d'intégrations par parties, montrer que :*

$$f_{n+2}(x) = \frac{2}{(n+1)!}\int_{-x}^{x} t\left(x^2 - t^2\right)^{n+1} e^t \mathrm{d}t = -2(2n+3)f_{n+1}(x) + 4x^2 f_n(x).$$

▶ On a :

$$f_{n+2}(x) = \frac{1}{(n+2)!}\int_{-x}^{x} \underbrace{\left(x^2 - t^2\right)^{n+2}}_{u(t)} \underbrace{e^t}_{=v'(t)} \mathrm{d}t.$$

Puisque la fonction $u : t \mapsto (x^2 - t^2)^{n+2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et que la fonction $v : t \mapsto e^t$ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme fonction usuelle, on peut utiliser une IPP :

$$\begin{aligned}
f_{n+2}(x) &= \frac{1}{(n+2)!}\left(\left[\underbrace{\left(x^2 - t^2\right)^{n+2}}_{u(t)} \underbrace{e^t}_{=v(t)}\right]_{-x}^{x} - \int_{-x}^{x} \underbrace{(0-2t) \times (n+2)\left(x^2 - t^2\right)^{n+1}}_{u'(t)} \underbrace{e^t}_{=v(t)} \mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{(n+2)!}\left(\underbrace{\left(x^2 - x^2\right)^{n+2}}_{=0} e^x - \underbrace{\left(x^2 - (-x)^2\right)^{n+2}}_{=0} e^{-x} + 2(n+2)\int_{-x}^{x} t\left(x^2 - t^2\right)^{n+1} e^t \mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{2(n+2)}{(n+2)!}\int_{-x}^{x} t\left(x^2 - t^2\right)^{n+1} e^t \mathrm{d}t \quad \text{par linéarité} \\
&= \boxed{\frac{2}{(n+1)!}\int_{-x}^{x} t\left(x^2 - t^2\right)^{n+1} e^t \mathrm{d}t} \quad \text{car } (n+2)! = (n+1)! \times (n+2).
\end{aligned}$$

De même, puisque la fonction $u : t \mapsto t\,(x^2 - t^2)^{n+1}$ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale, on peut utiliser une deuxième IPP :

$$f_{n+2}(x)=\frac{2}{(n+1)!}\left(\begin{array}{l}\left[\underbrace{t\left(x^2-t^2\right)^{n+1}}_{u(t)}\underbrace{e^t}_{=v(t)}\right]_{-x}^{x}\\ -\displaystyle\int_{-x}^{x}\underbrace{\left(1\times\left(x^2-t^2\right)^{n+1}+t\times-2(n+1)t\left(x^2-t^2\right)^n\right)}_{u'(t)}\underbrace{e^t}_{=v(t)}\,\mathrm{d}t\end{array}\right)$$

$$=\frac{2}{(n+1)!}\left(0-\int_{-x}^{x}\left(x^2-t^2\right)^{n+1}e^t\mathrm{d}t+2(n+1)\int_{-x}^{x}t^2\left(x^2-t^2\right)^n e^t\mathrm{d}t\right)$$

$$=-2\underbrace{\frac{1}{(n+1)!}\int_{-x}^{x}\left(x^2-t^2\right)^{n+1}e^t\mathrm{d}t}_{=f_{n+1}(x)}+\frac{4}{n!}\int_{-x}^{x}t^2\left(x^2-t^2\right)^n e^t\mathrm{d}t\quad\text{par linéarité.}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}&-2(2n+3)f_{n+1}(x)+4x^2f_n(x)\\=&-2f_{n+1}(x)-2(2n+2)f_{n+1}(x)+4x^2f_n(x)\\=&-2f_{n+1}(x)+4\left(-(n+1)f_{n+1}(x)+x^2f_n(x)\right)\\=&-2f_{n+1}(x)+4\left(\underbrace{\frac{-(n+1)}{(n+1)!}}_{=1/n!}\int_{-x}^{x}\left(x^2-t^2\right)^{n+1}e^t\mathrm{d}t+\frac{x^2}{n!}\int_{-x}^{x}\left(x^2-t^2\right)^n e^t\mathrm{d}t\right)\\=&-2f_{n+1}(x)+\frac{4}{n!}\int_{-x}^{x}\left(-\left(x^2-t^2\right)^{n+1}+x^2\left(x^2-t^2\right)^n\right)\mathrm{d}t\quad\text{par linéarité}\\=&-2f_{n+1}(x)+\frac{4}{n!}\int_{-x}^{x}\underbrace{\left(-(x^2-t^2)+x^2\right)}_{=t^2}\left(x^2-t^2\right)^n\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Finalement, on a bien montré que :

$$f_{n+2}(x)=-2f_{n+1}(x)+\frac{4}{n!}\int_{-x}^{x}t^2\left(x^2-t^2\right)^n\mathrm{d}t=\boxed{-2(2n+3)f_{n+1}(x)+4x^2f_n(x)}.$$

Pour chaque $x\in\mathbb{R}$, on définit par récurrence deux suites $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases}P_0(x)=1\\Q_0(x)=-1\end{cases},\quad\begin{cases}P_1(x)=2x-2\\Q_1(x)=2x+2\end{cases}\quad\text{et}\quad\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{cases}P_{n+2}(x)=-2(2n+3)P_{n+1}(x)+4x^2P_n(x)\\Q_{n+2}(x)=-2(2n+3)Q_{n+1}(x)+4x^2Q_n(x).\end{cases}$$

4. *Montrer pour tout $n\in\mathbb{N}$ que P_n et Q_n sont des polynômes de degré n dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{Z}$ et que : $f_n(x)=P_n(x)e^x+Q_n(x)e^{-x}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.*

▶ On raisonne par récurrence double.
Initialisation. Pour $n=0$, $P_0:x\mapsto 1$ et $Q_0:x\mapsto -1$ sont bien des polynômes de degré 0 dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{Z}$. De plus, on a d'après le résultat de la question 2 :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f_0(x)=e^x-e^{-x}=P_0(x)+Q_0(x).$$

Donc le résultat est vrai pour $n=0$. De même pour $n=1$, $P_1:x\mapsto 2x-2$ et $Q_1:x\mapsto 2x+2$ sont bien des polynômes de degré 1 dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{Z}$, et :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f_1(x)=(2x-2)e^x+(2x+2)e^{-x}=P_1(x)+Q_1(x).$$

Donc le résultat est aussi vrai pour $n=1$.
Hérédité. On fixe $n\in\mathbb{N}$ et on suppose que le résultat est vrai aux rangs n et $n+1$. Donc on sait

que P_n est un polynôme de degré n à coefficients entiers, et que P_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$ à coefficients entiers. Or on a :

$$P_{n+2}(x) = \underbrace{-2(2n+3)P_{n+1}(x))}_{\text{degré } n+1} + \underbrace{4x^2P_n(x)}_{\text{degré } 2+n}.$$

On en déduit que P_{n+2} est bien un polynôme (comme somme et produits de polynômes) dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{Z}$ (par somme et produits de coefficients entiers) dont le degré est égal à $\max(n+1, 2+n) = n+2$. On raisonne de même pour prouver que Q_{n+2} est bien un polynôme de degré $n+2$ dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{Z}$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{n+2}(x) &= -2(2n+3)f_{n+1}(x) + 4x^2 f_n(x) \\
&\qquad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= -2(2n+3)\left(P_{n+1}(x)e^x + Q_{n+1}(x)e^{-x}\right) + 4x^2\left(P_n(x)e^x + Q_n(x)e^{-x}\right) \\
&\qquad \text{d'après les hypothèses de récurrence} \\
&= \left(-2(2n+3)P_{n+1}(x) + 4x^2P_n(x)\right)e^x + \left(-2(2n+3)Q_{n+1}(x) + 4x^2Q_n(x)\right)e^{-x} \\
&\qquad \text{en développant et regroupant les expressions} \\
&= P_{n+2}(x)e^x + Q_{n+2}(x)e^{-x} \\
&\qquad \text{par définition des suites } (P_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (Q_n(x))_{n\in\mathbb{N}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien montré que le résultat est vrai au rang $n+2$ dès qu'il est vrai aux rangs n et $n+1$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence double, on en déduit que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, P_n \text{ et } Q_n}$ $\boxed{\text{sont des polynômes de degré } n \text{ dont les coefficients appartiennent à } \mathbb{Z} \text{ et que :}}$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = P_n(x)e^x + Q_n(x)e^{-x}}.$$

5. ***[Info.]*** *Écrire chaque fonction demandée en Python. On pourra appeler les fonctions des questions précédentes même si elles n'ont pas été écrites. On représentera un polynôme par la liste de ses coefficients. Par exemples, le polynôme $x \mapsto 3x^2 - 1$ est représenté par la liste* `[-1,0,3]` *et la liste* `[2,-1,0,1]` *représente le polynôme $x \mapsto x^3 - x + 2$.*
   (a) *Écrire une fonction* `multiplication(a,L)` *qui prend en arguments un réel a et une liste représentant un polynôme $R : x \mapsto R(x)$, puis qui renvoie la liste représentant $x \mapsto aR(x)$.*
   ▶ Par exemple :

```
def multiplication(a,L):
    deg=len(L)-1
    aL=[]
    for k in range(deg+1):
        aL.append(a*L[k])
    return aL
```

   (b) *Écrire une fonction* `somme(L1,L2)` *qui prend en arguments deux listes (pas nécessairement de même longueur) représentant deux polynômes $R_1 : x \mapsto R_1(x)$ et $R_2 : x \mapsto R_2(x)$, puis qui renvoie la liste représentant $x \mapsto R_1(x) + R_2(x)$.*
   ▶ Par exemple :

```
def somme(L1,L2):
    deg1=len(L1)-1
    deg2=len(L2)-1
    deg=max(deg1,deg2)
    L=[]
    for k in range(deg+1):
        if k>deg1:
            L.append(L2[k])
        elif k>deg2:
            L.append(L1[k])
        else:
            L.append(L1[k]+L2[k])
    return L
```

On peut aussi commencer par compléter la liste la moins longue (c'est-à-dire correspondant au polynôme de plus petit degré) avec des 0 (c'est-à-dire des coefficients nuls) pour obtenir des listes de même longueur. Par exemple :

```
def somme(L1,L2):
    deg1=len(L1)-1
    deg2=len(L2)-1
    if deg1<deg2:
        for i in range(deg2-deg1)]:
            L1.append(0)
    if deg2<deg1:
        for i in range(deg1-deg2)]:
            L2.append(0)
    deg=max(deg1,deg2)
    L=[]
    for k in range(deg+1):
        L.append(L1[k]+L2[k])
    return L
```

(c) *Écrire une fonction* `produit(L1,L2)` *qui prend en arguments deux listes représentant deux polynômes, puis qui renvoie la liste représentant le produit de ces deux polynômes.*

▶ Par exemple :

```
def produit(L1,L2):
    deg1=len(L1)-1
    deg2=len(L2)-1
    deg=deg1+deg2
    L=[]
    for k in range(deg+1):
        S=0
        for i in range(k+1):
            if i<=deg1 and k-i<=deg2:
                S=S+L1[i]*L2[k-i]
        L.append(S)
    return L
```

(d) *Écrire deux fonctions* `calculeP(n)` *et* `calculeQ(n)` *qui prend en argument l'entier $n \in \mathbb{N}$, puis qui renvoie les listes représentant les polynômes P_n et Q_n respectivement.*

▶ Par exemple :

```python
def calculeP(n):
    P0=[1]
    P1=[-2,2]
    if n==0:
        return P0
    elif n==1:
        return P1
    else:
        for k in range(n-1):
            a=-2*(2*k+3)
            L1=multiplication(a,P1)
            L2=produit([0,0,4],P0)
            P2=somme(L1,L2)
            P0=P1
            P1=P2
        return P2
```

```python
def calculeQ(n):
    Q0=[-1]
    Q1=[2,2]
    if n==0:
        return Q0
    elif n==1:
        return Q1
    else:
        for k in range(n-1):
            a=-2*(2*k+3)
            L1=multiplication(a,Q1)
            L2=produit([0,0,4],Q0)
            Q2=somme(L1,L2)
            Q0=Q1
            Q1=Q2
        return Q2
```

6. *Dans cette question, on fixe $p \in \mathbb{N}^*$ et on suppose qu'il existe $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $e^p = a/b$.*

   (a) *D'après les résultats précédents, montrer que $abf_n(p) \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

   ▶ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} abf_n(p) &= ab\left(P_n(p)e^p + Q_n(p)e^{-p}\right) \quad \text{d'après le résultat de la question 4} \\ &= ab\left(P_n(p)\frac{a}{b} + Q_n(p)\frac{b}{a}\right) \quad \text{car } e^p = a/b \text{ et } e^{-p} = 1/e^p = b/a \\ &= a^2 P_n(p) + b^2 Q_n(p). \end{aligned}$$

   Puisque a, b et p sont des entiers et que les coefficients de P_n et Q_n appartiennent à $\mathbb{Z}$ d'après le résultat de la question 4, on en déduit que $abf_n(p)$ est un entier. D'autre part, $f_n(p) > 0$ d'après le résultat de la question 1(a) ($p > 0$ car $p \in \mathbb{N}^*$) donc $abf_n(p) > 0$ ($a > 0$ et $b > 0$ car $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$). Ainsi, $abf_n(p)$ est un entier strictement positif. On en déduit bien que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad abf_n(p) \geqslant 1}.$$

   (b) *En déduire que $e^p \notin \mathbb{Q}$ si $p \in \mathbb{N}^*$.*

   ▶ On sait que $\lim_{n\to+\infty} f_n(p) = 0$ d'après le résultat de la question 1(b). En passant à la limite dans le résultat de la question précédente, on en déduit donc que :

$$0 = \lim_{n\to+\infty} abf_n(p) \geqslant 1 \quad \text{ce qui est absurde.}$$

   Par l'absurde, on a montré qu'il n'existe pas $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $e^p = a/b$, donc que $\boxed{e^p \notin \mathbb{Q}}$.

7. (a) *En vous inspirant des raisonnements précédents, montrer que $e^r \notin \mathbb{Q}$ si $r \in \mathbb{Q}^*$. Indication : commencer par le cas où $r = \alpha/\beta \in \mathbb{Q}_+^*$ et montrer que $ab\beta^n f_n(r) \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

   ▶ On raisonne par disjonction de cas.

   <u>1er cas : $r > 0$</u>. Soit $r = \alpha/\beta \in \mathbb{Q}_+^*$ où $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $e^r = a/b$. En raisonnant comme à la question 6(a), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad abf_n(r) = a^2 P_n(r) + b^2 Q_n(r) > 0.$$

   Mais $P_n(r)$ et $Q_n(r)$ ne sont plus nécessairement des entiers puisque $r \in \mathbb{Q}$. Or on sait que P_n est un polynôme de degré n à coefficients entiers d'après le résultat de la question 4. Si on note ses coefficients $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, on a :

$$P_n(r) = \sum_{k=0}^{n} a_k r^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k = \frac{1}{\beta^n}\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k \beta^{n-k} \quad \text{en mettant au même dénominateur}$$

$$\text{donc}\quad \beta^n P_n(r) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k \beta^{n-k} \in \mathbb{Z} \quad \text{comme somme et produits d'entiers.}$$

On raisonne de même pour prouver que $\beta^n Q_n(r) \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $ab\beta^n f_n(r)$ est un entier strictement positif. On en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad ab\beta^n f_n(r) \geqslant 1}.$$

On a $\lim_{n\to+\infty} \beta^n = +\infty$ dès que $\beta \geqslant 2$, donc on obtient une forme indéterminée si on raisonne comme à la question précédente. Mais on a d'après le résultat de la question 1(a) :

$$0 < \beta^n f_n(r) \leqslant \overbrace{\beta^n \frac{r^{2n}}{n!}}^{(\beta r^2)^n} \left(e^r - e^{-r}\right).$$

Puisque $(\beta r^2)^n = o_{n\to+\infty}(n!)$ d'après le <u>théorème des croissances comparées</u>, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \beta^n f_n(r) = 0$ d'après le <u>théorème de limite par encadrement</u>. On peut reprendre le raisonnement de la question précédente pour en déduire par l'absurde que $\boxed{e^r \notin \mathbb{Q}}$.

<u>2^e cas : $r < 0$</u>. Soit $r = -\alpha/\beta \in \mathbb{Q}_-^*$ où $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On raisonne comme dans le 1^{er} cas pour prouver que $ab\beta^n f_n(r)$ est un entier, mais cette fois il est strictement négatif d'après le résultat de la question 1(c). On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad ab\beta^n f_n(r) \leqslant -1.$$

De plus, on a d'après le résultat de la question 1(c) :

$$\frac{(\beta r^2)^n}{n!} \left(e^r - e^{-r}\right) \leqslant \beta^n f_n(r) < 0.$$

Donc on peut raisonner comme dans le 1^{er} cas pour prouver que $\lim_{n\to+\infty} \beta^n f_n(r) = 0$ puis pour conclure par l'absurde que $\boxed{e^r \notin \mathbb{Q}}$.

<u>Conclusion</u>. Dans tous les cas, on a montré que $\boxed{e^r \notin \mathbb{Q} \text{ si } r \in \mathbb{Q}^*}$.

(b) *Que peut-on en déduire pour $\ln(r)$ si $r \in \mathbb{Q}_+^* \setminus \{1\}$?*

► Soit $r \in \mathbb{Q}_+^* \setminus \{1\}$. On suppose par l'absurde que $\ln(r) \in \mathbb{Q}$, donc que $\ln(r) \in \mathbb{Q}^*$ car $r \neq 1$. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que $r = e^{\ln(r)} \notin \mathbb{Q}$ ce qui est absurde. Par conséquent, $\boxed{\ln(r) \notin \mathbb{Q} \text{ si } r \in \mathbb{Q}_+^* \setminus \{1\}}$.

Problème (Modélisation)

Le climat des régions tempérées est caractérisé par une alternance de périodes de beau temps et de mauvais temps, entrecoupées par des périodes plus brèves et plus extrêmes de froid intense ou de forte chaleur.

Ce problème propose d'étudier un modèle (très) simplifié de ce type de climat comportant quatre états : gel (noté G), pluie (noté P), soleil (noté S) et canicule (noté C). On suppose que ces états évoluent quotidiennement selon les règles suivantes :

- *s'il gèle un jour, alors, le lendemain, ou bien il continue de geler avec probabilité $1/7$ ou bien il pleut avec probabilité $6/7$;*
- *s'il pleut un jour, alors, le lendemain, ou bien il gèle avec probabilité $1/7$, ou bien il continue de pleuvoir avec probabilité $3/7$, ou bien le soleil succède à la pluie avec probabilité $3/7$;*
- *s'il fait soleil un jour, alors, le lendemain, ou bien le temps se dégrade à la pluie avec probabilité $3/7$, ou bien il reste ensoleillé avec probabilité $3/7$, ou bien il devient caniculaire avec probabilité $1/7$;*
- *si un jour est caniculaire, alors, le lendemain, ou bien le temps redevient simplement ensoleillé avec probabilité $6/7$, ou bien il reste caniculaire avec probabilité $1/7$.*

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note G_n (respectivement P_n, S_n et C_n) l'événement «il gèle (respectivement il pleut, il fait soleil, c'est caniculaire) le jour n», et $g_n = \mathbb{P}(G_n)$ (respectivement $p_n = \mathbb{P}(P_n)$, $s_n = \mathbb{P}(S_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$) sa probabilité. On suppose qu'il fait soleil au jour initial $n = 0$, ainsi $s_0 = 1$ et $g_0 = p_0 = c_0 = 0$.

1. *[**Info.**] Écrire chaque fonction demandée en Python. On pourra appeler les fonctions des questions précédentes même si elles n'ont pas été écrites. Pour rappel, l'instruction* `random.randint(a,b)` *de la bibliothèque* `random` *renvoie un entier aléatoire compris entre* `a` *inclus et* `b` *inclus.*

   (a) *Écrire une fonction* `lendemain(etat)` *qui prend en argument l'état d'un jour sous la forme d'une chaîne de caractères* `'G'`, `'P'`, `'S'` *ou* `'C'`, *qui choisit un entier aléatoire entre* 1 *et* 7, *puis qui renvoie l'état du lendemain sous la même forme. Indication : utiliser plusieurs instructions* `if`.

   ▶ Par exemple :

```
import random
def lendemain(etat):
    alea=random.randint(1,7)
    if etat=='G':
        if alea==1:
            return 'G'
        else:
            return 'P'
    elif etat=='P':
        if alea==1:
            return 'G'
        elif alea<=4:
            return 'P'
        else:
            return 'S'
    elif etat=='S':
        if alea<=3:
            return 'P'
        elif alea<=6:
            return 'S'
        else:
            return 'C'
    else:
        if alea<=6:
            return 'S'
        else:
            return 'C'
```

   (b) *Écrire une fonction* `simulation(n)` *qui prend en argument l'entier* $n \in \mathbb{N}$, *qui simule le modèle jusqu'au jour* n *en partant de l'état initial* `etat='S'`, *puis qui renvoie l'état du jour* n.

   ▶

```
def simulation(n):
    etat='S'
    for jour in range(n):
        etat=lendemain(etat)
    return etat
```

   (c) *Écrire une fonction* `frequences(n,nbSimul)` *qui prend en argument deux entiers, qui simule le modèle* `nbSimul` *fois, puis qui renvoie la liste* `F=[F[0],F[1],F[2],F[3]]` *des fréquences d'apparition des événements* G_n, P_n, S_n *et* C_n *parmi ces simulations. Par exemple,* `F[2]` *est égal au rapport du nombre de fois où du soleil est observé le jour* n *par le nombre de simulations.*

   ▶

```
def frequences(n,nbSimul):
    F=[0,0,0,0]
    for simul in range(nbSimul):
        etat=simulation(n)
        if etat=='G':
            F[0]=F[0]+1
        elif etat=='P':
            F[1]=F[1]+1
        elif etat=='S':
            F[2]=F[2]+1
        else:
            F[3]=F[3]+1
    for i in range(4):
        F[i]=F[i]/nbSimul
    return F
```

On peut aussi incrémenter les fréquences directement par `1/nbSimul` *au lieu de* `1` *afin de ne pas avoir besoin de diviser par* `nbSimul` *à la fin. Par exemple :*

```
def frequences(n,nbSimul):
    F=[0,0,0,0]
    for simul in range(nbSimul):
        etat=simulation(n)
        if etat=='G':
            F[0]=F[0]+1/nbSimul
        elif etat=='P':
            F[1]=F[1]+1/nbSimul
        elif etat=='S':
            F[2]=F[2]+1/nbSimul
        else:
            F[3]=F[3]+1/nbSimul
    return F
```

2. *Calculer g_1, p_1, s_1 et c_1.*

► D'après l'énoncé, puisqu'il fait soleil au jour initial $n = 0$, alors le lendemain, au jour $n = 1$:
— il n'est pas possible qu'il gèle, donc $\boxed{g_1 = 0}$;
— il pleut avec probabilité $\boxed{p_1 = 3/7}$;
— il fait soleil avec probabilité $\boxed{s_1 = 3/7}$;
— c'est caniculaire avec probabilité $\boxed{c_1 = 1/7}$.

3. *On fixe $n \in \mathbb{N}$ dans cette question.*

(a) *Que peut-on dire des événements G_n, P_n, S_n et C_n ?*

► Les événements G_n, P_n, S_n et C_n sont deux à deux incompatibles car deux états ne peuvent pas se produire le même jour (selon ce modèle) et leur union forme l'univers car il n'existe que quatre états possibles (selon ce modèle). On en déduit qu'$\boxed{\text{ils forment un système complet d'événements}}$.

(b) *Justifier que $7g_{n+1} = g_n + p_n$ en citant précisément la formule utilisée.*

► Puisque G_n, P_n, S_n et C_n forment un système complet d'événements d'après le résultat de la question précédente, on peut appliquer la <u>formule des probabilités totales</u> :

$$\underbrace{\mathbb{P}(G_{n+1})}_{=g_{n+1}} = \underbrace{\mathbb{P}(G_n)}_{=g_n}\mathbb{P}_{G_n}(G_{n+1}) + \underbrace{\mathbb{P}(P_n)}_{=p_n}\mathbb{P}_{P_n}(G_{n+1}) + \underbrace{\mathbb{P}(S_n)}_{=s_n}\mathbb{P}_{S_n}(G_{n+1}) + \underbrace{\mathbb{P}(C_n)}_{=c_n}\mathbb{P}_{C_n}(G_{n+1}).$$

Or on a d'après l'énoncé :

— s'il gèle alors il gèle le lendemain avec probabilité $\mathbb{P}_{G_n}(G_{n+1}) = 1/7$;
— s'il pleut alors il gèle le lendemain avec probabilité $\mathbb{P}_{P_n}(G_{n+1}) = 1/7$;
— s'il fait soleil alors il n'est pas possible qu'il gèle le lendemain, donc $\mathbb{P}_{S_n}(G_{n+1}) = 0$;
— si c'est caniculaire alors il n'est pas possible qu'il gèle le lendemain, donc $\mathbb{P}_{C_n}(G_{n+1}) = 0$.

En remplaçant ces probabilités conditionnelles par leur valeur dans la formule des probabilités totales, on obtient :

$$g_{n+1} = \frac{1}{7}g_n + \frac{1}{7}p_n + 0s_n + 0c_n \quad \text{donc} \quad \boxed{7g_{n+1} = g_n + p_n}.$$

(c) Déterminer des expressions similaires pour $7p_{n+1}$ et $7s_{n+1}$ en fonction de g_n, p_n, s_n et c_n.

▶ On raisonne comme à la question précédente, en appliquant la formule des probabilités totales et en déterminant les probabilités conditionnelles à l'aide de l'énoncé. On obtient :

$$\underbrace{\mathbb{P}(P_{n+1})}_{=p_{n+1}} = \underbrace{\mathbb{P}(G_n)}_{=g_n}\underbrace{\mathbb{P}_{G_n}(P_{n+1})}_{=6/7} + \underbrace{\mathbb{P}(P_n)}_{=p_n}\underbrace{\mathbb{P}_{P_n}(P_{n+1})}_{=3/7} + \underbrace{\mathbb{P}(S_n)}_{=s_n}\underbrace{\mathbb{P}_{S_n}(P_{n+1})}_{=3/7} + \underbrace{\mathbb{P}(C_n)}_{=c_n}\underbrace{\mathbb{P}_{C_n}(P_{n+1})}_{=0}$$

$$\text{donc} \quad \boxed{7p_{n+1} = 6g_n + 3p_n + 3s_n}$$

et de même :

$$\underbrace{\mathbb{P}(S_{n+1})}_{=S_{n+1}} = \underbrace{\mathbb{P}(G_n)}_{=g_n}\underbrace{\mathbb{P}_{G_n}(S_{n+1})}_{=0} + \underbrace{\mathbb{P}(P_n)}_{=p_n}\underbrace{\mathbb{P}_{P_n}(S_{n+1})}_{=3/7} + \underbrace{\mathbb{P}(S_n)}_{=s_n}\underbrace{\mathbb{P}_{S_n}(S_{n+1})}_{=3/7} + \underbrace{\mathbb{P}(C_n)}_{=c_n}\underbrace{\mathbb{P}_{C_n}(S_{n+1})}_{=6/7}$$

$$\text{donc} \quad \boxed{7s_{n+1} = 3p_n + 3s_n + 6c_n}.$$

(d) Déduire des résultats précédents que $7X_{n+1} = AX_n + Y$ où :

$$X_n = \begin{pmatrix} g_n \\ p_n \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 3 \\ -6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

▶ On a :

$$AX_n + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 3 \\ -6 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_n \\ p_n \\ s_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_n + p_n \\ 6g_n + 3p_n + 3s_n \\ -6g_n - 3p_n - 3s_n + 6 \end{pmatrix}.$$

Or $g_n + p_n = 7g_{n+1}$ d'après le résultat de la question 3(b) et $6g_n + 3p_n + 3s_n = 7p_{n+1}$ d'après le résultat de la question précédente. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
&7s_{n+1} - \Big(-6g_n - 3p_n - 3s_n + 6\Big) \\
=&\Big(3p_n + 3s_n + 6c_n\Big) + 6g_n + 3p_n + 3s_n - 6 \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
=&6g_n + 6p_n + 6s_n + 6c_n - 6 = 6\underbrace{\Big(g_n + p_n + s_n + c_n\Big)}_{=1} - 6 \\
=&6 - 6 = 0 \quad \text{car } G_n,\ P_n,\ S_n \text{ et } C_n \text{ forment un système complet d'événements.}
\end{aligned}$$

Donc $-6g_n - 3p_n - 3s_n + 6 = 7s_{n+1}$. Finalement, on a :

$$AX_n + Y = \begin{pmatrix} g_n + p_n \\ 6g_n + 3p_n + 3s_n \\ -6g_n - 3p_n - 3s_n + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7g_{n+1} \\ 7p_{n+1} \\ 7c_{n+1} \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} g_{n+1} \\ p_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \boxed{X_{n+1}}.$$

4. *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \left(\frac{1}{7}A\right)^n (X_0 - Z) + Z$*, où* $Z = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}1\\6\\6\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$*.*

► On raisonne par récurrence.
Initialisation. Pour $n = 0$, on a :

$$\underbrace{\left(\frac{1}{7}A\right)^0}_{=\mathrm{I}_3}(X_0 - Z) + Z = X_0 - Z + Z = X_0.$$

Donc le résultat est vrai pour $n = 0$.
Hérédité. On suppose que le résultat est vrai pour $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \frac{1}{7}\big(AX_n + Y\big) \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\ &= \frac{1}{7}\left(A\left(\left(\frac{1}{7}A\right)^n (X_0 - Z) + Z\right) + Y\right) \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \left(\frac{1}{7}A\right)^{n+1}(X_0 - Z) + \frac{1}{7}\big(AZ + Y\big). \end{aligned}$$

Or :

$$AZ + Y = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 6 & 3 & 3\\ -6 & -3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\6\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}7+0\\42+0\\-42+84\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\6\\6\end{pmatrix} = 7Z.$$

Par conséquent :

$$X_{n+1} = \left(\frac{1}{7}A\right)^{n+1}(X_0 - Z) + \frac{1}{7}\big(AZ + Y\big) = \left(\frac{1}{7}A\right)^{n+1}(X_0 - Z) + Z.$$

Ainsi, on a bien montré que le résultat est vrai pour $n + 1$ dès qu'il est vrai pour n.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \left(\frac{1}{7}A\right)^n (X_0 - Z) + Z}.$$

5. *On considère la matrice* $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -3 & -1 & 2\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$*.*

(a) *Montrer que* P *est inversible et calculer* P^{-1}*.*

► On fixe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et on résout le système linéaire suivant d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en l'échelonnant à l'aide de la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix}\boxed{1} & 1 & 1\\ -3 & -1 & 2\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} \\ &\iff \begin{pmatrix}\boxed{1} & 1 & 1\\ 0 & \boxed{2} & 5\\ 0 & -4 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b+3a\\c-3a\end{pmatrix} \; L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \\ &\iff \begin{pmatrix}\boxed{1} & 1 & 1\\ 0 & \boxed{2} & 5\\ 0 & 0 & \boxed{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b+3a\\c-3a+2b+6a\end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a un système linéaire de rang 3 maximal, donc il admet une unique solution. On en déduit que $\boxed{P \text{ est inversible}}$. De plus, l'unique solution est :

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \begin{cases} z = \frac{1}{5}(c-3a+2b+6a) = \frac{3}{5}a+\frac{2}{5}b+\frac{1}{5}c \\ y = \frac{1}{2}(b+3a-5z) = \frac{-1}{2}b-\frac{1}{2}c \\ x = a-y-z = \frac{2}{5}a+\frac{1}{10}b+\frac{3}{10}c \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}a+\frac{1}{10}b+\frac{3}{10}c \\ \frac{-1}{2}b-\frac{1}{2}c \\ \frac{3}{5}a+\frac{2}{5}b+\frac{1}{5}c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}}.$$

(b) *Calculer $D = P^{-1}AP$ et vérifier que le résultat est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux appartiennent à $]-7,7[$.*

▶ On a :

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}AP \\ &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 3 \\ -6 & -3 & -3 \end{pmatrix}P \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\ &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -8 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 18 & 12 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}. \end{aligned}$$

On obtient bien $\boxed{\text{une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux, qui sont égaux à } -2,\ 0 \text{ et } 3, \text{ appartiennent à }]-7,7[}$.

(c) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^n en fonction de P, P^{-1} et D^n.*

▶ On raisonne par récurrence pour montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation. Pour $n = 0$, on a :

$$A^0 = \mathrm{I}_3 \quad \text{et} \quad PD^0P^{-1} = P\mathrm{I}_3P^{-1} = PP^{-1} = \mathrm{I}_3.$$

Donc le résultat est vrai pour $n = 0$.
Hérédité. On suppose que le résultat est vrai pour $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^nA \quad \text{par propriété de la puissance} \\ &= PD^nP^{-1}A \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= PD^n\underbrace{P^{-1}AP}_{=D}P^{-1} \quad \text{car } PP^{-1} = \mathrm{I}_3 \\ &= PD^nDP^{-1} \quad \text{par associativité et d'après le résultat de la question précédente} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien montré que le résultat est vrai pour $n+1$ dès qu'il est vrai pour n.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}}.$$

(d) *En déduire que chaque coefficient de la matrice $\left(\frac{1}{7}A\right)^n$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(\frac{1}{7}A\right)^n = \frac{1}{7^n}A^n = \frac{1}{7^n}PD^nP^{-1} = P\left(\frac{1}{7}D\right)^n P^{-1}.$$

Or on a d'après le résultat de la question 5(b) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(\frac{1}{7}D\right)^n = \left(\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right)^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{-2}{7}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{3}{7}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Puisque les coefficients des matrices P et P^{-1} sont des constantes, les coefficients de la matrice $\left(\frac{1}{7}A\right)^n$ sont donc des sommes de $\left(\frac{-2}{7}\right)^n$ et de $\left(\frac{3}{7}\right)^n$ multipliés par des constantes. Or $\frac{-2}{7} \in]-1,1[$ et $\frac{3}{7} \in]-1,1[$, donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-2}{7}\right)^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^n = 0$. Par opérations usuelles sur les limites, on en déduit que $\boxed{\text{chaque coefficient de la matrice } \left(\frac{1}{7}A\right)^n \text{ tend vers 0 quand } n \to +\infty}$.

6\. (a) *Déduire des résultats précédents les limites des suites $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

▶ On a d'après le résultat de la question 4 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} g_n \\ p_n \\ s_n \end{pmatrix} = X_n = \left(\frac{1}{7}A\right)^n (X_0 - Z) + Z.$$

Puisque les coefficients de la matrice $X_0 - Z$ sont des constantes, on déduit du résultat de la question précédente que chaque coefficient de la matrice $\left(\frac{1}{7}A\right)^n (X_0 - Z)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, et donc que les coefficients de X_n tendent vers ceux de Z quand $n \to +\infty$. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix} g_n \\ p_n \\ s_n \end{pmatrix} = \lim_{n\to+\infty} X_n = Z = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \boxed{\lim_{n\to+\infty} g_n = \frac{1}{14}}, \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{3}{7}} \\ \text{et} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{3}{7}}. \end{cases}$$

D'autre part, on sait que $g_n + p_n + s_n + c_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car G_n, P_n, S_n et C_n forment un système complet d'événements. Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} 1 - g_n - p_n - s_n = 1 - \frac{1}{14} - \frac{3}{7} - \frac{3}{7} = \frac{14-1-6-6}{14} \quad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{14}}.$$

(b) *Interpréter ces résultats.*

▶ Selon le modèle proposé dans l'énoncé, l'état d'un jour éloigné du jour initial (c'est-à-dire lorsque le climat est bien installé) est d'après le résultat de la question précédente : du gel avec probabilité d'environ $1/14$, de la pluie avec probabilité d'environ $3/7$, du soleil avec probabilité d'environ $3/7$ ou bien une canicule avec probabilité d'environ $1/14$. Ces résultats sont cohérents avec un climat tempéré, même si le modèle est très simplifié. Par exemple il ne prend pas en compte les jours de neige, ou les changements de temps durant la même journée.

Rapporté à une année d'environ 364 jours, on obtient environ $364/14 = 26$ jours de gel, $364 * 3/7 = 156$ jours de pluie, $364 * 3/7 = 156$ jours de soleil et $364/14 = 26$ jours de canicule.

On peut aussi vérifier ces probabilités avec la fonction `frequences` *de la question 1(c). Par exemple, après 10000 simulations de l'état de la 100^e^ journée, on obtient :*

```
>frequences(100,10000)
            [0.0731, 0.4254, 0.435, 0.0665]
>frequences(100,10000)
            [0.0716, 0.4271, 0.4273, 0.074]
```