DS 7 mathématiques

BCPST 1 2018-2019

— Durée : 3 heures.

— Documents et calculatrice non autorisés.

— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Problème 1 : étude d'intersections

Dans tout le problème, les sous-espaces vectoriels considérés sont inclus dans $\mathbb{R}^4$ et on note $0_{\mathbb{R}^4}$ le vecteur nul.

Dans $\mathbb{R}^4$, il existe cinq catégories de sous-espaces vectoriels :

— l'unique sous-espace vectoriel de dimension 0 qui est $\{0_{\mathbb{R}^4}\}$,

— les sous-espaces vectoriels de dimension 1 aussi appelés **droites vectorielles**,

— les sous-espaces vectoriels de dimension 2 aussi appelés **plans vectoriels**,

— les sous-espaces vectoriels de dimension 3,

— et $\mathbb{R}^4$.

On rappelle que l'intersection de deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^4$ est un espace vectoriel de dimension 2 (s'ils sont confondus), 1 (s'ils s'intersectent selon une droite vectorielle) ou bien 0 (si leur intersection contient seulement le vecteur nul).

On présente un problème qui a intéressé le mathématicien Hermann Schubert :

"étant donné E_1, E_2, F_1, F_2 quatre plans vectoriels de $\mathbb{R}^4$ tels que $E_1 \cap E_2$ et $F_1 \cap F_2$ sont égales à des droites vectorielles et les $E_i \cap F_j$ sont réduits à $\{0_{\mathbb{R}^4}\}$, décrire les plans vectoriels V tels que les $V \cap E_i$ et $V \cap F_i$ sont des droites vectorielles."

Autrement dit, E_1, E_2, F_1, F_2 sont des sous-espaces vectoriels de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$ vérifiant les hypothèses suivantes :

$$\begin{array}{l} \dim(E_1 \cap E_2) = \dim(F_1 \cap F_2) = 1, \\ \dim(E_1 \cap F_1) = \dim(E_1 \cap F_2) = \dim(E_2 \cap F_1) = \dim(E_2 \cap F_2) = 0 \end{array} \tag{D}$$

et on cherche les sous-espaces vectoriels V de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$ tels que :

$$\dim(V \cap E_1) = \dim(V \cap E_2) = \dim(V \cap F_1) = \dim(V \cap F_2) = 1. \tag{SC}$$

Ce problème se propose d'étudier un cas particulier du problème de Schubert. Dans la partie 1, on justifie que les E_1, E_2, F_1, F_2 donnés vérifient les hypothèses (D). Puis, dans la partie 2, on construit deux plans vectoriels V_1 et V_2 vérifiant (SC). Enfin, on montre que V_1 et V_2 sont les seuls plans vectoriels vérifiant (SC) dans la partie 3.

Partie 1 : présentation de l'exemple

On pose :

$$E_1 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x + 2y - z - t = 0 \text{ et } 3x + y + 2z + t = 0\right\}, \quad E_2 = \mathrm{vect}((3,1,2,-1),(-4,0,-1,1)),$$

$$F_1 = \mathrm{vect}((2,-1,1,-2),(1,1,3,1)), \qquad F_2 = \mathrm{vect}((4,-3,2,1),(0,-4,-5,1))$$

$$G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + 4t = 0 \text{ et } -y + z + t = 0\right\}.$$

1. (**INFO**) Écrire une fonction `est_dans_E1(L)` qui prend en argument une liste L de réels de longueur 4 et qui renvoie `True` si $(L[0], L[1], L[2], L[3])$ est un élément de E_1 et `False` sinon.
2. Déterminer une base de E_1 et montrer que E_1 est bien un plan vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
3. Montrer que E_2, F_1, F_2 sont bien des plans vectoriels.
4. Montrer que $G = E_2$.

5. Déterminer un système d'équations linéaires (S) tel que pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on ait :

$$(x, y, z, t) \in F_1 \Leftrightarrow (x, y, z, t) \text{ solution de } (S).$$

6. Trouver une base de $E_1 \cap E_2$ et calculer la dimension de $E_1 \cap E_2$. On pourra déterminer les éléments de E_2 vérifiant le système d'équations caractérisant les éléments de E_1.
7. Trouver une base de $F_1 \cap F_2$ et calculer la dimension de $F_1 \cap F_2$.
8. Montrer que $\dim(E_1 \cap F_1) = \dim(E_1 \cap F_2) = \dim(E_2 \cap F_1) = \dim(E_2 \cap F_2) = 0$.
9. Conclure à l'aide des questions précédentes que E_1, E_2, F_1, F_2 vérifient bien les conditions (D).

Partie 2 : construction de solutions

Dans la suite, on pose $e = (-1, 1, 1, 0)$ et $f = (4, 1, 7, 0)$. On a alors $\mathrm{vect}(e) = E_1 \cap E_2$ et $\mathrm{vect}(f) = F_1 \cap F_2$.

10. On pose $V_1 = \mathrm{vect}(e, f)$. Montrer que V_1 est un plan vectoriel et qu'il vérifie les conditions (SC).
11. On pose :

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + 22y - 21z - 17t = 0\}, F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | 27x + 25y - 19z + 5t = 0\}.$$

    Montrer que E et F sont de dimension 3.
12. Montrer que $E_1 \subset E, E_2 \subset E, F_1 \subset F, F_2 \subset F$.
13. On pose $V_2 = E \cap F$.
    (a) Montrer que V_2 est bien un plan vectoriel.
    (b) Soient H un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$ et soient P et Q deux plans vectoriels différents. On suppose que $P \subset H$ et $Q \subset H$ et on note (p_1, p_2) une base de P et (q_1, q_2) une base de Q.
        i. Justifier que $\dim(P \cap Q) \leq 1$.
        ii. Montrer que (p_1, p_2, q_1) ou (p_1, p_2, q_2) est une base de H. Quitte à échanger q_1 et q_2, on suppose que (p_1, p_2, q_1) est une base de H.
        iii. En écrivant q_2 dans la base (p_1, p_2, q_1) montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $q_2 + \lambda q_1 \in P \cap Q$.
        iv. En déduire que $\dim(P \cap Q) = 1$.
    (c) Déduire des questions précédentes que V_2 vérifie (SC).

Partie 3 : analyse du problème

On garde les notations introduites dans la partie 2.
Soit V un plan vectoriel vérifiant (SC). On veut montrer que $V = V_1$ ou $V = V_2$.

14. Justifier qu'il existe v_1, v_2, w_1, w_2 des éléments de $\mathbb{R}^4 \backslash \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ tels que

$$\mathrm{vect}(v_1) = V \cap E_1, \mathrm{vect}(v_2) = V \cap E_2, \mathrm{vect}(w_1) = V \cap F_1, \mathrm{vect}(w_2) = V \cap F_2.$$

15. Montrer que $\mathrm{vect}(v_1, v_2) \subset V \cap E$ et $\mathrm{vect}(w_1, w_2) \subset V \cap F$.
16. (**INFO**) Écrire une fonction Python `est_libre(L,M)` qui prend en arguments deux listes L, M de réels de longueur 4 et qui renvoie `True` si $((L[0], L[1], L[2], L[3]), (M[0], M[1], M[2], M[3]))$ est une famille libre et `False` sinon.
17. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
    (a) (v_1, v_2) est liée,
    (b) e est un élément de V,
    (c) V n'est pas inclus dans F,
    (d) (w_1, w_2) est liée,
    (e) f est un élément de V,
    (f) V n'est pas inclus dans E.
18. En déduire que (v_1, v_2) est une base de V si et seulement si (w_1, w_2) est une base de V.
19. Déduire des questions précédentes que $V = V_1$ ou $V = V_2$.