DS n^{o} 8 de mathématiques et d'informatique
durée : 2 heures

L'usage de la calculatrice ou de documents est interdit.
Il est recommandé de lire l'ensemble de l'énoncé attentivement et patiemment.
Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en mentionnant les hypothèses que vous avez été amené à formuler.
Le soin de la présentation, la qualité de la rédaction, ainsi que la rigueur, la clarté et la concision des raisonnements constitueront un facteur important d'appréciation de la copie.

Exercice 1

On considère une urne contenant r boules rouges et j boules jaunes (aux couleurs chinoises !) indiscernables au toucher. On pose $n = r + j$. On répète les opérations suivantes : on tire au hasard une boule puis on replace dans l'urne deux boules de la couleur obtenue.

On note R_k l'événement «la boule tirée lors du k-ième tirage est rouge».

À l'issue du premier tirage, l'urne contient donc $n+1$ boules et on note r_1 le nombre d'entre elles qui sont rouges. Ainsi, $\mathbb{P}_{R_1}(r_1 = r+1) = \mathbb{P}_{\overline{R_1}}(r_1 = r) = 1$. Plus généralement, on note r_k le nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue du k-ième tirage.

Simulation informatique

Écrire chaque fonction demandée en Python. On pourra appeler les fonctions des questions précédentes même si elles n'ont pas été écrites. Pour rappel, l'instruction `L.append(a)` ajoute l'élément `a` à la fin de la liste `L`, et l'instruction `random.randint(a,b)` de la bibliothèque `random` renvoie un entier aléatoire compris entre `a` inclus et `b` inclus.

1. Écrire une fonction `modeliser_urne` qui prend en arguments les entiers r et j, puis qui renvoie une liste de $n = r + j$ éléments, dont r sont égaux à la chaîne de caractères `'R'` et les j restants à `'J'`. Par exemple, `modeliser_urne(4,2)` peut renvoyer `['R','R','R','R','J','J']`.
2. Écrire une fonction `simuler_tirage` qui prend en argument une liste `L` modélisant l'urne, qui choisit au hasard un élément de `L`, puis qui ajoute un élément identique à la fin de `L` avant de la renvoyer. Par exemple, `simuler_tirage(['R','R','J'])` peut renvoyer `['R','R','J','R']` si l'un des deux premiers éléments a été choisi, ou bien `['R','R','J','J']` sinon.
3. Écrire une fonction `compter_rouges` qui prend en arguments les entiers r et j ainsi qu'un entier k, qui simule k tirages, puis qui renvoie la valeur de r_k.
4. Écrire une fonction `calculer_frequence` qui prend en arguments les entiers r et j ainsi que des entiers k et `nbSimul`, qui simule `nbSimul` fois l'expérience de k tirages, puis qui renvoie la fréquence d'apparition de l'événement R_k.

Étude mathématique

5. Déterminer la probabilité des événements R_1 et R_2 en fonction de r et n.
6. On fixe $k \in \mathbb{N}^*$ dans cette question.
   (a) Que peut-on dire des événements $(r_k = r)$, $(r_k = r+1)$, $(r_k = r+2)$, …, $(r_k = r+k)$?
   (b) Montrer que :
   $$\sum_{i=r}^{r+k} i\mathbb{P}(r_k = i) = (n+k)\mathbb{P}(R_{k+1}).$$
   (c) Soit $i \in [\![r, r+k]\!]$. Montrer que :
   $$\mathbb{P}\Big((r_k = i) \cap R_{k+1} \cap R_{k+2}\Big) = \frac{i(i+1)}{(n+k)(n+k+1)}\mathbb{P}(r_k = i)$$
   et déterminer une expression similaire pour $\mathbb{P}\left((r_k = i) \cap \overline{R_{k+1}} \cap R_{k+2}\right)$.
   (d) Déduire des résultats précédents une expression de $\mathbb{P}(R_{k+2})$ en fonction de $\mathbb{P}(R_{k+1})$.
7. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(R_k)$ en fonction de r et n pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2

On considère les ensembles suivants :

$$E = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \right\}$$

$$F = \mathrm{Vect}\Big(\overrightarrow{u_1} = (1,3,0,2), \overrightarrow{u_2} = (2,7,-3,6), \overrightarrow{u_3} = (1,1,6,-2) \Big)$$

$$\text{et} \quad G = \left\{ \overrightarrow{e} + \overrightarrow{\mathrm{f}} \;\middle|\; (\overrightarrow{e}, \overrightarrow{\mathrm{f}}) \in E \times F \right\}.$$

1. (a) Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Déterminer une base $\mathscr{B}_E$ de E. Quelle est la dimension de E ?
2. Déterminer une base $\mathscr{B}_F$ de F. Quelle est la dimension de F ?
3. On considère la famille de vecteurs $\mathscr{F}$ formée des vecteurs de $\mathscr{B}_E$ et de $\mathscr{B}_F$.
   (a) La famille $\mathscr{F}$ est-elle libre ou liée ?
   (b) Montrer que $G = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.
   (c) Déterminer une base et la dimension de G.
   (d) Déterminer une représentation cartésienne de G.

Exercice 3

Le but de cet exercice est de trouver les puissances $p \in [1, 2[$ telles que $n^p \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Soient $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et (x, h) un couple de réels strictement positifs. On pose :
$$g : t \mapsto \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$
   (a) Montrer qu'il existe $a \in]x, x+h[$ tel que :
$$g'(a) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}.$$
   (b) En déduire qu'il existe $b \in]x, x+2h[$ tel que :
$$f''(b) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}.$$
2. On fixe $p \in [1, 2[$ tel que $n^p \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) À l'aide du résultat de la question précédente, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{p(p-1)}{(n+2)^{2-p}} \leqslant (n+2)^p - 2(n+1)^p + n^p \leqslant \frac{p(p-1)}{n^{2-p}}.$$
   (b) Justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :
$$0 \leqslant (N+2)^p - 2(N+1)^p + N^p < 1.$$
   (c) En déduire la valeur de $(N+2)^p - 2(N+1)^p + N^p$, puis celle de p. Conclure.