Corrigé du DS n° 8 de mathématiques et d'informatique

Exercice 1

On considère une urne contenant r boules rouges et j boules jaunes (aux couleurs chinoises !) indiscernables au toucher. On pose $n = r + j$. On répète les opérations suivantes : on tire au hasard une boule puis on replace dans l'urne deux boules de la couleur obtenue.

On note R_k l'événement «la boule tirée lors du k-ième tirage est rouge».

À l'issue du premier tirage, l'urne contient donc $n+1$ boules et on note r_1 le nombre d'entre elles qui sont rouges. Ainsi, $\mathbb{P}_{R_1}(r_1 = r+1) = \mathbb{P}_{\overline{R_1}}(r_1 = r) = 1$. Plus généralement, on note r_k le nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue du k-ième tirage.

Simulation informatique

Écrire chaque fonction demandée en Python. On pourra appeler les fonctions des questions précédentes même si elles n'ont pas été écrites. Pour rappel, l'instruction `L.append(a)` *ajoute l'élément* `a` *à la fin de la liste* `L`*, et l'instruction* `random.randint(a,b)` *de la bibliothèque* `random` *renvoie un entier aléatoire compris entre* `a` *inclus et* `b` *inclus.*

1. *Écrire une fonction* `modeliser_urne` *qui prend en arguments les entiers r et j, puis qui renvoie une liste de $n = r + j$ éléments, dont r sont égaux à la chaîne de caractères* `'R'` *et les j restants à* `'J'`*. Par exemple,* `modeliser_urne(4,2)` *peut renvoyer* `['R','R','R','R','J','J']`*.*

   ▶ Par exemple :

```
def modeliser_urne(r,j):
    L=[]
    for i in range(r):
        L.append('R')
    for i in range(j):
        L.append('J')
    return L
```

2. *Écrire une fonction* `simuler_tirage` *qui prend en argument une liste* `L` *modélisant l'urne, qui choisit au hasard un élément de* `L`*, puis qui ajoute un élément identique à la fin de* `L` *avant de la renvoyer. Par exemple,* `simuler_tirage(['R','R','J'])` *peut renvoyer* `['R','R','J','R']` *si l'un des deux premiers éléments a été choisi, ou bien* `['R','R','J','J']` *sinon.*

   ▶ Par exemple :

```
import random
def simuler_tirage(L):
    n=len(L)
    a=L[random.randint(0,n-1)]
    L.append(a)
    return L
```

3. *Écrire une fonction* `compter_rouges` *qui prend en arguments les entiers r et j ainsi qu'un entier k, qui simule k tirages, puis qui renvoie la valeur de r_k.*

   ▶ Par exemple :

```
def compter_rouges(r,j,k):
    L=modeliser_urne(r,j)
    for i in range(k):
        simuler_tirage(L)
    nb=0
    for a in L:
        if a=='R':
            nb=nb+1
    return nb
```

4. *Écrire une fonction* `calculer_frequence` *qui prend en arguments les entiers r et j ainsi que des entiers k et* `nbSimul`*, qui simule* `nbSimul` *fois l'expérience de k tirages, puis qui renvoie la fréquence d'apparition de l'événement R_k.*

   ▶ Par exemple :

```
def calculer_frequence(r,j,k,nbSimul):
    nb=0
    for i in range(nbSimul):
        L=modeliser_urne(r,j)
        for ii in range(k):
            simuler_tirage(L)
            n=len(L)
            if L[n-1]=='R':
                nb=nb+1
    return nb/nbSimul
```

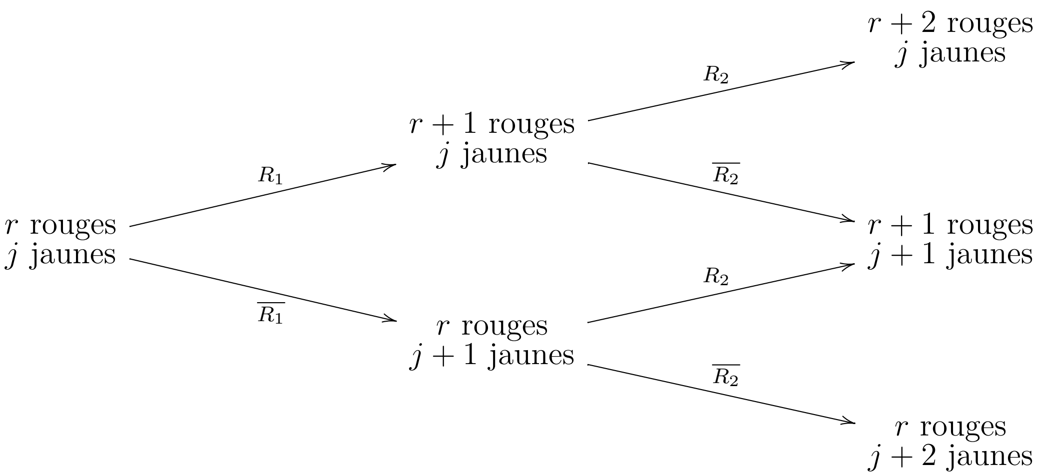
Étude mathématique

5. *Déterminer la probabilité des événements R_1 et R_2 en fonction de r et n.*

   ▶ On peut modéliser chaque tirage par la probabilité uniforme sur l'ensemble des boules dans l'urne car chaque boule est indiscernable au toucher et a ainsi la même probabilité d'être tirée. Pour le premier tirage, on a donc :

$$\mathbb{P}(R_1) = \frac{\text{nombre de boules rouges}}{\text{nombre total de boules dans l'urne}} = \frac{r}{r+j} = \boxed{\frac{r}{n}}.$$

Pour le deuxième tirage, on peut représenter les différents à l'aide d'un arbre de probabilités :



On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_2) &= \mathbb{P}\Big(R_1 \cap R_2\Big) + \mathbb{P}\Big(\overline{R_1} \cap R_2\Big) && \text{d'après la formule des probabilités totales car } R_1 \text{ et } \overline{R_1} \text{ forment un système complet d'événements} \\
&= \mathbb{P}\Big(R_1\Big)\mathbb{P}_{R_1}\Big(R_2\Big) + \mathbb{P}\Big(\overline{R_1}\Big)\mathbb{P}_{\overline{R_1}}\Big(R_2\Big) && \text{d'après la formule des probabilités composées} \\
&= \frac{r}{r+j} \times \frac{r+1}{r+1+j} + \frac{j}{r+j} \times \frac{r}{r+j+1} && \text{d'après la probabilité uniforme} \\
&= \frac{r}{(r+j)(r+1+j)} \times (r+1+j) = \frac{r}{r+j} = \boxed{\frac{r}{n}}.
\end{aligned}$$

6. *On fixe $k \in \mathbb{N}^*$ dans cette question.*

(a) *Que peut-on dire des événements $(r_k = r)$, $(r_k = r+1)$, $(r_k = r+2)$, $\ldots$, $(r_k = r+k)$?*

► Si on tire aucune boule rouge lors des k premiers tirages alors $r_k = r$ qui est la plus petite valeur possible de r_k. Inversement, si on tire seulement des boules rouges lors des k premiers tirages alors $r_k = r+k$ qui est la plus grande valeur possible de r_k. Ainsi, $r_k \in [\![r, r+k]\!]$ et donc l'union des événements $(r_k = r)$, $(r_k = r+1)$, $(r_k = r+2)$, $\ldots$, $(r_k = r+k)$ est égale à l'univers. De plus, ces événements sont deux à deux incompatibles (car r_k ne peut prendre deux valeurs en même temps). On en déduit qu'ils forment un $\boxed{\text{système complet d'événements}}$.

(b) *Montrer que :*

$$\sum_{i=r}^{r+k} i\mathbb{P}(r_k = i) = (n+k)\mathbb{P}(R_{k+1}).$$

► On applique la formule des probabilités totales à l'aide du système complet d'événements obtenu à la question précédente :

$$\mathbb{P}(R_{k+1}) = \sum_{i=r}^{r+k} \mathbb{P}(r_k = i)\mathbb{P}_{r_k=i}(R_{k+1}).$$

On remarque que le nombre total de boules dans l'urne est une suite arithmétique de terme initial n (avant le premier tirage) et de raison 1 (car on rajoute une boule dans l'urne à chaque tirage). À l'issue du k-ième tirage, l'urne contient donc $n+k$ boules. Si i d'entre elles sont rouges, on obtient d'après la probabilité uniforme :

$$\mathbb{P}_{r_k=i}(R_{k+1}) = \frac{i}{n+k}.$$

En reportant dans la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(R_{k+1}) = \sum_{i=r}^{r+k} \mathbb{P}(r_k = i) \times \frac{i}{n+k} = \frac{1}{n+k}\sum_{i=r}^{r+k} i\mathbb{P}(r_k = i) \quad \text{par linéarité de la somme.}$$

Finalement, on en déduit que :

$$\boxed{\sum_{i=r}^{r+k} i\mathbb{P}(r_k = i) = (n+k)\mathbb{P}(R_{k+1})}.$$

(c) *Soit $i \in [\![r, r+k]\!]$. Montrer que :*

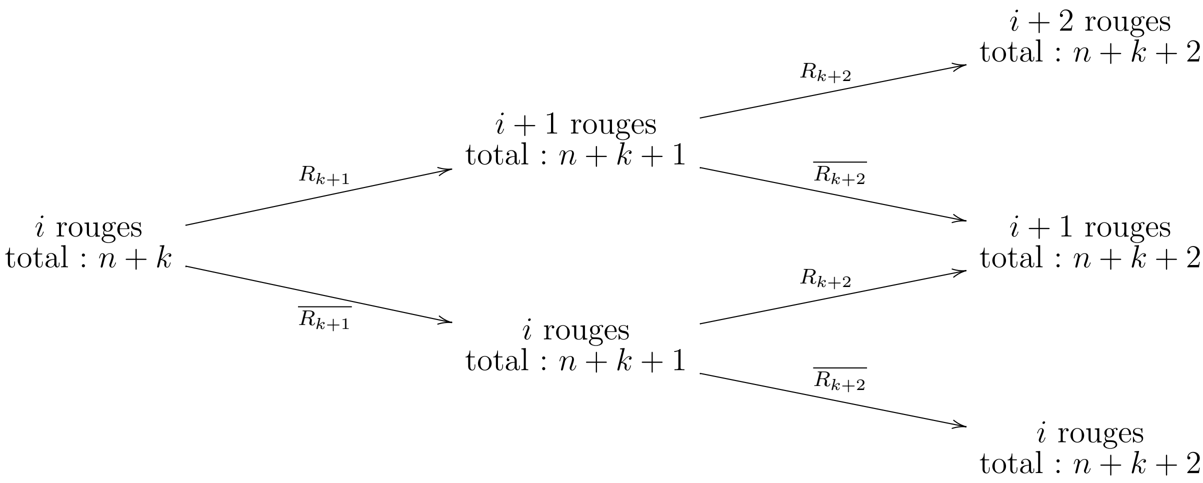
$$\mathbb{P}\Big((r_k = i) \cap R_{k+1} \cap R_{k+2}\Big) = \frac{i(i+1)}{(n+k)(n+k+1)}\mathbb{P}(r_k = i)$$

et déterminer une expression similaire pour $\mathbb{P}\left((r_k = i) \cap \overline{R_{k+1}} \cap R_{k+2}\right)$.

▶ On a d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}\Big((r_k = i) \cap R_{k+1} \cap R_{k+2}\Big) = \mathbb{P}(r_k = i) \times \mathbb{P}_{r_k=i}\Big(R_{k+1}\Big) \times \mathbb{P}_{(r_k=i)\cap R_{k+1}}\Big(R_{k+2}\Big).$$

Si l'urne contient i boules rouges à l'issue du k-ième tirage, on peut représenter les différents cas des deux tirages suivants à l'aide d'un arbre de probabilités :



D'après la probabilité uniforme, on en déduit que :

$$\mathbb{P}_{r_k=i}\Big(R_{k+1}\Big) = \frac{i}{n+k} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{(r_k=i)\cap R_{k+1}}\Big(R_{k+2}\Big) = \frac{i+1}{n+k+1}.$$

En reportant dans la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}\Big((r_k = i) \cap R_{k+1} \cap R_{k+2}\Big) = \mathbb{P}(r_k = i) \times \frac{i}{n+k} \times \frac{i+1}{n+k+1} = \boxed{\frac{i(i+1)}{(n+k)(n+k+1)}\mathbb{P}(r_k = i)}.$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big((r_k = i) \cap \overline{R_{k+1}} \cap R_{k+2}\Big) &= \mathbb{P}(r_k = i) \times \mathbb{P}_{r_k=i}\Big(\overline{R_{k+1}}\Big) \times \mathbb{P}_{(r_k=i)\cap\overline{R_{k+1}}}\Big(R_{k+2}\Big) \\
&= \mathbb{P}(r_k = i) \times \frac{n+k-i}{n+k} \times \frac{i}{n+k+1} \\
&= \boxed{\frac{i(n+k-i)}{(n+k)(n+k+1)}\mathbb{P}(r_k = i)}.
\end{aligned}$$

(d) Déduire des résultats précédents une expression de $\mathbb{P}(R_{k+2})$ en fonction de $\mathbb{P}(R_{k+1})$.

▶ Chaque événement $(r_k = i)$ peut être partitionné en deux événements selon la couleur de la boule tirée lors du $(k+1)$-ième tirage : $(r_k = i) \cap R_{k+1}$ et $(r_k = i) \cap \overline{R_{k+1}}$. On obtient ainsi un nouveau système complet d'événements et on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_{k+2}) &= \sum_{i=r}^{r+k} \mathbb{P}\Big((r_k = i) \cap R_{k+1} \cap R_{k+2}\Big) + \sum_{i=r}^{r+k} \mathbb{P}\Big((r_k = i) \cap \overline{R_{k+1}} \cap R_{k+2}\Big) \\
&= \sum_{i=r}^{r+k} \frac{i(i+1)}{(n+k)(n+k+1)}\mathbb{P}(r_k = i) + \sum_{i=r}^{r+k} \frac{i(n+k-i)}{(n+k)(n+k+1)}\mathbb{P}(r_k = i) \\
&\qquad \text{d'après les résultats de la question précédente} \\
&= \frac{1}{(n+k)(n+k+1)} \sum_{i=r}^{r+k} i\Big[i+1+n+k-i\Big]\mathbb{P}(r_k = i) \quad \text{par linéarité} \\
&= \frac{1}{n+k} \sum_{i=r}^{r+k} i\mathbb{P}(r_k = i) \quad \text{après simplification et par linéarité} \\
&= \frac{1}{n+k}(n+k)\mathbb{P}(R_{k+1}) = \boxed{\mathbb{P}(R_{k+1})} \quad \text{d'après le résultat de la question 6(b).}
\end{aligned}$$

7. *En déduire la valeur de $\mathbb{P}(R_k)$ en fonction de r et n pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, on peut montrer par récurrence que $\mathbb{P}(R_k) = \mathbb{P}(R_2)$ pour tout $k \geqslant 2$.

Attention à l'initialisation : pour $k = 1$, le résultat de la question précédente donne seulement que $\mathbb{P}(R_3) = \mathbb{P}(R_2)$, mais a priori pas que $\mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(R_1)$ (car $k \neq 0$ dans la question 6). Le fait que $\mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(R_1)$ est une conséquence du résultat de la question 5, pas de ceux de la question 6. Soyez précis dans la justification de vos résultats.

D'après le résultat de la question 5, on en déduit que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(R_k) = \frac{r}{n}}.$$

Exercice 2

On considère les ensembles suivants :

$$E = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\right\}$$

$$F = \operatorname{Vect}\Big(\overrightarrow{u_1} = (1,3,0,2), \overrightarrow{u_2} = (2,7,-3,6), \overrightarrow{u_3} = (1,1,6,-2)\Big)$$

$$\text{et} \quad G = \left\{\overrightarrow{e} + \overrightarrow{f} \;\middle|\; (\overrightarrow{e}, \overrightarrow{f}) \in E \times F\right\}.$$

1. (a) *Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.*

▶ Tout d'abord, on remarque que $\overrightarrow{0} = (0,0,0,0) \in E$ car $-0+0+0 = 0$ et $4\times 0 - 2\times 0 + 0 = 0$. Soient $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E$, $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\overrightarrow{x} + \lambda\overrightarrow{y} = (x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2, x_3 + \lambda y_3, x_4 + \lambda y_4).$$

De plus :

$$\begin{aligned}
-(x_1+\lambda y_1) + (x_2+\lambda y_2) + (x_3+\lambda y_3) &= \underbrace{(-x_1+x_2+x_3)}_{=0} + \lambda\underbrace{(-y_1+y_2+y_3)}_{=0} \\
&= 0 \quad \text{car } \overrightarrow{x} \in E \text{ et } \overrightarrow{y} \in E \\
\text{et} \quad 4(x_1+\lambda y_1) - 2(x_2+\lambda y_2) + (x_4+\lambda y_4) &= \underbrace{(4x_1-2x_2+x_4)}_{=0} + \lambda\underbrace{(4y_1-2y_2+y_4)}_{=0} \\
&= 0 \quad \text{car } \overrightarrow{x} \in E \text{ et } \overrightarrow{y} \in E.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\overrightarrow{x} + \lambda\overrightarrow{y} \in E$ et donc que $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4}$.

On peut aussi remarquer que E est l'intersection de deux hyperplans de $\mathbb{R}^4$ puisqu'il est défini par deux équations cartésiennes. Or, d'après le cours, tout hyperplan est un sous-espace vectoriel et toute intersection de sous-espaces vectoriels et un sous-espace vectoriel. D'où le résultat.

(b) *Déterminer une base $\mathscr{B}_E$ de E. Quelle est la dimension de E ?*

▶ On résout le système linéaire suivant à l'aide de la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient un système linéaire homogène échelonné de rang 2 qui admet une infinité de solutions qu'on peut exprimer à l'aide des inconnues auxiliaires x_3 et x_4 :

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{2}(-4x_3 - x_4) = -2x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_1 = x_2 + x_3 = -x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases}, (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} E &= \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\right\} \\ &= \left\{\left(-x_3 - \tfrac{1}{2}x_4, -2x_3 - \tfrac{1}{2}x_4, x_3, x_4\right) \;\middle|\; (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{x_3(-1, -2, 1, 0) + x_4\left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 0, 1\right) \;\middle|\; (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \text{Vect}\Big(\underbrace{(-1, -2, 1, 0)}_{\times(-1)}, \underbrace{\left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 0, 1\right)}_{\times(-2)}\Big) \quad \text{par définition du sous-espace vectoriel engendré} \\ &= \text{Vect}\Big((1, 2, -1, 0), (1, 1, 0, -2)\Big) \quad \text{par propriété du sous-espace vectoriel engendré.} \end{aligned}$$

Lorsque vous pouvez, choisissez les vecteurs les plus simples (avec le moins de signes négatifs et le moins de fractions possibles) afin de faciliter vos calculs futurs.

Ainsi, la famille $(\overrightarrow{e_1} = (1, 2, -1, 0), \overrightarrow{e_2} = (1, 1, 0, -2))$ est génératrice de E. De plus :

$$\begin{aligned} \text{rang}\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right) &= \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{à l'aide des coordonnées dans la base canonique de } \mathbb{R}^4 \\ &= \text{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \\ &= \text{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 \\ 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{matrix} \\ &= \text{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 \\ 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2. \end{aligned}$$

On en déduit que la famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est libre. Finalement, on a montré que :

$$\boxed{\mathscr{B}_E = \left(\overrightarrow{e_1} = (1, 2, -1, 0), \overrightarrow{e_2} = (1, 1, 0, -2)\right) \text{ est une base de } E} \text{ et que } \boxed{\dim(E) = 2}.$$

2. *Déterminer une base $\mathscr{B}_F$ de F. Quelle est la dimension de F ?*

▶ Par définition, la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est génératrice de F. On a à l'aide des coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rang}\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\right) &= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix} \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{matrix} \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 3.
\end{aligned}$$

On en déduit que la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ n'est pas libre et n'est donc pas une base de F. Le système linéaire suivant admet donc une infinité de solutions :

$$\begin{aligned}
\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} + \lambda_3\overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{0} &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix}\text{à l'aide des mêmes opérations} \\ \text{que l'échelonnage précédent}\end{matrix} \\
&\iff \begin{cases} \lambda_2 = 2\lambda_3 \\ \lambda_1 = -2\lambda_2 - \lambda_3 = -5\lambda_3 \end{cases}, \lambda_3 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

En particulier, pour $\lambda_3 = 1$, on obtient la solution suivante :

$$-5\overrightarrow{u_1} + 2\overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3} = \overrightarrow{0} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{u_3} = 5\overrightarrow{u_1} - 2\overrightarrow{u_2}.$$

Par conséquent :

$$F = \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\right) = \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right) \quad \text{par propriété du sous-espace vectoriel engendré.}$$

Ainsi, la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ est génératrice de F. De plus, elle est libre car :

$$\operatorname{rang}\left(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \\ 0 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad \begin{matrix}\text{à l'aide de toujours les mêmes opérations} \\ \text{que l'échelonnage précédent.}\end{matrix}$$

Finalement, on a montré que :

$$\boxed{\mathscr{B}_F = \left(\overrightarrow{u_1} = (1,3,0,2), \overrightarrow{u_2} = (2,7,-3,6)\right) \text{ est une base de } F} \text{ et que } \boxed{\dim(F) = 2}.$$

3. On considère la famille de vecteurs $\mathscr{F}$ formée des vecteurs de $\mathscr{B}_E$ et de $\mathscr{B}_F$.

(a) La famille $\mathscr{F}$ est-elle libre ou liée ?

▶ On a à l'aide des coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rang}\left(\mathscr{F}\right) &= \operatorname{rang}\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right)\\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3 & 7\\ -1 & 0 & 0 & -3\\ 0 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1\\ \\ \end{array}\\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 2\\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2\\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{array}\\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 2\\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 3\\ 0 & 0 & \boxed{2} & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \neq 4.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\text{la famille } \mathscr{F} \text{ est liée}}$.

(b) Montrer que $G = \operatorname{Vect}(\mathscr{F})$.

▶ On raisonne par double inclusion.

1^re^ inclusion $\supset$. Puisque $\operatorname{Vect}(\mathscr{F})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ contenant les vecteurs de $\mathscr{F}$, il suffit de montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ contenant les vecteurs de $\mathscr{F}$. Tout d'abord, puisque E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, on a $\overrightarrow{0} \in E$ et $\overrightarrow{0} \in F$, donc :

$$\overrightarrow{0} = \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in E} + \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F} \in G.$$

Soient $\overrightarrow{e} + \overrightarrow{f} \in G$, avec $(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{f}) \in E \times F$, $\overrightarrow{e}' + \overrightarrow{f}' \in G$, avec $(\overrightarrow{e}', \overrightarrow{f}') \in E \times F$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left(\overrightarrow{e} + \overrightarrow{f}\right) + \lambda\left(\overrightarrow{e}' + \overrightarrow{f}'\right) = \underbrace{\left(\overrightarrow{e} + \lambda\overrightarrow{e}'\right)}_{\in E} + \underbrace{\left(\overrightarrow{f} + \lambda\overrightarrow{f}'\right)}_{\in F} \in G \qquad \text{car } E \text{ et } F \text{ sont des sous-espaces vectoriels de } \mathbb{R}^4.$$

On en déduit que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. De plus :

$$\overrightarrow{e_1} = \underbrace{\overrightarrow{e_1}}_{\in E} + \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F} \in G, \quad \overrightarrow{e_2} = \underbrace{\overrightarrow{e_2}}_{\in E} + \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F} \in G, \quad \overrightarrow{u_1} = \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in E} + \underbrace{\overrightarrow{u_1}}_{\in F} \in G, \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u_2} = \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in E} + \underbrace{\overrightarrow{u_2}}_{\in F} \in G.$$

Donc G contient les vecteurs de $\mathscr{F}$. On a bien montré que $\operatorname{Vect}(\mathscr{F}) \subset G$.

2^e^ inclusion $\subset$. Il suffit de montrer que chaque vecteur de G peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}$. Soit $\overrightarrow{e} + \overrightarrow{f} \in G$, avec $(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{f}) \in E \times F$. Puisque $\mathscr{B}_E$ est une base de E, on peut écrire $\overrightarrow{e}$ comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}_E = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$:

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{e} = \lambda_1\overrightarrow{e_1} + \lambda_2\overrightarrow{e_2}.$$

De même, puisque $\mathscr{B}_F$ est une base de F, on peut écrire $\overrightarrow{f}$ comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}_F = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$:

$$\exists(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{f} = \mu_1\overrightarrow{u_1} + \mu_2\overrightarrow{u_2}.$$

Finalement :

$$\overrightarrow{e} + \overrightarrow{f} = \lambda_1\overrightarrow{e_1} + \lambda_2\overrightarrow{e_2} + \mu_1\overrightarrow{u_1} + \mu_2\overrightarrow{u_2} \in \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right).$$

On a bien montré que $G \subset \operatorname{Vect}(\mathscr{F})$.

Conclusion. Par double inclusion, on a bien montré que $\boxed{G = \operatorname{Vect}(\mathscr{F})}$.

(c) *Déterminer une base et la dimension de G.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de G. Mais elle n'est pas libre d'après le résultat de la question 3(a). En reprenant les calculs de la question 3(a), on a :

$$\begin{aligned}
\lambda_1\overrightarrow{e_1}+\lambda_2\overrightarrow{e_2}+\mu_1\overrightarrow{u_1}+\mu_2\overrightarrow{u_2}=\overrightarrow{0} &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} \mu_1=-\mu_2 \\ \lambda_2=\mu_1+3\mu_2=2\mu_2 \\ \lambda_1=-\lambda_2-\mu_1-2\mu_2=-3\mu_2 \end{cases}, \mu_2\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

En particulier, pour μ_2, on obtient la solution suivante :

$$-3\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}-\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}=\overrightarrow{0} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{u_2}=3\overrightarrow{e_1}-2\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{u_1}.$$

Par conséquent :

$$G=\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)=\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{u_1}\right) \quad \text{par propriété du sous-espace vectoriel engendré.}$$

Ainsi, la famille $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{u_1})$ est génératrice de G. De plus, elle est libre car :

$$\mathrm{rang}\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{u_1}\right)=\mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}=\mathrm{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=3.$$

Finalement, on a montré que :

$$\boxed{\left(\overrightarrow{e_1}=(1,2,-1,0),\overrightarrow{e_2}=(1,1,0,-2),\overrightarrow{u_1}=(1,3,0,2)\right) \text{ est une base de } G} \text{ et que } \boxed{\dim(G)=3}.$$

(d) *Déterminer une représentation cartésienne de G.*

▶ Puisque G est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ d'après le résultat de la question précédente, on cherche une équation cartésienne de la forme :

$$ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0 \quad \text{où } (a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\setminus\{(0,0,0,0)\}.$$

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{u_1}$ forment une base de G d'après le résultat de la question précédente, ils doivent satisfaire l'équation cartésienne de G. On résout donc :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} a+2b-c=0 \\ a+b-2d=0 \\ a+3b+2d=0 \end{cases} &\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1 \end{matrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L_3\leftarrow L_3+L_2 \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On obtient un système linéaire homogène échelonné de rang 3 qui admet une infinité de solutions qu'on peut exprimer à l'aide de l'inconnue auxiliaire d :

$$\begin{cases} c = 0 \\ b = -c - 2d = -2d \\ a = -2b + c = 4d \end{cases}, (c, d) \in \mathbb{R}^2.$$

Puisqu'on cherche une solution $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$, il suffit par exemple de prendre $d = 1$ ce qui donne $(a, b, c, d) = (4, -2, 0, 1)$. D'où une représentation cartésienne de G :

$$\boxed{G = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\right\}}.$$

Exercice 3

Le but de cet exercice est de trouver les puissances $p \in [1, 2[$ telles que $n^p \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. *Soient $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et (x, h) un couple de réels strictement positifs. On pose :*

$$g : t \mapsto \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

(a) *Montrer qu'il existe $a \in]x, x+h[$ tel que :*

$$g'(a) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}.$$

► On remarque que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée et combinaison linéaire de fonctions qui le sont par hypothèse. En particulier, g est continue sur $[x, x+h]$ et dérivable sur $]x, x+h[$. D'après le théorème des accroissements finis, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \exists a \in]x, x+h[, \quad g'(a) &= \frac{g(x+h) - g(x)}{(x+h) - x} \\ &= \frac{\dfrac{f((x+h)+h) - f(x+h)}{h} - \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}}{h} \\ &= \frac{f(x+2h) - f(x+h) - f(x+h) + f(x)}{h^2} \\ &= \boxed{\frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}}. \end{aligned}$$

(b) *En déduire qu'il existe $b \in]x, x+2h[$ tel que :*

$$f''(b) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}.$$

► On a d'après les formules de dérivation :

$$g'(a) = \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \frac{f'(a+h) - f'(a)}{(a+h) - a}.$$

On reconnaît un taux d'accroissement de f'. Puisque $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$, on a $f' \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$. En particulier, f' est continue sur $[a, a+h]$ et dérivable sur $]a, a+h[$. D'après le théorème des accroissements finis, on en déduit que :

$$\exists b \in]a, a+h[, \quad f''(b) = \frac{f'(a+h) - f'(a)}{(a+h) - a} = g'(a).$$

Puisque $a \in]x, x+h[$, on a $a > x$ et $a < x+h$ donc $a+h < x+2h$. Ainsi, $]a, a+h[\subset]x, x+2h[$. Finalement, on a bien prouvé l'existence de $b \in]x, x+2h[$ tel que :

$$f''(b) = g'(a) = \boxed{\frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente.}$$

2. *On fixe $p \in [1, 2[$ tel que $n^p \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

(a) *À l'aide du résultat de la question précédente, montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{p(p-1)}{(n+2)^{2-p}} \leqslant (n+2)^p - 2(n+1)^p + n^p \leqslant \frac{p(p-1)}{n^{2-p}}.$$

► Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On applique le résultat de la question précédente à la fonction $f : t \mapsto t^p$ et au couple $(x, h) = (n, 1)$. La fonction usuelle f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc en particulier de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on a bien $x = n > 0$ et $h = 1 > 0$.

Pensez bien à vérifier les hypothèses d'un théorème avant de l'appliquer, même si ce théorème n'est pas dans le cours. Le résultat de la question précédente a été prouvé seulement en supposant les hypothèses de l'énoncé.

D'après le résultat de la question précédente, on sait qu'il existe $b \in]n, n+2[$ tel que :

$$f''(b) = \frac{f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)}{1^2} = (n+2)^p - 2(n+1)^p + n^p.$$

De plus, on a :

$$f : t \mapsto t^p, \quad f' : t \mapsto pt^{p-1}, \quad f'' : t \mapsto p(p-1)t^{p-2} \quad \text{donc} \quad f''(b) = \frac{p(p-1)}{b^{2-p}}.$$

Or $n < b < n+2$ donc $n^{2-p} < b^{2-p} < (n+2)^{2-p}$ par stricte croissance de la fonction $t \mapsto t^{2-p}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ car $2 - p > 0$ (puisque $p \in [1, 2[$). Comme la fonction $t \mapsto 1/t$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $p(p-1) \geqslant 0$, on en déduit que :

$$\frac{p(p-1)}{(n+2)^{2-p}} \leqslant \underbrace{\frac{p(p-1)}{b^{2-p}}}_{=f''(b)} \leqslant \frac{p(p-1)}{n^{2-p}}.$$

Finalement, on obtient bien que :

$$\boxed{\frac{p(p-1)}{(n+2)^{2-p}} \leqslant (n+2)^p - 2(n+1)^p + n^p \leqslant \frac{p(p-1)}{n^{2-p}}}$$

et cet encadrement est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) *Justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :*

$$0 \leqslant (N+2)^p - 2(N+1)^p + N^p < 1.$$

► Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{p(p-1)}{(n+2)^{2-p}} \geqslant 0$ donc la minoration s'obtient directement du résultat de la question précédente par transitivité. Il reste à montrer la majoration. On remarque que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{p(p-1)}{n^{2-p}} = 0 < 1 \quad \text{car } 2 - p > 0 \text{ (puisque } p \in [1, 2[).$$

Donc on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad \frac{p(p-1)}{n^{2-p}} < 1.$$

En particulier pour $n = N$, on a $\dfrac{p(p-1)}{N^{2-p}} < 1$. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit par transitivité que :

$$\boxed{0 \leqslant (N+2)^p - 2(N+1)^p + N^p < 1}.$$

On peut aussi raisonner par analyse-synthèse pour trouver une valeur explicite de N :

$$\frac{p(p-1)}{N^{2-p}} < 1 \iff N^{2-p} > p(p-1) \iff N > \Big(p(p-1)\Big)^{1/(2-p)}.$$

Il suffit par exemple de prendre $N = \left\lfloor \Big(p(p-1)\Big)^{1/(2-p)} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$.

(c) *En déduire la valeur de $(N+2)^p - 2(N+1)^p + N^p$, puis celle de p. Conclure.*

► Par hypothèse, on sait que $n^p \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, $(N+2)^p \in \mathbb{N}$, $(N+1)^p \in \mathbb{N}$ et $N^p \in \mathbb{N}$. Donc $(N+2)^p - 2(N+1)^p + N^p \in \mathbb{Z}$ comme somme et différence d'entiers. Or $(N+2)^p - 2(N+1)^p + N^p \in [0,1[$ d'après le résultat de la question précédente et 0 est le seul entier appartenant à $[0,1[$. On en déduit que :

$$\boxed{(N+2)^p - 2(N+1)^p + N^p = 0}.$$

En reportant ce résultat dans le résultat de la question 2(a) pour $n = N$, on obtient que :

$$\underbrace{\frac{p(p-1)}{(N+2)^{2-p}}}_{\geqslant 0} \leqslant \underbrace{(N+2)^p - 2(N+1)^p + N^p}_{=0} \leqslant \frac{p(p-1)}{N^{2-p}}.$$

En particulier, on en déduit que $\dfrac{p(p-1)}{(N+2)^{2-p}} = 0$ donc que $p(p-1) = 0$. Ainsi, $p = 0$ ou $p = 1$. Or $p \in [1,2[$ donc $\boxed{p = 1}$. Finalement, on a démontré que la seule puissance $p \in [1,2[$ telle que $n^p \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est $p = 1$.