Sujets et corrigés des DS de mathématiques et d'informatique

BCPST1A lycée Hoche 2018-2019

Sébastien Godillon

Table des matières

DS n° 1 de mathématiques

durée : 3 heures

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+5}{x-2}$. Déterminer les ensembles suivants :

$$\mathscr{E}_1 = \Big\{ f(x) \mid x \in]-7,1[\Big\} \quad \text{et} \quad \mathscr{E}_2 = \Big\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [12,14[\Big\}.$$

Problème 1

Ce problème propose d'étudier pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$nz^n = z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z^3 + z^2 + z + 1. \tag{E_n}$$

1. Résoudre les équations (E_1) et (E_2).
2. Déterminer un nombre $u \in \mathbb{C}$ solution de (E_n) pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.
3. (a) Montrer que l'équation (E_3) est équivalente à

   $$(z-u)(az^2+bz+c) = 0$$

   où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ sont trois nombres à déterminer.

   (b) Résoudre l'équation (E_3).

Pour la suite du problème, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^\star$.

4. Dans cette question, on fixe $z \in \mathbb{C} \setminus \{u\}$ une solution de l'équation (E_n) et on suppose que $|z| > 1$.

   (a) Montrer que :
   $$|z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z^3 + z^2 + z + 1| < n|z|^n.$$

   (b) Que peut-on en déduire ?

5. Dans cette question, on fixe $z \in \mathbb{C} \setminus \{u\}$ une solution de l'équation (E_n) et on suppose que $|z| = 1$. On note θ un argument de z.

   (a) Montrer que :
   $$ne^{in\theta} = \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)} e^{i(n-1)\theta/2}.$$

   (b) En déduire que :

   $$ne^{i(n+1)\theta/2} = \frac{1}{\tan(\theta/2)} \sin((n+1)\theta/2) - \cos((n+1)\theta/2).$$

   (c) Montrer que θ est nul modulo $2\pi/(n+1)$ et aboutir à une absurdité.

6. Que peut-on conclure des questions 2, 4 et 5 ?

Exercice 2

Résoudre les équations et les inéquations suivantes d'inconnue x réelle.

(I_1) $|x^2+3x+1| \geqslant |2x+3|$

(I_2) $x^{(x^3)} \geqslant x^{4x}$

(I_3) $\left\lfloor x+\sqrt{2x+3} \right\rfloor = 4$

(I_4) $6\sin^2(x)+2 \geqslant 7\sin(x)$

(I_5) $\dfrac{2x+m}{x+3} \geqslant 1$ où $m \in \mathbb{R}$ est un paramètre fixé.

Problème 2

On dit qu'une fonction réelle f est lipschitzienne sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ s'il existe une constante $K \geqslant 0$ telle que :

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x)-f(y)| \leqslant K|x-y|.$$

1. On rappelle qu'une fonction affine est une fonction de la forme $g : x \mapsto \alpha x+\beta$ où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer que la fonction $g : x \mapsto 3x-2$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
   (b) Plus généralement, montrer que toute fonction affine est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Montrer que la fonction $h_{-1} : x \mapsto 1/x$ est lipschitzienne sur $[1,+\infty[$.
   (b) i. Montrer que si la fonction $h_{-1} : x \mapsto 1/x$ est lipschitzienne sur $]0,1]$ alors :
   $$\exists K>0,\ \forall x \in]0,1[,\ Kx \geqslant 1.$$
   ii. Que peut-on en déduire ?
   (c) La fonction $h_{-1} : x \mapsto 1/x$ est-elle lipschitzienne sur $]0,+\infty[$? Justifier.
3. (a) Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs la négation de «f est lipschitzienne sur I».
   (b) Montrer que la fonction $h_{1/2} : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0,1]$. (Indication : on pourra étudier ce qu'il se passe pour $y=0$).
   (c) La fonction $h_2 : x \mapsto x^2$ est-elle lipschitzienne sur $\mathbb{R}$? Justifier.
4. Soit f une fonction réelle définie sur un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$ (où $a<b$). Le but de cette question est de démontrer que si f est lipschitzienne sur $[a,b]$ alors f est bornée sur $[a,b]$, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes $(m,M) \in \mathbb{R}^2$ telles que $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in [a,b]$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall x \in [a,b], \quad |f(x)| \leqslant |f(x)-f(a)|+|f(a)| \quad \text{et} \quad |x-a| \leqslant (b-a).$$
   (b) Conclure.
   (c) À l'aide d'un exemple précédent, que peut-on dire de la réciproque ? Justifier.
5. Le but de cette question est de démontrer que la somme de deux fonctions lipschitziennes sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est aussi lipschitzienne sur I. Pour cela, on fixe deux fonctions f_1 et f_2 lipschitziennes sur I. Montrer que f_1+f_2 est lipschitzienne sur I.
6. À l'aide d'exemples précédents, que peut-on dire de l'assertion «le produit de deux fonctions lipschitziennes sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est aussi lipschitzienne sur I» ? Justifier.

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_0 = 1 = u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 2(u_{n+1}-2u_n).$$

Montrer qu'il existe $(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout entier $n \geqslant 0$ on a $u_n = \rho^n \cos(n\theta)$.

Corrigé du DS n° 1 de mathématiques

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+5}{x-2}$. Déterminer les ensembles suivants :

$$\mathscr{E}_1 = \Big\{ f(x) \mid x \in]-7,1[\Big\} \quad \textit{et} \quad \mathscr{E}_2 = \Big\{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in [12,14[\Big\}.$$

▶ La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \quad f'(x) = \frac{2x(x-2)-(x^2+5)\times 1}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}.$$

On reconnaît au numérateur un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-5) = 36 > 0$. Donc le numérateur s'annule en $(4+\sqrt{36})/2 = 5$ et en $(4-\sqrt{36})/2 = -1$. De plus, il est strictement négatif sur $]-1,5[$ et strictement positif sur $]-\infty,-1[\cup]5,+\infty[$. Puisque $(x-2)^2 > 0$ pour tout $x \neq 2$, on en déduit le tableau des variations de f.

x	$-\infty$		-7		-1		1		2		3		$6-\sqrt{7}$		5		$6+\sqrt{7}$		11		$+\infty$
$f'(x)$				$+$	0	$-$			$\Vert$			$-$			0			$+$			
$f(x)$	$-\infty$		-6		-2		-6		$-\infty \Vert +\infty$		14		12		10		12		14		$+\infty$

car :

$$\begin{array}{l|l|l}
\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\frac{5}{x}}{1-\frac{2}{x}} = -\infty & \displaystyle f(-1) = \frac{(-1)^2+5}{-1-2} = -2 & \displaystyle\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{x^2+5}{x-2} = -\infty \\
\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\frac{5}{x}}{1-\frac{2}{x}} = +\infty & \displaystyle f(5) = \frac{5^2+5}{5-2} = 10 & \displaystyle\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} \frac{x^2+5}{x-2} = +\infty
\end{array}$$

On a $f(-7) = \dfrac{(-7)^2+5}{-7-2} = -6$ et $f(1) = \dfrac{1^2+5}{1-2} = -6$. On déduit du tableau des variations de f que :

$$\mathscr{E}_1 = \Big\{ f(x) \mid x \in]-7,1[\Big\} = \boxed{]-6,-2]}.$$

Soyez précis avec les bornes des intervalles : -6 est exclus car $]-7,1[$ est un intervalle ouvert mais -2 est inclus car $-1 \in]-7,1[$.

Pour déterminer $\mathscr{E}_2$, on résout les deux équations suivantes :

- $f(x)=12 \iff \dfrac{x^2+5}{x-2}=12 \iff x^2+5=12(x-2) \iff x^2-12x+29=0$
  On obtient une équation du second degré de discriminant $\Delta=(-12)^2-4\times 29=28>0$ qui admet pour solutions $x=(12+\sqrt{28})/2=(12+2\sqrt{7})/2=6+\sqrt{7}$ et $x=6-\sqrt{7}$.
- $f(x)=14 \iff \dfrac{x^2+5}{x-2}=14 \iff x^2+5=14(x-2) \iff x^2-14x+33=0$
  On obtient une équation du second degré de discriminant $\Delta=(-14)^2-4\times 33=64>0$ qui admet pour solutions $x=(14+\sqrt{64})/2=(14+8)/2=11$ et $x=(14-8)/2=3$.

On déduit du tableau des variations de f que :

$$\mathscr{E}_2=\left\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)\in[12,14[\right\}=\boxed{\left]3,6-\sqrt{7}\right]\cup\left[6+\sqrt{7},11\right[}.$$

Problème 1

Ce problème propose d'étudier pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$ l'équation suivante d'inconnue $z\in\mathbb{C}$:

$$nz^n=z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z^3+z^2+z+1. \qquad (E_n)$$

1. *Résoudre les équations (E_1) et (E_2).*
   ▶ On a :
   $$(E_1)\iff 1z^1=z^0\iff \boxed{z=1}$$
   et :
   $$(E_2)\iff 2z^2=z^1+z^0\iff 2z^2-z-1=0.$$
   On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta=(-1)^2-4\times 2\times(-1)=9>0$. D'où :
   $$(E_2)\iff\left(z=\frac{1+\sqrt{9}}{2\times 2}\text{ ou }z=\frac{1-\sqrt{9}}{2\times 2}\right)\iff\boxed{z=1\text{ ou }z=-\frac{1}{2}}.$$

2. *Déterminer un nombre $u\in\mathbb{C}$ solution de (E_n) pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$.*
   ▶ Soit $n\in\mathbb{N}^\star$. On a :
   $$\underbrace{1^{n-1}+1^{n-2}+\cdots+1^3+1^2+1+1}_{n\text{ termes}}=\underbrace{1+1+\cdots+1+1+1+1}_{n\text{ termes}}=n=n\times 1^n.$$
   Ainsi le nombre $\boxed{u=1}$ est solution de (E_n) pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$.

3. (a) *Montrer que l'équation (E_3) est équivalente à*
   $$(z-u)(az^2+bz+c)=0$$
   où $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ sont trois nombres à déterminer.
   ▶ D'après le résultat de la question précédente, on cherche trois nombres $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tels que :
   $$(E_3)\iff(z-1)(az^2+bz+c)=0.$$
   - Analyse. On a :
     $$(E_3)\iff 3z^3=z^2+z^1+z^0\iff 3z^3-z^2-z-1=0$$
     et :
     $$(z-1)(az^2+bz+c)=0\iff az^3+(b-a)z^2+(c-b)z-c=0.$$
     En identifiant les coefficients, il suffit de choisir $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tels que :
     $$\begin{cases}a=3\\ b-a=-1\\ c-b=-1\\ -c=-1\end{cases}\iff\begin{cases}a=3\\ b=-1+a=2\\ c=-1+b=1\\ c=1\end{cases}.$$

- Synthèse. On pose $\boxed{(a,b,c)=(3,2,1)}$. En reprenant les calculs effectués en analyse, on a :

$$\begin{aligned}(z-1)(az^2+bz+c)=0 &\iff az^3+(b-a)z^2+(c-b)z-c=0\\ &\iff 3z^3-z^2-z-1=0 \iff (E_3).\end{aligned}$$

On a donc bien montré que (E_3) est équivalente à $\boxed{(z-1)(3z^2+2z+1)=0}$.

(b) Résoudre l'équation (E_3).

▶ On a d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned}(E_3) &\iff (z-1)(3z^2+2z+1)=0\\ &\iff \Big(z-1=0 \text{ ou } 3z^2+2z+1=0\Big) \quad \text{d'après l'intégrité de la multiplication.}\end{aligned}$$

On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta = 2^2-4\times 3 = -8 < 0$. L'équation $3z^2+2z+1=0$ admet donc pour solutions $z=(-2+i\sqrt{8})/6=(-1+i\sqrt{2})/3$ et $z=(-1-i\sqrt{2})/3$. Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E_3) est :

$$\boxed{\left\{1, -\frac{1}{3}+i\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3}-i\frac{\sqrt{2}}{3}\right\}}.$$

Pour la suite du problème, on fixe un entier $n\in\mathbb{N}^\star$.

4. Dans cette question, on fixe $z\in\mathbb{C}\setminus\{u\}$ une solution de l'équation (E_n) et on suppose que $|z|>1$.

(a) Montrer que :

$$|z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z^3+z^2+z+1| < n|z|^n.$$

▶ On a :

$$\begin{aligned}&|z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z^2+z+1|\\ \leqslant&|z^{n-1}|+|z^{n-2}|+\cdots+|z^2|+|z|+|1| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire}\\ =&|z|^{n-1}+|z|^{n-2}+\cdots+|z|^2+|z|+1\\ <&|z|^{n-1}\times|z|+|z|^{n-2}\times|z|^2+\cdots+|z|^2\times|z|^{n-2}+|z|\times|z|^{n-1}+1\times|z|^n \quad \text{car } |z|>1\\ =&|z|^n+|z|^n+\cdots+|z|^n+|z|^n+|z|^n\\ =&n|z|^n.\end{aligned}$$

On a donc bien montré que :

$$\boxed{|z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z^3+z^2+z+1| < n|z|^n}.$$

(b) Que peut-on en déduire ?

▶ En reprenant le résultat de la question précédente, on a :

$$n|z|^n > |\underbrace{z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z^3+z^2+z+1}_{=nz^n \quad \text{car } z \text{ est solution de } (E_n)}| = |nz^n| = n|z|^n \quad \text{ce qui est absurde.}$$

Par conséquent, nous venons de démontrer par l'absurde que si $z\in\mathbb{C}\setminus\{u\}$ est une solution de l'équation (E_n) alors $\boxed{|z|\leqslant 1}$.

5. Dans cette question, on fixe $z\in\mathbb{C}\setminus\{u\}$ une solution de l'équation (E_n) et on suppose que $|z|=1$. On note θ un argument de z.

(a) Montrer que :

$$ne^{in\theta} = \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)} e^{i(n-1)\theta/2}.$$

▶ Puisque $|z| = 1$ et $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$, on a : $z = e^{i\theta}$. En réinjectant cette expression dans l'équation (E_n), on obtient :

$$\begin{aligned}
n(e^{i\theta})^n &= (e^{i\theta})^{n-1} + (e^{i\theta})^{n-2} + \dots + (e^{i\theta})^3 + (e^{i\theta})^2 + e^{i\theta} + 1 \\
\text{donc} \quad ne^{in\theta} &= \underbrace{(e^{i\theta})^{n-1} + (e^{i\theta})^{n-2} + \dots + (e^{i\theta})^3 + (e^{i\theta})^2 + (e^{i\theta})^1 + (e^{i\theta})^0}_{\text{somme des termes d'une suite géométrique de raison } e^{i\theta} = z \neq u = 1} \\
&= \frac{(e^{i\theta})^n - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{in\theta} - e^{i0}}{e^{i\theta} - e^{i0}} \\
&= \frac{2i\sin((n\theta - 0)/2)e^{i(n\theta+0)/2}}{2i\sin((\theta - 0)/2)e^{i(\theta+0)/2}} \quad \text{à l'aide d'une factorisation par l'angle moitié} \\
&= \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)} e^{i(n\theta/2 - \theta/2)} = \boxed{\frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)} e^{i(n-1)\theta/2}}.
\end{aligned}$$

Pensez à justifier que la raison est différente de 1 avant d'appliquer la formule de la somme des termes d'une suite géométrique.

$$q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^n = \begin{cases} \frac{q^{n+1}-1}{q-1} & si\ q \neq 1 \\ n+1 & si\ q = 1 \end{cases}$$

(b) En déduire que :

$$ne^{i(n+1)\theta/2} = \frac{1}{\tan(\theta/2)} \sin((n+1)\theta/2) - \cos((n+1)\theta/2).$$

▶ On a :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\tan(\theta/2)} \sin((n+1)\theta/2) - \cos((n+1)\theta/2) \\
=&\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \sin(n\theta/2 + \theta/2) - \cos(n\theta/2 + \theta/2) \quad \text{d'après le théorème de Thalès} \\
=&\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\Big(\cos(n\theta/2)\sin(\theta/2) + \sin(n\theta/2)\cos(\theta/2)\Big) - \Big(\cos(n\theta/2)\cos(\theta/2) - \sin(n\theta/2)\sin(\theta/2)\Big) \\
&\qquad \text{d'après les formules d'addition de sinus et cosinus} \\
=&\cos(n\theta/2)\cos(\theta/2) + \sin(n\theta/2)\frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} - \cos(n\theta/2)\cos(\theta/2) + \sin(n\theta/2)\sin(\theta/2) \\
=&\sin(n\theta/2)\frac{\cos^2(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} + \frac{\sin^2(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} = \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\Big(\underbrace{\cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2)}_{=1}\Big) \\
=&\frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \quad \text{d'après le théorème de Pythagore} \\
=&\frac{ne^{in\theta}}{e^{i(n-1)\theta/2}} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
=&ne^{i(n\theta-(n-1)\theta/2)} = ne^{i(n+1)\theta/2}.
\end{aligned}$$

Finalement, on a bien montré que :

$$\boxed{ne^{i(n+1)\theta/2} = \frac{1}{\tan(\theta/2)} \sin((n+1)\theta/2) - \cos((n+1)\theta/2)}.$$

(c) *Montrer que θ est nul modulo $2\pi/(n+1)$ et aboutir à une absurdité.*

▶ On déduit du résultat de la question précédente que $ne^{i(n+1)\theta/2}$ est un nombre réel, donc que son argument $(n+1)\theta/2$ est nul modulo π. Autrement dit, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$(n+1)\frac{\theta}{2} = 0 + k\pi \quad \text{donc} \quad \theta = 0 + k\frac{2\pi}{n+1}.$$

Ainsi, on a bien montré que $\boxed{\theta \text{ est nul modulo } 2\pi/(n+1)}$. En reportant $\theta = 2k\pi/(n+1)$ dans le résultat de la question précédente, on obtient :

$$ne^{ik\pi} = \frac{1}{\tan(k\pi/(n+1))}\sin(k\pi) - \cos(k\pi).$$

Or $e^{ik\pi} = (-1)^k$, $\sin(k\pi) = 0$ et $\cos(k\pi) = (-1)^k$ d'après le cercle trigonométrique. Donc :

$$n(-1)^k = 0 - (-1)^k = -(-1)^k.$$

En divisant par $(-1)^k \neq 0$, on en déduit que $n = -1$ ce qui est $\boxed{\text{absurde}}$.

6. *Que peut-on conclure des questions 2, 4 et 5 ?*

▶ On a montré à la question 2 que $u = 1$ est solution de l'équation (E_n) et à la question 4 que les autres solutions sont de module inférieur ou égal à 1. À la question 5, nous venons de démontrer par l'absurde que si $z \in \mathbb{C} \setminus \{u\}$ est une solution de l'équation (E_n) alors $|z| \neq 1$. Finalement, nous avons démontré que

$$\boxed{\text{toutes les solutions de l'équation } (E_n) \text{ sont de module strictement inférieur à 1, sauf la solution } u = 1.}$$

Exercice 2

Résoudre les équations et les inéquations suivantes d'inconnue x réelle.

(I_1) $|x^2+3x+1| \geqslant |2x+3|$

▶ L'inéquation (I_1) est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. On reconnaît à gauche de l'inéquation un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 3^2 - 4 = 5 > 0$. L'équation $x^2+3x+1 = 0$ admet donc pour solutions $x = (-3+\sqrt{5})/2$ et $x = (-3-\sqrt{5})/2$. De l'autre côté de l'inéquation, on a : $2x+3 \geqslant 0 \iff x \geqslant -3/2$. De plus, $(-3+\sqrt{5})/2 > -1/2 > -3/2$ et $(-3-\sqrt{5})/2 < -5/2 < -3/2$ (car $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$). On obtient donc le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^2+3x+1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$2x+3$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	

- <u>1er cas</u> : $x \in]-\infty, (-3-\sqrt{5})/2]$. Alors :

$$\begin{aligned}(I_1) &\iff x^2+3x+1 \geqslant -(2x+3)\\ &\iff x^2+5x+4 \geqslant 0.\end{aligned}$$

On reconnaît une inéquation du second degré de discriminant $\Delta = 5^2 - 4\times 4 = 9 > 0$. L'équation $x^2+5x+4 = 0$ admet donc pour solutions $x = (-5+\sqrt{9})/2 = -1$ et $x = (-5-\sqrt{9})/2 = -4$. Or $(-3+\sqrt{5})/2 > -1/2 > -1$ (car $\sqrt{5} > \sqrt{4} = 2$) et $(-3-\sqrt{5})/2 > -3 > -4$ (car $\sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$).

x	$-\infty$		-4		$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$		$-\frac{3}{2}$		-1		$\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
x^2+5x+4		$+$	0	$-$	$\vdots$	$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$	

On en déduit, dans le cas où $x \in]-\infty,(-3-\sqrt{5})/2]$, que :

$$(I_1) \iff x \in \left]-\infty,-4\right].$$

- 2ᵉ cas : $x \in](-3-\sqrt{5})/2,-3/2]$. Alors :

$$\begin{aligned}(I_1) &\iff -(x^2+3x+1) \geqslant -(2x+3)\\ &\iff x^2+x-2 \leqslant 0.\end{aligned}$$

On reconnaît une inéquation du second degré de discriminant $\Delta = 1-4\times(-2) = 9 > 0$. L'équation $x^2+x-2=0$ admet donc pour solutions $x=(-1+\sqrt{9})/2 = 1$ et $x=(-1-\sqrt{9})/2 = -2$. Or $(-3+\sqrt{5})/2 < 0 < 1$ (car $\sqrt{5}<\sqrt{9}=3$) et $(-3-\sqrt{5})/2 < -5/2 < -2$ (car $\sqrt{5}>\sqrt{4}=2$).

x	$-\infty$		$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$		-2		$-\frac{3}{2}$		$\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$		1		$+\infty$
x^2+x-2		$+$	$\vdots$	$+$	0	$-$	$\vdots$	$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$	

On en déduit, dans le cas où $x \in](-3-\sqrt{5})/2,-3/2]$, que :

$$(I_1) \iff x \in \left[-2,-\frac{3}{2}\right].$$

- 3ᵉ cas : $x \in]-3/2,(-3+\sqrt{5})/2]$. Alors :

$$\begin{aligned}(I_1) &\iff -(x^2+3x+1) \geqslant 2x+3\\ &\iff x^2+5x+4 \leqslant 0.\end{aligned}$$

En reprenant l'étude du 1ᵉʳ cas, on en déduit, dans le cas où $x \in]-3/2,(-3+\sqrt{5})/2]$, que :

$$(I_1) \iff x \in \left]-\frac{3}{2},-1\right].$$

- 4ᵉ cas : $x \in](-3+\sqrt{5})/2,+\infty[$. Alors :

$$\begin{aligned}(I_1) &\iff x^2+3x+1 \geqslant 2x+3\\ &\iff x^2+x-2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

En reprenant l'étude du 2ᵉ cas, on en déduit, dans le cas où $x \in](-3+\sqrt{5})/2,+\infty[$, que :

$$(I_1) \iff x \in \left[1,+\infty\right[.$$

- Conclusion. Finalement, l'ensemble des solutions de (I_1) est :

$$\left]-\infty,-4\right] \cup \left[-2,-\frac{3}{2}\right] \cup \left]-\frac{3}{2},-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[= \boxed{\left]-\infty,-4\right] \cup [-2,-1] \cup \left[1,+\infty\right[}.$$

Il est également possible de résoudre (I_1) en utilisant la croissance de la fonction carrée sur $[0,+\infty[$ pour se débarasser des valeurs absolues :

$$\begin{aligned}(I_1) &\iff \left(x^2+3x+1\right)^2 \geqslant (2x+3)^2\\ &\iff \left(x^2+3x+1\right)^2 - (2x+3)^2 \geqslant 0\\ &\iff \Big(\left(x^2+3x+1\right)+(2x+3)\Big)\Big(\left(x^2+3x+1\right)-(2x+3)\Big) \geqslant 0\\ &\iff \left(x^2+5x+4\right)\left(x^2+x-2\right) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Puis il suffit d'étudier le signe de la fonction $f : x \mapsto (x^2+5x+4)(x^2+x-2)$.

(I_2) $x^{(x^3)} \geqslant x^{4x}$

▶ Puisque les exposants x^3 et $4x$ sont des nombres réels, on a d'après la définition des puissances :

$$x^{(x^3)} = \exp\left(x^3\ln(x)\right) \quad \text{et} \quad x^{4x} = \exp\left(4x\ln(x)\right).$$

Ainsi l'inéquation (I_2) est bien définie seulement pour $x > 0$ et on a :

$$\begin{aligned}(I_2) &\iff \exp\left(x^3\ln(x)\right) \geqslant \exp\left(4x\ln(x)\right)\\ &\iff x^3\ln(x) \geqslant 4x\ln(x) \quad \text{car la fonction exp est strictement croissante}\\ &\iff \left(x^3-4x\right)\ln(x) \geqslant 0\\ &\iff x\left(x^2-4\right)\ln(x) \geqslant 0.\end{aligned}$$

On étudie le signe de la fonction $f : x \mapsto x(x^2-4)\ln(x) = x(x+2)(x-2)\ln(x)$ sur $]0,+\infty[$.

x	0		1		2		$+\infty$
$x(x+2)$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que l'ensemble des solutions de (I_2) est $\boxed{]0,1] \cup [2,+\infty[}$.

(I_3) $\left\lfloor x+\sqrt{2x+3}\right\rfloor = 4$

▶ L'inéquation (I_3) est bien définie seulement pour $2x+3 \geqslant 0 \iff x \geqslant -3/2$. D'après la définition de la partie entière, on a :

$$(I_3) \iff 4 \leqslant x+\sqrt{2x+3} < 5 \iff \Big(\underbrace{\sqrt{2x+3} \geqslant 4-x}_{1^{\text{re}}\text{ inéquation}} \text{ et } \underbrace{\sqrt{2x+3} < 5-x}_{2^{\text{e}}\text{ inéquation}}\Big).$$

Attention avant d'élever au carré pour simplifier la racine : il faut d'abord isoler la racine d'un côté de l'inéquation (sinon elle ne se simplifie pas) puis vérifier que l'autre côté de l'inéquation est positif pour pouvoir utiliser la croissance de la fonction carrée sur $[0,+\infty[$.

- 1^{re} inéquation. On a : $4-x \geqslant 0 \iff x \leqslant 4$.
  — *1^{er}cas* : $x \in [-3/2,4]$. Alors :

$$\begin{aligned}\sqrt{2x+3} \geqslant 4-x &\iff 2x+3 \geqslant (4-x)^2\\ &\qquad \text{car la fonction carrée est strictement croissante sur } [0,+\infty[\\ &\iff 2x+3 \geqslant 16-8x+x^2\\ &\iff x^2-10x+13 \leqslant 0.\end{aligned}$$

On reconnaît une inéquation du second degré de discriminant $\Delta = (-10)^2-4\times 13 = 48 > 0$. L'équation $x^2-10x+13=0$ admet donc pour solutions $x = (10+\sqrt{48})/2 = 5+2\sqrt{3}$ et $x = 5-2\sqrt{3}$. Or $5-2\sqrt{3} > 1 > -3/2$ (car $\sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$) et $5-2\sqrt{3} < 3 < 4$ (car $\sqrt{3} > \sqrt{1} = 1$).

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$5-2\sqrt{3}$		4		$5+2\sqrt{3}$		$+\infty$
$x^2-10x+13$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

On en déduit, dans le cas où $x \in [-3/2, 4]$, que :

$$\sqrt{2x+3} \geqslant 4-x \iff x \in \left[5-2\sqrt{3}, 4\right].$$

— *2ᵉ cas* : $x \in]4, +\infty[$. Alors $\sqrt{2x+3} \geqslant 4-x$ est toujours vraie car $\sqrt{2x+3} \geqslant 0 > 4-x$.

— *Conclusion de la 1ʳᵉ inéquation.* On en déduit que :

$$\sqrt{2x+3} \geqslant 4-x \iff x \in \left[5-2\sqrt{3}, 4\right] \cup]4, +\infty[= \boxed{\left[5-2\sqrt{3}, +\infty\right[}.$$

- 2ᵉ inéquation. On a : $5-x \geqslant 0 \iff x \leqslant 5$.

— *1ᵉʳ cas* : $x \in [-3/2, 5]$. Alors :

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x+3} < 5-x &\iff 2x+3 < (5-x)^2 \\
& \text{car la fonction carrée est strictement croissante sur } [0, +\infty[\\
&\iff 2x+3 < 25-10x+x^2 \\
&\iff x^2-12x+22 > 0.
\end{aligned}$$

On reconnaît une inéquation du second degré de discriminant $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 22 = 56 > 0$. L'équation $x^2-12x+22 = 0$ admet donc pour solutions $x = (12+\sqrt{56})/2 = 6+\sqrt{14}$ et $x = 6-\sqrt{14}$. Or $6-\sqrt{14} > 2 > -3/2$ (car $\sqrt{14} < \sqrt{16} = 4$) et $6-\sqrt{14} < 3 < 5$ (car $\sqrt{14} > \sqrt{9} = 3$).

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$6-\sqrt{14}$		5		$6+\sqrt{14}$		$+\infty$
$x^2-12x+22$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

On en déduit, dans le cas où $x \in [-3/2, 5]$, que :

$$\sqrt{2x+3} < 5-x \iff x \in \left[-\frac{3}{2}, 6-\sqrt{14}\right[.$$

— *2ᵉ cas* : $x \in]5, +\infty[$. Alors $\sqrt{2x+3} < 5-x$ n'est jamais vraie car $\sqrt{2x+3} \geqslant 0 > 5-x$.

— *Conclusion de la 2ᵉ inéquation.* On en déduit que :

$$\sqrt{2x+3} < 5-x \iff x \in \boxed{\left[-\frac{3}{2}, 6-\sqrt{14}\right[}.$$

- Conclusion. On a $5-2\sqrt{3} < 5-2 \times 3/2 = 2$ (car $\sqrt{3} = \sqrt{9/3} > \sqrt{9/4} = 3/2$) et $6-\sqrt{14} > 2$ (car $\sqrt{14} < \sqrt{16} = 4$). Donc $5-2\sqrt{3} < 6-\sqrt{14}$. On en déduit que l'ensemble des solutions (I_3) est :

$$\left[5-2\sqrt{3}, +\infty\right[\cap \left[-\frac{3}{2}, 6-\sqrt{14}\right[= \boxed{\left[5-2\sqrt{3}, 6-\sqrt{14}\right[}.$$

(I_4) $6\sin^2(x)+2 \geqslant 7\sin(x)$

▶ L'inéquation (I_4) est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = \sin(x)$. Alors :

$$(I_4) \iff 6X^2+2 \geqslant 7X \iff 6X^2-7X+2 \geqslant 0.$$

On reconnaît une inéquation du second degré de discriminant $\Delta = (-7)^2 - 4 \times 6 \times 2 = 1 > 0$. Par conséquent, l'équation $6X^2-7X+2 = 0$ admet pour solutions $X = (7+\sqrt{1})/12 = 2/3$ et $X = (7-\sqrt{1})/12 = 1/2$. On en déduit que :

$$(I_4) \iff \left(X \leqslant \frac{1}{2} \text{ ou } X \geqslant \frac{2}{3}\right) \iff \left(\sin(x) \leqslant \frac{1}{2} \text{ ou } \sin(x) \geqslant \frac{2}{3}\right).$$

D'après le cercle trigonométrique, on obtient :

$$\sin(x) \leqslant \frac{1}{2} \iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[0+2k\pi, \frac{\pi}{6}+2k\pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}+2k\pi, 2\pi+2k\pi\right] \right)$$
$$\sin(x) \geqslant \frac{2}{3} \iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)+2k\pi, \pi-\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)+2k\pi\right]$$

On peut aussi écrire le premier ensemble sous la forme plus simple :

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[0+2k\pi, \tfrac{\pi}{6}+2k\pi\right] \cup \left[\tfrac{5\pi}{6}+2k\pi, 2\pi+2k\pi\right] \right) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\tfrac{5\pi}{6}+2k\pi, \tfrac{13\pi}{6}+2k\pi\right].$$

Le plus important est de savoir utiliser le cercle trigonométrique pour résoudre des inéquations et de savoir écrire des ensembles à l'aide d'une grande union.

On en déduit que l'ensemble des solutions de (I_4) est :

$$\boxed{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[2k\pi, \frac{\pi}{6}+2k\pi\right] \cup \left[\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)+2k\pi, \pi-\arcsin\left(\frac{2}{3}\right)+2k\pi\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}+2k\pi, 2(k+1)\pi\right] \right)}.$$

(I_5) $\dfrac{2x+m}{x+3} \geqslant 1$ *où* $m \in \mathbb{R}$ *est un paramètre fixé.*

▶ L'inéquation (I_5) est bien définie seulement pour $x+3 \neq 0 \iff x \neq -3$. On a :

$$\begin{aligned}(I_5) &\iff \frac{2x+m}{x+3} - 1 \geqslant 0\\ &\iff \frac{2x+m-(x+3)}{x+3} \geqslant 0\\ &\iff \frac{x+(m-3)}{x+3} \geqslant 0.\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{cases} x+(m-3) \geqslant 0 \iff x \geqslant -(m-3) = 3-m \\ x+3 \geqslant 0 \iff x \geqslant -3. \end{cases}$$

- 1^{er} cas : $3-m < -3 \iff m > 6$. On obtient alors le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		$3-m$		-3		$+\infty$
$x+(m-3)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+(m-3)}{x+3}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

  On en déduit, dans le cas où $m > 6$, que :

$$(I_5) \iff]-\infty, 3-m] \cup]-3, +\infty[.$$

- 2^{e} cas : $3-m = -3 \iff m = 6$. Alors (I_5) est toujours vraie car :

$$\frac{x+(m-3)}{x+3} = 1 > 0.$$

- 3^{e} cas : $3-m > -3 \iff m < 6$. On obtient alors le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		-3		$3-m$		$+\infty$
$x+(m-3)$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x+(m-3)}{x+3}$		$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	

On en déduit, dans le cas où $m < 6$, que :

$$(I_5) \iff]-\infty,-3[\cup[3-m,+\infty[.$$

- Conclusion. Finalement, l'ensemble des solutions de (I_5) est :

$$\boxed{\begin{cases}]-\infty,3-m]\cup]-3,+\infty[& \text{si } m>6 \\ \mathbb{R}\setminus\{-3\} & \text{si } m=6 \\ ]-\infty,-3[\cup[3-m,+\infty[& \text{si } m<6 \end{cases}}.$$

Problème 2

On dit qu'une fonction réelle f est lipschitzienne sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ s'il existe une constante $K \geqslant 0$ telle que :

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x)-f(y)| \leqslant K|x-y|.$$

1. *On rappelle qu'une fonction affine est une fonction de la forme $g : x \mapsto \alpha x+\beta$ où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$.*

   (a) *Montrer que la fonction $g : x \mapsto 3x-2$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.*

   ▶ On cherche une constante $K \geqslant 0$ telle que :

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |g(x)-g(y)| \leqslant K|x-y|.$$

   On raisonne par analyse-synthèse.

   - Analyse. Soit $(x,y)\mathbb{R}^2$. On a :

   $$|g(x)-g(y)| = |(3x-2)-(3y-2)| = |3x-3y| = |3(x-y)| = 3|x-y| \quad \text{car } 3>0.$$

   - Synthèse. On pose $\boxed{K=3}$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En reprenant les calculs de l'analyse, on a :

   $$|g(x)-g(y)| = 3|x-y| = K|x-y|.$$

   On a donc bien trouvé une constante $K \geqslant 0$ telle que :

   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |g(x)-g(y)| \leqslant K|x-y|.$$

   On en déduit bien que $\boxed{\text{la fonction } g : x \mapsto 3x-2 \text{ est lipschitzienne sur } \mathbb{R}}$.

   (b) *Plus généralement, montrer que toute fonction affine est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.*

   ▶ Soit $g : x \mapsto \alpha x+\beta$ une fonction affine où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :

   $$|g(x)-g(y)| = |(\alpha x+\beta)-(\alpha y+\beta)| = |\alpha x-\alpha y| = |\alpha(x-y)| = |\alpha||x-y|.$$

   En raisonnant comme dans la question précédente en posant $\boxed{K=|\alpha| \geqslant 0}$, on obtient que la fonction $g : x \mapsto \alpha x+\beta$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Puisque ceci est vrai pour toute fonction affine $g : x \mapsto \alpha x+\beta$, on en déduit bien que $\boxed{\text{toute fonction affine est lipschitzienne sur } \mathbb{R}}$.

2. (a) *Montrer que la fonction $h_{-1} : x \mapsto 1/x$ est lipschitzienne sur $[1,+\infty[$.*

▶ On cherche une constante $K \geqslant 0$ telle que :

$$\forall (x,y) \in [1,+\infty[, \quad |h_{-1}(x) - h_{-1}(y)| \leqslant K|x-y|.$$

On raisonne par analyse-synthèse.

- Analyse. Soit $(x,y) \in [1,+\infty[^2$. On a :

$$|h_{-1}(x) - h_1(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y}{xy} - \frac{x}{xy}\right| = \left|\frac{y-x}{xy}\right| = \frac{|y-x|}{|xy|} = \frac{|x-y|}{xy} \quad \text{car} \begin{cases} x \geqslant 1 > 0 \\ y \geqslant 1 > 0 \end{cases}.$$

Or $\frac{1}{xy} \leqslant 1$ car $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 1$.

- Synthèse. On pose $\boxed{K = 1}$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. En reprenant les calculs de l'analyse, on a :

$$|h_{-1}(x) - h_{-1}(y)| = \frac{|x-y|}{xy} \leqslant |x-y| = K|x-y| \quad \text{car } x \geqslant 1 \text{ et } y \geqslant 1.$$

On a donc bien trouvé une constante $K \geqslant 0$ telle que :

$$\forall (x,y) \in [1,+\infty[^2, \quad |h_{-1}(x) - h_{-1}(y)| \leqslant K|x-y|.$$

On en déduit bien que $\boxed{\text{la fonction } h_{-1} : x \mapsto 1/x \text{ est lipschitzienne sur } [1,+\infty[}$.

(b) i. *Montrer que si la fonction $h_{-1} : x \mapsto 1/x$ est lipschitzienne sur $]0,1]$ alors :*

$$\exists K > 0,\ \forall x \in]0,1[,\ Kx \geqslant 1.$$

▶ On suppose que la fonction $h_{-1} : x \mapsto 1/x$ est lipschitzienne sur $]0,1]$ et on cherche une constante $K > 0$ telle que :

$$\forall x \in]0,1[, \quad Kx \geqslant 1.$$

On raisonne par analyse-synthèse.

- Analyse. Puisqu'on a supposé que $h_{-1} : x \mapsto 1/x$ est lipschitzienne sur $]0,1]$, on sait qu'il existe une constante $K' \geqslant 0$ telle que :

$$\forall (x,y) \in]0,1]^2, \quad |h_{-1}(x) - h_{-1}(y)| \leqslant K'|x-y|.$$

Attention : la constante K' fournie par la définition du fait que h_{-1} est lipschitzienne sur $]0,1]$ est a priori différente de la constante K cherchée. Pour éviter de s'embrouiller, il est donc utile de lui donner un autre nom (par exemple K', mais n'importe quel nom de variable différent de K convient).

Soit $(x,y) \in]0,1]^2$. On a en reprenant les calculs de la question précédente :

$$|h_{-1}(x) - h_{-1}(y)| = \frac{|x-y|}{xy} \quad \text{donc} \quad \frac{|x-y|}{xy} \leqslant K'|x-y|.$$

Attention : pour simplifier par le facteur $|x-y|$ des deux côtés de l'inégalité, il faut justifier que ce facteur est non nul. Puisque ce n'est pas toujours le cas (x peut être égal à y), il est nécessaire d'être plus spécifique dans le choix des variables x et y fixées.

Si on choisit $x \in]0,1[$ et $y = 1$, on obtient :

$$\frac{|x-1|}{x} \leqslant K'|x-1| \quad \text{donc} \quad \frac{1}{x} \leqslant K' \quad \text{car } |x-1| \neq 0 \text{ (puisque } x \neq 1).$$

On en déduit que $K'x \geqslant 1$ car $x > 0$.

- Synthèse. On pose $\boxed{K = K'}$. En reprenant les calculs de l'analyse, on a démontré que :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad Kx = K'x \geqslant 1.$$

Attention : le raisonnement n'est pas fini. Il fallait trouver une constante $K > 0$. Or la constante K' est seulement supérieure ou égale à 0.

Montrons que $K > 0$. On a déjà que $K = K' \geqslant 0$. Supposons par l'absurde que $K = 0$. Alors pour tout $x \in]0, 1[$: $0 = Kx \geqslant 1$ ce qui est absurde. Par conséquent $K > 0$. Finalement, on a bien démontré que :

$$\boxed{\exists K > 0, \quad \forall x \in]0, 1[, \quad Kx \geqslant 1}.$$

ii. Que peut-on en déduire ?

▶ On remarque que l'assertion démontrée à la question précédente est absurde. En effet, si on choisit $x \in]0, 1[$ strictement plus petit que $1/K$ on obtient :

$$1 \leqslant Kx < K\frac{1}{K} = 1 \quad \text{ce qui est absurde.}$$

On en déduit que nous avons démontré par l'absurde que $\boxed{\text{la fonction } h_{-1} : x \mapsto 1/x \text{ n'est pas lipschitzienne sur }]0, 1]}$.

(c) *La fonction $h_{-1} : x \mapsto 1/x$ est-elle lipschitzienne sur $]0, +\infty[$? Justifier.*

▶ On suppose par l'absurde que la fonction $h_{-1} : x \mapsto 1/x$ est lipschitzienne sur $]0, +\infty[$. Donc on sait qu'il existe une constante $K \geqslant 0$ telle que :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \quad |h_{-1}(x) - h_{-1}(y)| \leqslant K|x - y|.$$

En particulier, si on choisit $(x, y) \in]0, 1]^2$ (car $]0, 1] \subset]0, +\infty[$) on a trouvé une constante $K \geqslant 0$ telle que :

$$\forall (x, y) \in]0, 1]^2, \quad |h_{-1}(x) - h_{-1}(y)| \leqslant K|x - y|.$$

Cela signifie que la fonction h_{-1} est pas lipschitzienne sur $]0, 1]$ ce qui est absurde puisque nous avons démontré le contraire dans la question précédente. Par l'absurde, on peut donc en déduire que $\boxed{\text{la fonction } h_{-1} : x \mapsto 1/x \text{ n'est pas lipschitzienne sur }]0, +\infty[}$.

3. (a) *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Écrire avec des quantificateurs la négation de «f est lipschitzienne sur I».*

▶ L'assertion «f est lipschitzienne sur I» s'écrit avec des quantificateurs :

$$\exists K \geqslant 0, \quad \forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|.$$

Sa négation s'écrit donc :

$$\boxed{\forall K \geqslant 0, \quad \exists (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| > K|x - y|}.$$

(b) *Montrer que la fonction $h_{1/2} : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0, 1]$. (Indication : on pourra étudier ce qu'il se passe pour $y = 0$).*

▶ Il suffit de montrer que l'assertion obtenue à la question précédente est vérifiée. Soit $K \geqslant 0$. On cherche deux réels $(x, y) \in [0, 1]^2$ tels que :

$$|h_{1/2}(x) - h_{1/2}(y)| > K|x - y|.$$

On raisonne par analyse-synthèse.

- Analyse. Si on choisit $y = 0$, on cherche alors un réel $x \in [0, 1]$ tel que :

$$\begin{aligned} & |h_{1/2}(x) - h_{1/2}(y)| > K|x-y| \\ \iff & \left|\sqrt{x} - \sqrt{0}\right| > K|x-0| \\ \iff & \sqrt{x} > Kx \quad \text{car } x \geqslant 0. \end{aligned}$$

On remarque que $x = 0$ ne convient pas (sinon $0 > 0$ est absurde). On peut donc supposer que $x \in]0, 1]$. Alors :

$$|h_{1/2}(x) - h_{1/2}(y)| > K|x-y| \iff \sqrt{x} > Kx \iff 1 > K\frac{x}{\sqrt{x}} = K\sqrt{x}.$$

Si $K = 0$ alors $1 > K\sqrt{x} = 0$ est vrai pour tout $x \in]0, 1]$. Si $K > 0$ alors on a :

$$|h_{1/2}(x) - h_{1/2}(y)| > K|x-y| \iff 1 > K\sqrt{x} \iff \sqrt{x} < \frac{1}{K} \iff x < \frac{1}{K^2}$$

car la fonction carrée est strictement croissante.

- Synthèse. On pose $\boxed{y = 0}$. Si $K = 0$ alors on pose $\boxed{\text{n'importe quel } x \in]0, 1]}$. Si $K > 0$ alors on pose $\boxed{x \in]0, 1] \text{ strictement plus petit que } 1/K^2}$. En reprenant les calculs de l'analyse, on a :

$$|h_{1/2}(x) - h_{1/2}(y)| > K|x-y| \quad \text{car} \quad 1 > K\sqrt{x}.$$

On a donc bien trouvé deux réels $(x, y) \in [0, 1]^2$ tels que cette inégalité stricte est vraie. De plus, ceci est vrai pour tout $K \geqslant 0$. Ainsi, l'assertion obtenue à la question précédente est bien vérifiée et on peut en déduire que $\boxed{\text{la fonction } h_{1/2} : x \mapsto \sqrt{x} \text{ n'est pas lipschitzienne sur } [0,1]}$.

Plus précisément, on peut poser :

$$y = 0 \quad \text{et} \quad x = \begin{cases} 1 & \text{si } K = 0 \\ \max\{1, \frac{1}{2K^2}\} & \text{si } K > 0. \end{cases}$$

(c) La fonction $h_2 : x \mapsto x^2$ est-elle lipschitzienne sur $\mathbb{R}$? Justifier.

▶ On raisonne comme dans la question précédente. Soit $K \geqslant 0$.

- Analyse. On choisit $y = 0$ et on cherche un réel $x \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{aligned} & |h_2(x) - h_2(y)| > K|x-y| \\ \iff & \left|x^2 - 0^2\right| > K|x-0| \\ \iff & x^2 > K|x|. \end{aligned}$$

Si on suppose que $x > 0$, on obtient :

$$|h_2(x) - h_2(y)| > K|x-y| \iff x^2 > K|x| = Kx \iff x > K.$$

- Synthèse. On pose $\boxed{y = 0}$ et $\boxed{x > K}$. En reprenant les calculs de l'analyse, on a donc bien trouvé deux réels $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$|h_2(x) - h_2(y)| > K|x-y|.$$

De plus, ceci est vrai pour tout $K \geqslant 0$. Ainsi, l'assertion obtenue à la question 3(a) est bien vérifiée et on peut en déduire que $\boxed{\text{la fonction } h_2 : x \mapsto x^2 \text{ n'est pas lipschitzienne sur } \mathbb{R}}$.

Plus précisément, on peut poser $y = 0$ et $x = K + 1$.

4. *Soit f une fonction réelle définie sur un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$ (où $a < b$). Le but de cette question est de démontrer que si f est lipschitzienne sur $[a,b]$ alors f est bornée sur $[a,b]$, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes $(m,M) \in \mathbb{R}^2$ telles que $m \leqslant f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in [a,b]$.*

   (a) *Montrer que :*

$$\forall x \in [a,b], \quad |f(x)| \leqslant |f(x) - f(a)| + |f(a)| \quad \textit{et} \quad |x-a| \leqslant (b-a).$$

▶ Soit $x \in [a,b]$. On a :

$$|f(x)| = |f(x) - f(a) + f(a)| \leqslant |f(x) - f(x)| + |f(a)| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire}$$

et :

$$\overbrace{|x-a| = (x-a)}^{\text{car } x \geqslant a} \geqslant (b-a) \, .$$

$$(x-a) \geqslant (b-a) \text{ : } \underbrace{(x-a) \geqslant (b-a)}_{\text{car } x \leqslant b}$$

Puisque ces inégalités sont vraies pour un réel $x \in [a,b]$ fixé, elles sont vraies pour tout $x \in [a,b]$. D'où :

$$\boxed{\forall x \in [a,b], \quad |f(x)| \leqslant |f(x) - f(a)| + |f(a)| \quad \text{et} \quad |x-a| \leqslant (b-a)}.$$

   (b) *Conclure.*

▶ On suppose que f est lipschitzienne sur $[a,b]$. Montrons que f est bornée sur $[a,b]$. On cherche donc deux constantes $(m,M) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall x \in [a,b], \quad m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

On raisonne par analyse synthèse.

- Analyse. Puisqu'on a supposé que f est lipschitzienne sur $[a,b]$, on sait qu'il existe une constante $K \geqslant 0$ telle que :

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|.$$

  Soit $x \in [a,b]$. On a :

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leqslant |f(x) - f(a)| + |f(a)| && \text{d'après le résultat de la question précédente} \\ &\leqslant K|x-a| + |f(a)| && \text{car } f \text{ est lipschitzienne sur } [a,b] \\ &\leqslant K(b-a) + |f(a)| && \text{d'après le résultat de la question précédente.} \end{aligned}$$

  Par définition de la valeur absolue, on en déduit que :

$$-\Big(K(b-a) + |f(a)|\Big) \leqslant f(x) \leqslant K(b-a) + |f(a)|.$$

- Synthèse. On pose $\boxed{m = -(K(b-a) + |f(a)|}$ et $\boxed{M = K(b-a) + |f(a)}$. En reprenant les calculs de l'analyse, on a démontré que :

$$\forall x \in [a,b], \quad m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

  On en déduit bien que $\boxed{\text{si } f \text{ est lipschitzienne sur } [a,b] \text{ alors } f \text{ est bornée sur } [a,b]}$.

   (c) *À l'aide d'un exemple précédent, que peut-on dire de la réciproque ? Justifier.*

▶ On considère l'exemple de la fonction $h_{1/2} : x \mapsto \sqrt{x}$. On a démontré à la question 3(b) que $h_{1/2}$ n'est pas lipschitzienne sur $[0,1]$. Pourtant, la fonction $h_{1/2}$ est bornée sur $[0,1]$ car :

$$\forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1.$$

Par conséquent, $\boxed{\text{la réciproque de l'implication démontrée à la question précédente est fausse}}$.

5. *Le but de cette question est de démontrer que la somme de deux fonctions lipschitziennes sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est aussi lipschitzienne sur I. Pour cela, on fixe deux fonctions f_1 et f_2 lipschitziennes sur I. Montrer que $f_1 + f_2$ est lipschitzienne sur I.*

   ▶ On cherche une constante $K \geqslant 0$ telle que :

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \Big|(f_1(x) + f_2(x)) - (f_1(y) + f_2(y))\Big| \leqslant K|x-y|.$$

   On raisonne par analyse-synthèse.

   - Analyse. Puisque f_1 et f_2 sont lipschitziennes sur I, on sait qu'il existe deux constantes $K_1 \geqslant 0$ et $K_2 \geqslant 0$ telles que :

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \begin{cases} |f_1(x) - f_1(y)| \leqslant K_1|x-y| \\ |f_2(x) - f_2(y)| \leqslant K_2|x-y| \end{cases}$$

     > *Attention : les constantes K_1 et K_2 fournies par la définition du fait que f_1 et f_2 sont lipschitziennes sur I sont différentes (et a priori différente de la constante K cherchée). Pour éviter de s'embrouiller, il est donc utile de leur donner des noms différents.*

     Soit $(x,y) \in I^2$. On a :

$$\begin{aligned}
&\Big|(f_1(x) + f_2(x)) - (f_1(y) + f_2(y))\Big| \\
=&\Big|f_1(x) - f_1(y) + f_2(x) - f_2(y)\Big| \\
\leqslant&|f_1(x) - f_1(y)| + |f_1(x) - f_1(y)| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\
\leqslant&K_1|x-y| + K_2|x-y| \quad \text{car } f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont lipschitziennes sur } I \\
=&(K_1 + K_2)|x-y|.
\end{aligned}$$

   - Synthèse. On pose $\boxed{K = K_1 + K_2}$. En reprenant les calculs de l'analyse, on a bien trouvé une constante $K \geqslant 0$ telle que :

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \Big|(f_1(x) + f_2(x)) - (f_1(y) + f_2(y))\Big| \leqslant (K_1 + K_2)|x-y| = K|x-y|.$$

     On en déduit que $\boxed{f_1 + f_2 \text{ est lipschitzienne sur } I}$.

6. *À l'aide d'exemples précédents, que peut-on dire de l'assertion «le produit de deux fonctions lipschitziennes sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est aussi lipschitzienne sur I» ? Justifier.*

   ▶ On a montré à la question 3(c) que la fonction $h_2 : x \mapsto x^2$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Or la fonction h_2 est égale au produit de la fonction affine $g : x \mapsto x$ par elle-même. Or on a montré à la question 1(b) que la fonction affine $g : x \mapsto x$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, l'assertion «le produit de deux fonctions lipschitziennes sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est aussi lipschitzienne sur I» est $\boxed{\text{fausse}}$.

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par

$$u_0 = 1 = u_1 = 1 \quad \textit{et} \quad \forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 2(u_{n+1} - 2u_n).$$

Montrer qu'il existe $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout entier $n \geqslant 0$ on a $u_n = \rho^n \cos(n\theta)$.

▶ On raisonne par analyse-synthèse pour déterminer $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$.

- <u>Analyse</u>. Si $u_n = \rho^n \cos(n\theta)$ pour tout entier $n \geqslant 0$, alors on a en particulier pour $n = 1$:
$$1 = u_1 = \rho\cos(\theta).$$
De plus, on a pour $n = 2$:
$$u_2 = 2(u_1 - 2u_0) = 2(1-2) = -2 \quad \text{et} \quad u_2 = \rho^2\cos(2\theta) = \rho^2(2\cos^2(\theta) - 1)$$
d'après la formule de duplication du cosinus. On en déduit que :
$$-2 = 2\Big[\underbrace{\rho\cos(\theta)}_{=1}\Big]^2 - \rho^2 = 2 - \rho^2 \iff \rho^2 = 4 \iff (\rho = 2 \text{ ou } \rho = -2)\,.$$
Si $\rho = 2$, on a alors :
$$1 = 2\cos(\theta) \iff \cos(\theta) = \frac{1}{2} \iff \left(\theta \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \text{ ou } \theta \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]\right).$$

Si $\rho = -2$ on obtient de même $\theta \equiv 2\pi/3[2\pi]$ ou $\theta \equiv -2\pi/3[2\pi]$. On a donc deux infinités de choix possibles pour θ pour chacun des deux choix possibles de ρ. Ce qui fait en tout quatre infinités de choix possibles pour le couple (ρ,θ). Mais il ne s'agit pas ici de trouver tous les couples (ρ,θ) possibles : il suffit seulement d'en trouver au moins un. Ne perdez donc pas de temps dans l'analyse : dès que vous avez trouvé au moins un couple (ρ,θ) possible (le plus simple), passez rapidement à la synthèse. En fait, n'importe quel couple parmi les quatre infinités de choix possibles convient grâce aux propriétés de la fonction cosinus.

- <u>Synthèse</u>. On pose $\boxed{\rho = 2 \text{ et } \theta = \pi/3}$. Montrons par récurrence double que pour tout entier $n \geqslant 0$ on a $u_n = \rho^n\cos(n\theta) = 2^n\cos(n\pi/3)$.

  — *Initialisation*. On a :
$$2^0\cos(0) = 1 = u_0 \quad \text{et} \quad 2^1\cos(\pi/3) = 2\frac{1}{2} = 1 = u_1$$
  donc la récurrence double est initialisée.

  — *Hérédité*. On suppose que $u_n = 2^n\cos(n\pi/3)$ et $u_{n+1} = 2^{n+1}\cos((n+1)\pi/3)$ pour un entier $n \geqslant 0$ fixé. Alors :
$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= 2(u_{n+1} - 2u_n) \quad \text{d'après la relation de récurrence de l'énoncé}\\
&= 2\Big(2^{n+1}\cos((n+1)\pi/3) - 2\times 2^n\cos(n\pi/3)\Big) \quad \text{d'après les hypothèses de récurrence}\\
&= 2^{n+2}\Big(\cos(n\pi/3 + \pi/3) - \cos(n\pi/3)\Big)\\
&= 2^{n+2}\Big(\cos(n\pi/3)\cos(\pi/3) - \sin(n\pi/3)\sin(\pi/3) - \cos(n\pi/3)\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad \text{d'après la formule d'addition du cosinus}\\
&= 2^{n+2}\left(\cos(n\pi/3)\frac{1}{2} - \sin(n\pi/3)\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos(n\pi/3)\right)\\
&= 2^{n+2}\left(-\frac{1}{2}\cos(n\pi/3) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(n\pi/3)\right) = -2^{n+1}\Big(\cos(n\pi/3) + \sqrt{3}\sin(n\pi/3)\Big).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
2^{n+2}\cos((n+2)\pi/3) &= 2^{n+2}\cos(n\pi/3+2\pi/3)\\
&= 2^{n+2}\Big(\cos(n\pi/3)\cos(2\pi/3)-\sin(n\pi/3)\sin(2\pi/3)\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{d'après la formule d'addition du cosinus}\\
&= 2^{n+2}\left(\cos(n\pi/3)\left(-\frac{1}{2}\right)-\sin(n\pi/3)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= -2^{n+1}\Big(\cos(n\pi/3)+\sqrt{3}\sin(n\pi/3)\Big).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a montré que si $u_n = 2^n\cos(n\pi/3)$ et $u_{n+1} = 2^{n+1}\cos((n+1)\pi/3)$ alors $u_{n+2} = 2^{n+2}\cos((n+2)\pi/3)$. De plus, cette implication est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

— *Conclusion.* D'après le principe de récurrence double, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \geqslant 0,\ u_n = 2^n\cos(n\pi/3)}.$$

Finalement, on a bien trouvé $\boxed{(\rho,\theta) = (2,\pi/3)}$ tel que pour tout entier $n \geqslant 0$ on a $u_n = \rho^n\cos(n\theta)$.

DS n° 2 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes en fonction de $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-2k}{k(n+1-k)}$ en inversant l'ordre de sommation.
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{2}{k}\right)$ en reconnaissant une somme télescopique.
3. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{j}{i}$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Problème 1

Dans tout ce problème, on fixe un réel $\sigma \in]0,1[$ et on s'intéresse aux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définies par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$, de $u_1 \in \mathbb{R}$ et de la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geqslant 0,\ \ u_{n+2} = \sigma u_{n+1} + (1-\sigma)\min(1, u_n).$$

1. **[Informatique]**
   (a) En utilisant l'instruction `if`, écrire une fonction `min(x,y)` qui renvoie le minimum de `x` et `y`.
   (b) À l'aide de la fonction `min`, écrire une fonction `termeSuivant(sigma,un,unp1)` qui prend en arguments la variable `sigma` contenant le réel σ et les variables `un` et `unp1` contenant les termes u_n et u_{n+1}, et qui renvoie la valeur du terme u_{n+2}.
   (c) À l'aide de la fonction `termeSuivant`, écrire une fonction `terme(n,sigma,u0,u1)` qui prend en arguments la variable `n` contenant l'entier $n \geqslant 0$, la variable `sigma` contenant le réel σ et les variables `u0` et `u1` contenant les termes u_0 et u_1, et qui renvoie la valeur du terme u_n.
2. Dans cette question, on suppose que $u_2 \leqslant 1$.
   (a) Montrer que $u_n \leqslant 1$ pour tout entier $n \geqslant 2$.
   (b) Quel type de suite usuelle reconnaît-on pour $(u_n)_{n\geqslant 2}$?
   (c) Pour tout entier $n \geqslant 2$, exprimer u_n en fonction de n, σ, u_2 et u_3.
   (d) En déduire que :
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\sigma u_1 + (1-\sigma)(\min(1,u_0)+\min(1,u_1))}{2-\sigma}.$$
3. Dans cette question, on suppose que $u_2 > 1$.
   (a) Montrer que $u_1 > 1$.
   (b) Montrer que $u_n > 1$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
   (c) Quel type de suite usuelle reconnaît-on pour $(u_n)_{n\geqslant 2}$?
   (d) Pour tout entier $n \geqslant 2$, exprimer u_n en fonction de n, σ et u_2.
   (e) En déduire que u_n tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.
4. **[Informatique]** À l'aide des fonctions précédentes, écrire une fonction `limite(sigma,u0,u1)` qui prend en arguments la variable `sigma` contenant le réel σ et les variables `u0` et `u1` contenant les termes u_0 et u_1, et qui renvoie la valeur de la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x réelle.

(I_1) $x^{(x^4)} \leqslant x^{3x}$

(I_2) $6\cos(x) + 7 \leqslant 8\sin(x)$

(I_3) $\sin(7x) \leqslant \sin(5x)$

Problème 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $\Phi_n = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (i+j)$ et $\Psi_n = \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j)$.

1. Montrer que $\Phi_2 \neq \Psi_2$.
2. **[Informatique]** On considère la fonction `mystere` écrite ci-dessous.

```
def mystere(i,n):
    p=1
    for j in range(1,n+1):
        p = p*(i+j)
    return p
```

   (a) Que calcule la fonction `mystere` ?

   (b) En utilisant la fonction `mystere`, écrire une fonction `phi` qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ et renvoie la valeur de Φ_n.

   (c) En vous inspirant des fonctions précédentes, écrire une fonction `psi` qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ et renvoie la valeur de Ψ_n.

Pour la suite du problème, on fixe $n \in \mathbb{N}^\star$.

3. En simplifiant chaque membre à l'aide de factorielles, montrer qu'on a pour tout $i \in \mathbb{N}^\star$:

$$\prod_{j=1}^n (i+j) = \left(\binom{n+i+1}{n+1} - \binom{n+i}{n+1} \right) n!.$$

4. En déduire que $\Phi_n = \dfrac{(2n+1)!}{(n+1)!} - n!$.
5. **[Informatique]**

   (a) Écrire une fonction `fact` qui prend en argument un entier $k \in \mathbb{N}$ et renvoie la valeur de $k!$.

   (b) À l'aide de la fonction `fact`, écrire une fonction `phi2` similaire à la fonction `phi` mais utilisant le résultat de la question 4.

6. Montrer que $\Psi_n = C_n \prod_{i=1}^n \left(\frac{n+1}{2} + i\right)$ où C_n est un réel à déterminer en fonction de n et dont l'expression ne contient ni le symbole $\sum$ ni le symbole $\prod$.
7. Dans cette question, on suppose que n est impair et on pose $n = 2k+1$ où $k \in \mathbb{N}$.

   (a) Simplifier $\prod_{i=1}^{2k+1} (k+1+i)$ à l'aide de factorielles.

   (b) En déduire que $\Psi_n = n^n \dfrac{((3n+1)/2)!}{((n+1)/2)!}$.

8. Dans cette question, on suppose que n est pair et on pose $n = 2k$ où $k \in \mathbb{N}^\star$.

   (a) En séparant les indices pairs et impairs, montrer que :

$$\prod_{\ell=2}^{4k+1} (2k+\ell) = 4^{2k} \frac{(3k)!}{k!} \prod_{i=1}^{2k} \left(k + \tfrac{1}{2} + i\right).$$

   (b) En déduire que $\Psi_n = \left(\dfrac{n}{4}\right)^n \dfrac{(3n+1)!(n/2)!}{(n+1)!(3n/2)!}$.

9. **[Informatique]** On rappelle que l'instruction `n%2` est égale à `0` si `n` est pair et `1` si `n` est impair. À l'aide de la fonction `fact`, écrire une fonction `psi2` similaire à la fonction `psi` mais utilisant les résultats des questions 7 et 8.

Exercice 3

Soit $x \in [-1, 1]$. Montrer que $\arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

Corrigé du DS n$^{\text{o}}$ 2 de mathématiques et d'informatique

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes en fonction de $n \in \mathbb{N}^\star$.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-2k}{k(n+1-k)}$ *en inversant l'ordre de sommation.*

▶ On a :

$$\begin{aligned} S = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-2k}{k(n+1-k)} &= \sum_{\ell=1}^{n} \frac{n+1-2(n+1-\ell)}{(n+1-\ell)(n+1-(n+1-\ell))} \quad \text{en posant } \begin{array}{l} \ell = n+1-k \\ \iff k = n+1-\ell \end{array} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \frac{-(n+1)+2\ell}{(n+1-\ell)\ell} = -\sum_{\ell=1}^{n} \frac{n+1-2\ell}{\ell(n+1-\ell)} \quad \text{par linéarité} \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-2k}{k(n+1-k)} = -S \quad \text{en posant } \ell = k \text{ (variables muettes).} \end{aligned}$$

Par conséquent $2S = 0$ donc $S = 0$. Finalement :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-2k}{k(n+1-k)} = 0}.$$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\tfrac{2}{k}\right)$ *en reconnaissant une somme télescopique.*

▶ On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\tfrac{2}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+2}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+2) - \ln(k)\Big) \\ &= -\underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln(2) + \ln(n+1) + \ln(n+2) \quad \text{en reconnaissant une somme télescopique} \\ &= \boxed{\ln\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)}. \end{aligned}$$

On peut aussi reconnaître plus facilement la somme télescopique en remarquant que :

$$\forall k \geqslant 1, \quad \ln(k+2) - \ln(k) = \Big(\underbrace{\ln(k+2)+\ln(k+1)}_{=u_{k+1}}\Big) - \Big(\underbrace{\ln(k+1)+\ln(k)}_{=u_k}\Big)$$

donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\Big(\ln(k+2)-\ln(k)\Big) &= \sum_{k=1}^{n}\Big(u_{k+1}-u_k\Big)\\ &= u_{n+1}-u_1\\ &= \Big(\ln(n+2)+\ln(n+1)\Big)-\Big(\ln(2)+\ln(1)\Big).\end{aligned}$$

3. $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{j}{i}$ *à l'aide de la formule du binôme de Newton.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{j}{i} &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} && \text{en reconnaissant une somme double sur un triangle d'indices}\\ &= \sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}1^i1^{j-i}\right) && \text{car } 1^k=1 \text{ pour tout } k\in\mathbb{N}\\ &= \sum_{j=0}^{n}(1+1)^j && \text{d'après la formule du binôme de Newton}\\ &= \sum_{j=0}^{n}2^j = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} && \text{en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison 2}\\ &= \boxed{2^{n+1}-1}.\end{aligned}$$

Problème 1

Dans tout ce problème, on fixe un réel $\sigma\in]0,1[$ et on s'intéresse aux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définies par la donnée de $u_0\in\mathbb{R}$, de $u_1\in\mathbb{R}$ et de la relation de récurrence suivante :

$$\forall n\geqslant 0,\ \ u_{n+2}=\sigma u_{n+1}+(1-\sigma)\min(1,u_n).$$

1. ***[Informatique]***

   (a) *En utilisant l'instruction* `if`*, écrire une fonction* `min(x,y)` *qui renvoie le minimum de* `x` *et* `y`*.*

   ▶ Par exemple :

```
def min(x,y):
    if x < y:
        return x
    else:
        return y
```

   (b) *À l'aide de la fonction* `min`*, écrire une fonction* `termeSuivant(sigma,un,unp1)` *qui prend en arguments la variable* `sigma` *contenant le réel σ et les variables* `un` *et* `unp1` *contenant les termes u_n et u_{n+1}, et qui renvoie la valeur du terme u_{n+2}.*

   ▶ Par exemple :

```
def termeSuivant(sigma,un,unp1):
    return sigma*unp1+(1-sigma)*min(1,un)
```

(c) *À l'aide de la fonction* `termeSuivant`*, écrire une fonction* `terme(n,sigma,u0,u1)` *qui prend en arguments la variable* `n` *contenant l'entier $n \geqslant 0$, la variable* `sigma` *contenant le réel σ et les variables* `u0` *et* `u1` *contenant les termes u_0 et u_1, et qui renvoie la valeur du terme u_n.*

▶ Par exemple :

```
def terme(n,sigma,u0,u1):
    a = u0
    b = u1
    for i in range(n-1):
        c = termeSuivant(sigma,a,b)
        a = b
        b = c
    return b
```

2. *Dans cette question, on suppose que $u_2 \leqslant 1$.*

(a) *Montrer que $u_n \leqslant 1$ pour tout entier $n \geqslant 2$.*

▶ On raisonne par récurrence.

Initialisation. On a $u_2 \leqslant 1$ par hypothèse.

Hérédité. On suppose que $u_n \leqslant 1$ pour un entier $n \geqslant 2$ fixé. En appliquant la relation de récurrence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ au rang $n-1 \geqslant 0$, on obtient :

$$u_{n+1} = \underbrace{\underbrace{\sigma}_{>0}\,\underbrace{u_n}_{\leqslant 1}}_{\leqslant \sigma} + \underbrace{\underbrace{(1-\sigma)}_{>0}\,\underbrace{\min(1,u_{n-1})}_{\leqslant 1}}_{\leqslant (1-\sigma)} \leqslant \sigma + (1-\sigma) = 1 \quad \text{car } \sigma \in]0,1[.$$

Attention aux manipulations d'inégalités : pour justifier que $\sigma u_n \leqslant \sigma$ et $(1-\sigma)\min(1,u_{n-1}) \leqslant (1-\sigma)$, il est nécessaire de préciser que $\sigma > 0$ et $(1-\sigma) > 0$, donc que $\sigma \in]0,1[$.

Par conséquent, $u_n \leqslant 1$ implique que $u_{n+1} \leqslant 1$ et ceci est vrai pour tout entier $n \geqslant 2$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, on a montré que $\boxed{u_n \leqslant 1 \text{ pour tout entier } n \geqslant 2}$.

Puisque la relation de récurrence de suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est d'ordre 2, on peut aussi raisonner par récurrence double. Attention dans ce cas pour l'initialisation : il faut vérifier $u_2 \leqslant 1$ et $u_3 \leqslant 1$.

(b) *Quel type de suite usuelle reconnaît-on pour $(u_n)_{n\geqslant 2}$?*

▶ D'après le résultat de la question précédente, on a $\min(1,u_n) = u_n$ pour tout entier $n \geqslant 2$. On en déduit que $(u_n)_{n\geqslant 2}$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geqslant 2,\ u_{n+2} = \sigma u_{n+1} + (1-\sigma)\min(1,u_n) = \sigma u_{n+1} + (1-\sigma)u_n.$$

On reconnaît que $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 2} \text{ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2}}$.

(c) *Pour tout entier $n \geqslant 2$, exprimer u_n en fonction de n, σ, u_2 et u_3.*

▶ L'équation caractéristique associée à la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est :

$$q^2 = \sigma q + (1-\sigma) \iff q^2 - \sigma q - (1-\sigma) = 0.$$

Son discriminant vaut $\Delta = (-\sigma)^2 + 4(1-\sigma) = \sigma^2 - 4\sigma + 4 = (\sigma-2)^2$. Il est strictement positif car $\sigma \neq 2$ (puisque $\sigma \in]0,1[$). On obtient donc deux solutions réelles distinctes :

$$q_1 = \frac{\sigma + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{\sigma + |\sigma-2|}{2} = \frac{\sigma - (\sigma-2)}{2} = 1 \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{\sigma + (\sigma-2)}{2} = \sigma - 1.$$

Pour aller plus vite, on peut aussi remarquer (avant le calcul du discriminant) que $q_1 = 1$ est une solution évidente donc $q_2 = -(1-\sigma) = \sigma - 1$ est aussi une solution puisque $q_1 q_2 = -(1-\sigma)$ (et $q_1 + q_2 = -(-\sigma) = \sigma$).

Par conséquent, il existe deux constantes $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ telles que pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$u_n = \lambda_1 q_1^{n-2} + \lambda_2 q_2^{n-2} = \lambda_1 + \lambda_2 (\sigma - 1)^{n-2}.$$

Attention aux quantificateurs et à leur ordre ici ! Soyez très précis dans votre rédaction : les constantes λ_1 et λ_2 ne dépendent pas de l'entier n ! !

Pour $n = 2$ et $n = 3$, on obtient :

$$\begin{cases} u_2 = \lambda_1 + \lambda_2 & (L_1) \\ u_3 = \lambda_1 + \lambda_2(\sigma - 1) & (L_2) \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} (\sigma-1)u_2 - u_3 = \lambda_1(\sigma - 2) & (\sigma-1)(L_1) - (L_2) \\ u_3 - u_2 = \lambda_2(\sigma - 2) & (L_2) - (L_1) \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{(\sigma-1)u_2 - u_3}{\sigma - 2} \\ \lambda_2 = \dfrac{u_3 - u_2}{\sigma - 2} \end{cases}.$$

Finalement, on obtient :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \boxed{u_n = \frac{(\sigma-1)u_2 - u_3}{\sigma - 2} + \frac{u_3 - u_2}{\sigma - 2}(\sigma - 1)^{n-2}}.$$

(d) *En déduire que :*

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{\sigma u_1 + (1-\sigma)(\min(1, u_0) + \min(1, u_1))}{2 - \sigma}.$$

► Puisque $\sigma \in]0,1[$, on a $-1 < (\sigma - 1) < 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} (\sigma-1)^{n-2} = 0$. D'après le résultat de question précédente, on en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{(\sigma-1)u_2 - u_3}{\sigma - 2} = \frac{u_3 - \sigma u_2 + u_2}{2 - \sigma}.$$

En appliquant la relation de récurrence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ aux rangs $n = 2$ et $n = 3$, on a :

$$\begin{cases} u_2 = \sigma u_1 + (1-\sigma)\min(1, u_0) \\ u_3 = \sigma u_2 + (1-\sigma)\min(1, u_1) \end{cases}.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} u_n &= \frac{\sigma u_2 + (1-\sigma)\min(1, u_1) - \sigma u_2 + \sigma u_1 + (1-\sigma)\min(1, u_0)}{2 - \sigma} \\ &= \boxed{\frac{\sigma u_1 + (1-\sigma)(\min(1, u_0) + \min(1, u_1))}{2 - \sigma}}. \end{aligned}$$

3. *Dans cette question, on suppose que $u_2 > 1$.*

(a) *Montrer que $u_1 > 1$.*

► Par l'absurde, on suppose que $u_1 \leqslant 1$. En appliquant la relation de récurrence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ au rang $n = 2$, on obtient :

$$u_2 = \underbrace{\underbrace{\sigma}_{>0} \underbrace{u_1}_{\leqslant 1}}_{\leqslant \sigma} + \underbrace{\underbrace{(1-\sigma)}_{>0} \underbrace{\min(1, u_0)}_{\leqslant 1}}_{\leqslant (1-\sigma)} \leqslant \sigma + (1 - \sigma) = 1 \quad \text{car } \sigma \in]0,1[.$$

Ceci est absurde car $u_2 > 1$ par hypothèse. On en déduit que $\boxed{u_1 > 1}$.

(b) *Montrer que $u_n > 1$ pour tout entier $n \geqslant 1$.*

▶ On raisonne par récurrence double.

Initialisation. On a $u_1 > 1$ d'après le résultat de la question précédente et $u_2 > 1$ par hypothèse.

Hérédité. On suppose que $u_n > 1$ et $u_{n+1} > 1$ pour un entier $n \geqslant 1$ fixé. En appliquant la relation de récurrence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ au rang $n \geqslant 0$, on obtient :

$$u_{n+2} = \sigma u_{n+1} + (1-\sigma)\underbrace{\min(1,u_n)}_{=1 \text{ car } 1<u_n} = \underbrace{\underbrace{\sigma}_{>0}\underbrace{u_{n+1}}_{>1}}_{>\sigma} + (1-\sigma) > \sigma + (1-\sigma) = 1 \quad \text{car } \sigma \in]0,1[.$$

Par conséquent, $u_n > 1$ et $u_{n+1} > 1$ impliquent $u_{n+2} > 1$ et ceci est vrai pour tout entier $n \geqslant 1$.

Conclusion. D'après le principe de récurrence double, on a montré que $\boxed{u_n > 1 \text{ pour tout entier } n \geqslant 1}$.

(c) *Quel type de suite usuelle reconnaît-on pour $(u_n)_{n\geqslant 2}$?*

▶ D'après le résultat de la question précédente, on a $\min(1,u_n) = 1$ pour tout entier $n \geqslant 1$. On en déduit que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \geqslant 1,\ u_{n+2} = \sigma u_{n+1} + (1-\sigma)\min(1,u_n) = \sigma u_{n+1} + (1-\sigma).$$

En particulier, en appliquant cette relation au rang $n-1 \geqslant 1 \iff n \geqslant 2$, on obtient :

$$\forall n \geqslant 2,\ u_{n+1} = \sigma u_n + (1-\sigma).$$

On reconnaît que $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 2} \text{ est une suite arithmético-géométrique}}$.

(d) *Pour tout entier $n \geqslant 2$, exprimer u_n en fonction de n, σ et u_2.*

▶ L'équation caractéristique associée à la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est :

$$\alpha = \sigma\alpha + (1-\sigma) \iff (1-\sigma)\alpha = (1-\sigma) \iff \alpha = 1 \quad \text{car } 1-\sigma \neq 0 \text{ (puisque } \sigma \in]0,1[).$$

Ainsi, la suite $(u_n - \alpha)_{n\geqslant 2} = (u_n - 1)_{n\geqslant 2}$ est une suite géométrique de raison σ. On en déduit que pour tout $n \geqslant 2$:

$$u_n - 1 = \sigma^{n-2}(u_2 - 1).$$

Finalement, on obtient :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \boxed{u_n = \sigma^{n-2}(u_2-1) + 1}.$$

(e) *En déduire que u_n tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.*

▶ Puisque $\sigma \in]0,1[$, on a $\lim_{n\to+\infty} \sigma^{n-2} = 0$. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \boxed{1}.$$

4. ***[Informatique]*** *À l'aide des fonctions précédentes, écrire une fonction* `limite(sigma,u0,u1)` *qui prend en arguments la variable* `sigma` *contenant le réel σ et les variables* `u0` *et* `u1` *contenant les termes u_0 et u_1, et qui renvoie la valeur de la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.*

▶ Par exemple :

```
def limite(sigma,u0,u1):
    u2 = termeSuivant(sigma,u0,u1)
    if u2 <= 1:
        return (sigma*u1+(1-sigma)*(min(1,u0)+min(1,u1)))/(2-sigma)
    else:
        return 1
```

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x réelle.

(I_1) $x^{(x^4)} \leqslant x^{3x}$

▶ Puisque les exposants x^4 et $3x$ sont des nombres réels, on a d'après la définition des puissances :

$$x^{(x^4)} = \exp\left(x^4 \ln(x)\right) \quad \text{et} \quad x^{3x} = \exp\left(3x\ln(x)\right).$$

Ainsi l'inéquation (I_1) est bien définie seulement pour $x > 0$ et on a :

$$\begin{aligned}(I_1) &\iff \exp\left(x^4\ln(x)\right) \leqslant \exp\left(3x\ln(x)\right) \\ &\iff x^4\ln(x) \leqslant 3x\ln(x) \quad \text{car la fonction exp est strictement croissante} \\ &\iff \left(x^4 - 3x\right)\ln(x) \leqslant 0 \\ &\iff x\left(x^3-3\right)\ln(x) \leqslant 0.\end{aligned}$$

On étudie le signe de la fonction $f : x \mapsto x(x^3-3)\ln(x)$ sur $]0, +\infty[$.
La fonction $g : x \mapsto x^3 - 3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et sa dérivée $g' : x \mapsto 3x^2$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$ sauf en 0. On en déduit que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Attention, l'argument que g' est positive sur $\mathbb{R}$ justifie seulement que g est croissante sur $\mathbb{R}$ mais pas qu'elle est strictement croissante. Pour justifier qu'une fonction est strictement croissante sur un intervalle, il suffit de prouver que sa dérivée est strictement positive sauf en un nombre fini de points.

De plus, on a :

$$g(x) = 0 \iff x^3 - 3 = 0 \iff x^3 = 3 \iff x = \sqrt[3]{3} \quad \text{par définition de la racine troisième.}$$

Et $\sqrt[3]{3} > 1$ car $1^3 = 1 < 3$. On en déduit le tableau des signes de f.

x	0		1		$\sqrt[3]{3}$		$+\infty$
$g(x) = x^3 - 3$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Par conséquent, l'ensemble des solutions de (I_1) est $\boxed{\left[1, \sqrt[3]{3}\right]}$.

(I_2) $6\cos(x) + 7 \leqslant 8\sin(x)$

▶ On a :

$$(I_2) \iff 6\cos(x) + 7 \leqslant 8\sin(x) \iff 6\cos(x) - 8\sin(x) \leqslant -7.$$

On cherche le module et un argument du complexe $z = 6 - 8i$. On a :

$$|z| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

$$\text{donc} \quad z = 10\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right) = |z|\Big(\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z))\Big).$$

Puisque $\sin(\arg(z)) = -\frac{4}{5} < 0$, on en déduit que $\varphi = -\arccos(\frac{3}{5})$ est un argument de z.

Aidez vous d'un schéma du cercle trigonométrique. L'équation $\cos(\arg(z)) = \frac{3}{5}$ admet pour solutions $\arg(z) \equiv \arccos(\frac{3}{5})[2\pi]$ ou $\arg(z) \equiv -\arccos(\frac{3}{5})[2\pi]$. Le signe de $\sin(\arg(z))$ permet d'éliminer les premières solutions.

Ainsi $6-8i = z = 10(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))$ donc $6 = 10\cos(\varphi)$ et $-8 = 10\sin(\varphi)$. En reportant dans l'inéquation, on obtient :

$$\begin{aligned}
(I_2) &\iff 6\cos(x)+7 \leqslant 8\sin(x) \\
&\iff 6\cos(x) - 8\sin(x) \leqslant -7 \\
&\iff 10\cos(\varphi)\cos(x) + 10\sin(\varphi)\sin(x) \leqslant -7 \\
&\iff \cos(x-\varphi) \leqslant \frac{-7}{10} \\
&\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ \arccos\left(\frac{-7}{10}\right) + 2k\pi \leqslant x-\varphi \leqslant -\arccos\left(\frac{-7}{10}\right) + 2\pi + 2k\pi \\
&\iff \exists k\in\mathbb{Z},\ \varphi + \arccos\left(\frac{-7}{10}\right) + 2k\pi \leqslant x \leqslant \varphi - \arccos\left(\frac{-7}{10}\right) + 2(k+1)\pi.
\end{aligned}$$

Aidez vous d'un schéma du cercle trigonométrique pour résoudre l'inéquation $\cos(x-\varphi) \leqslant \frac{-7}{10}$. N'oubliez pas les congruences modulo 2π.

Finalement, l'ensemble des solutions de (I_2) est :

$$\boxed{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\arccos\left(\frac{3}{5}\right) + \arccos\left(\frac{-7}{10}\right) + 2k\pi, -\arccos\left(\frac{3}{5}\right) - \arccos\left(\frac{-7}{10}\right) + 2(k+1)\pi\right]}.$$

(I_3) $\sin(7x) \leqslant \sin(5x)$

▶ On a :

$$(I_3) \iff \sin(7x) \leqslant \sin(5x) \iff \sin(7x) - \sin(5x) \leqslant 0.$$

On étudie le signe de la fonction $f : x \mapsto \sin(7x) \leqslant \sin(5x)$ sur $\mathbb{R}$. Or on a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f(x) = \sin(7x) - \sin(5x) &= \operatorname{Im}\left(e^{i7x} - e^{i5x}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(2i\sin\left(\tfrac{7x-5x}{2}\right)e^{i\frac{7x+5x}{2}}\right) \quad \text{par factorisation par l'angle moitié} \\
&= 2\sin(x)\cos(6x).
\end{aligned}$$

De plus, on a d'après le cercle trigonométrique :

$$\sin(x) \geqslant 0 \iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Big[0+2k\pi, \pi+2k\pi\Big],$$

et :

$$\cos(6x) \geqslant 0 \iff 6x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right] \iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}\right].$$

On en déduit le tableau des signes de f.

x	$\cdots$	$-\frac{\pi}{12}$		0		$\frac{\pi}{12}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{12}$		$\frac{7\pi}{12}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{11\pi}{12}$		π		$\frac{13\pi}{12}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{17\pi}{12}$		$\frac{19\pi}{12}$		$\frac{7\pi}{4}$		$\frac{23\pi}{12}$		2π		$\frac{25\pi}{12}$	$\cdots$
$\sin(x)$	$\cdots$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$\cdots$
$\cos(6x)$	$\cdots$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-\cdots$
$f(x)$	$\cdots$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$\cdots$

Finalement, l'ensembler des solutions de (I_3) est :

$$\boxed{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\begin{array}{c}\left[\frac{\pi}{12}+2k\pi,\frac{\pi}{4}+2k\pi\right]\cup\left[\frac{5\pi}{12}+2k\pi,\frac{7\pi}{12}+2k\pi\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\frac{11\pi}{12}+2k\pi\right]\\ \cup\left[\pi+2k\pi,\frac{13\pi}{12}+2k\pi\right]\cup\left[\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\frac{17\pi}{12}+2k\pi\right]\\ \cup\left[\frac{19\pi}{12}+2k\pi,\frac{7\pi}{4}+2k\pi\right]\cup\left[\frac{23\pi}{12}+2k\pi,2\pi+2k\pi\right]\end{array}\right)}.$$

Problème 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $\Phi_n = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^n (i+j)$ et $\Psi_n = \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j)$.

1. *Montrer que $\Phi_2 \neq \Psi_2$.*

   ▶ On a :

$$\Phi_2 = \sum_{i=1}^{2}\prod_{j=1}^{2}(i+j) = \sum_{i=1}^{2}(i+1)(i+2) = \sum_{i=1}^{2}(i^2+3i+2) = (1+3+2)+(4+6+2) = 18$$

$$\text{et} \quad \Psi_2 = \prod_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(i+j) = \prod_{i=1}^{2}\Big((i+1)+(i+2)\Big) = \prod_{i=1}^{2}(2i+3) = (2+3)(4+3) = 35.$$

   Donc on obtient que $\boxed{\Phi_2 \neq \Psi_2}$.

2. ***[Informatique]** On considère la fonction `mystere` écrite ci-dessous.*

```
def mystere(i,n):
    p=1
    for j in range(1,n+1):
        p = p*(i+j)
    return p
```

   (a) *Que calcule la fonction `mystere` ?*

   ▶ La fonction `mystere` prend en argument deux variables `i` et `n` contenant les entiers $i \in \mathbb{N}^\star$ et $n \in \mathbb{N}^\star$, et renvoie la valeur du produit :

$$\boxed{\prod_{j=1}^{n}(i+j)}.$$

   Attention à l'instruction `range(a,b)` qui représente l'intervalle d'entiers $[\![a, b-1]\!] = \{a, a+1, a+2, \ldots, b-2, b-1\}$. En particulier, dans la boucle `for` de la fonction `mystere`, la variable `j` prend toutes les valeurs entières de `1` à `n` mais pas la valeur `n+1`.

   (b) *En utilisant la fonction `mystere`, écrire une fonction `phi` qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ et renvoie la valeur de Φ_n.*

   ▶ Par exemple :

```
def phi(n):
    s=0
    for i in range(1,n+1):
        s = s+mystere(i,n)
    return s
```

(c) *En vous inspirant des fonctions précédentes, écrire une fonction* `psi` *qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ et renvoie la valeur de Ψ_n.*

▶ Par exemple :

```
def psi(n):
    p=1
    for i in range(1,n+1):
        s=0
        for j in range(1,n+1):
            s = s+(i+j)
        p = p*s
    return p
```

On peut également écrire une fonction auxiliaire similaire à la fonction `mystere` *(peu importe le nom) pour calculer la somme $\sum_{j=1}^{n}(i+j)$ puis l'utiliser pour écrire la fonction* `psi`*.*

Pour la suite du problème, on fixe $n \in \mathbb{N}^\star$.

3. *En simplifiant chaque membre à l'aide de factorielles, montrer qu'on a pour tout $i \in \mathbb{N}^\star$:*

$$\prod_{j=1}^{n}(i+j) = \left(\binom{n+i+1}{n+1} - \binom{n+i}{n+1}\right) n!.$$

▶ Soit $i \in \mathbb{N}^\star$. On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^{n}(i+j) &= \prod_{k=i+1}^{i+n} k \quad \text{en posant le décalage d'indice } k=i+j\\
&= \frac{\prod_{k=1}^{i+n} k}{\prod_{k=1}^{i} k} \quad \text{par associativité du produit}\\
&= \boxed{\frac{(i+n)!}{i!}} \quad \text{par définition de la factorielle.}
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
\left(\binom{n+i+1}{n+1} - \binom{n+i}{n+1}\right) n! &= \left(\binom{n+i}{n} + \binom{n+i}{n+1} - \binom{n+i}{n+1}\right) n! \quad \text{d'après la formule de Pascal}\\
&= \binom{n+i}{n} n!\\
&= \frac{(n+i)!}{n!(n+i-n)!} n! \quad \text{par définition des coefficients binomiaux car } 0 \leqslant n \leqslant n+i\\
&= \boxed{\frac{(n+i)!}{i!}}.
\end{aligned}$$

On peut également utiliser la définition des coefficients binomiaux puis tout mettre au même dénominateur :

$$\begin{aligned}
&\left(\binom{n+i+1}{n+1}-\binom{n+i}{n+1}\right)n! \\
&=\left(\frac{(n+i+1)!}{(n+1)!(n+i+1-(n+1))!}-\frac{(n+i)!}{(n+1)!(n+i-(n+1))!}\right)n! \\
&=\left(\frac{(n+i+1)!}{(n+1)!i!}-\frac{(n+i)!}{(n+1)!(i-1)!}\right)n! = \left(\frac{(n+i+1)!-(n+i)!i}{(n+1)!i!}\right)n! \\
&=\frac{(n+i)!(n+i+1-i)}{(n+1)!i!}n! = \frac{(n+i)!(n+1)}{(n+1)!i!}n! = \frac{(n+i)!}{n!i!}n! = \boxed{\frac{(n+i)!}{i!}}.
\end{aligned}$$

On en déduit bien que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^\star, \quad \boxed{\prod_{j=1}^{n}(i+j) = \left(\binom{n+i+1}{n+1}-\binom{n+i}{n+1}\right)n!}.$$

4. *En déduire que* $\Phi_n = \dfrac{(2n+1)!}{(n+1)!} - n!$.

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\Phi_n &= \sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(i+j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\binom{n+i+1}{n+1}-\binom{n+i}{n+1}\right)n! \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= n!\sum_{i=1}^{n}\left(\binom{n+i+1}{n+1}-\binom{n+i}{n+1}\right) \quad \text{par linéarité de la somme} \\
&= n!\left(\binom{n+n+1}{n+1}-\binom{n+1}{n+1}\right) \quad \text{en reconnaissant une somme télescopique} \\
&= n!\left(\binom{2n+1}{n+1}-1\right) \quad \text{car } \binom{k}{k}=1 \text{ pour tout } k\in\mathbb{N} \\
&= n!\left(\frac{(2n+1)!}{(n+1)!(2n+1-(n+1))!}-1\right) \quad \text{par définition des coefficients binomiaux car } 0 \leqslant n+1 \leqslant 2n+1 \\
&= n!\left(\frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!}-1\right) = \boxed{\frac{(2n+1)!}{(n+1)!}-n!}.
\end{aligned}$$

5. ***[Informatique]***

(a) *Écrire une fonction* `fact` *qui prend en argument un entier* $k \in \mathbb{N}$ *et renvoie la valeur de* $k!$.

▶ Par exemple :

```
def fact(k):
    p=1
    for i in range(1,k+1):
        p = p*i
    return p
```

On peut aussi écrire la fonction `fact` *de manière récursive :*

```
def fact(k):
    if k == 0:
        return 1
    else:
        return fact(k-1)
```

(b) *À l'aide de la fonction* `fact`*, écrire une fonction* `phi2` *similaire à la fonction* `phi` *mais utilisant le résultat de la question 4.*

▶ Par exemple :

```
def phi2(n):
    return fact(2*n+1)/fact(n+1)-fact(n)
```

6. *Montrer que $\Psi_n = C_n \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{n+1}{2} + i\right)$ où C_n est un réel à déterminer en fonction de n et dont l'expression ne contient ni le symbole $\sum$ ni le symbole $\prod$.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\Psi_n &= \prod_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} (i+j) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} j \right) && \text{par linéarité} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left(ni + \frac{n(n+1)}{2} \right) && \text{d'après la formule de la somme des premiers entiers} \\
&= \prod_{i=1}^{n} \left(n \left(i + \frac{n+1}{2} \right) \right) = \prod_{i=1}^{n} n \times \prod_{i=1}^{n} \left(i + \frac{n+1}{2} \right) && \text{par multiplicativité} \\
&= \boxed{n^n \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{n+1}{2} + i \right)}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat en posant $\boxed{C_n = n^n}$.

7. *Dans cette question, on suppose que n est impair et on pose $n = 2k+1$ où $k \in \mathbb{N}$.*

(a) *Simplifier $\prod_{i=1}^{2k+1} (k+1+i)$ à l'aide de factorielles.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{2k+1} (k+1+i) &= \prod_{\ell=k+2}^{3k+2} \ell && \text{en posant le décalage d'indice } \ell = k+1+i \\
&= \frac{\prod_{\ell=1}^{3k+2} \ell}{\prod_{\ell=1}^{k+1} \ell} && \text{par associativité du produit} \\
&= \boxed{\frac{(3k+2)!}{(k+1)!}} && \text{par définition de la factorielle.}
\end{aligned}$$

(b) *En déduire que $\Psi_n = n^n \dfrac{((3n+1)/2)!}{((n+1)/2)!}$.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\Psi_n &= n^n \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{n+1}{2} + i\right) \quad \text{d'après le résultat de la question 6}\\
&= n^n \prod_{i=1}^{2k+1} (k+1+i) \quad \text{car } n = 2k+1\\
&= n^n \frac{(3k+2)!}{(k+1)!} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}\\
&= n^n \frac{(3(n-1)/2+2)!}{((n-1)/2+1)!} \quad \text{car } k = (n-1)/2\\
&= \boxed{n^n \frac{((3n+1)/2)!}{((n+1)/2)!}}.
\end{aligned}$$

8. *Dans cette question, on suppose que n est pair et on pose $n = 2k$ où $k \in \mathbb{N}^\star$.*

(a) *En séparant les indices pairs et impairs, montrer que :*

$$\prod_{\ell=2}^{4k+1} (2k+\ell) = 4^{2k} \frac{(3k)!}{k!} \prod_{i=1}^{2k} \left(k + \tfrac{1}{2} + i\right).$$

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\prod_{\ell=2}^{4k+1} (2k+\ell) &= \underbrace{\prod_{\substack{\ell=2\\ \ell \text{ pair}}}^{4k+1} (2k+\ell)}_{\text{on pose } \ell = 2i} \times \underbrace{\prod_{\substack{\ell=2\\ \ell \text{ impair}}}^{4k+1} (2k+\ell)}_{\text{on pose } \ell = 2i+1} \quad \text{en séparant les indices pairs et impairs}\\
&= \prod_{2 \leqslant 2i \leqslant 4k+1} (2k+2i) \times \prod_{2 \leqslant 2i+1 \leqslant 4k+1} (2k+2i+1)\\
&= \prod_{1 \leqslant i \leqslant 2k+\frac{1}{2}} \Big(2(k+i)\Big) \times \prod_{\frac{1}{2} \leqslant i \leqslant 2k} \Big(2(k+i+\tfrac{1}{2})\Big)\\
&= \prod_{i=1}^{2k} 2 \times \underbrace{\prod_{i=1}^{2k} (k+i)}_{\text{on pose } j = k+i} \times \prod_{i=1}^{2k} 2 \times \prod_{i=1}^{2k} (k+i+\tfrac{1}{2}) \quad \text{par multiplicativité}\\
&= 2^{2k} \times \prod_{j=k+1}^{3k} j \times 2^{2k} \times \prod_{i=1}^{2k} (k+\tfrac{1}{2}+i) \quad \text{par décalage d'indice}\\
&= \left(2^{2k}\right)^2 \times \frac{\prod_{j=1}^{3k} j}{\prod_{j=1}^{k} j} \times \prod_{i=1}^{2k} (k+\tfrac{1}{2}+i) \text{ par commutativité et associativité du produit}\\
&= \boxed{4^{2k} \frac{(3k)!}{k!} \prod_{i=1}^{2k} \left(k+\tfrac{1}{2}+i\right)} \quad \text{par définition de la factorielle.}
\end{aligned}$$

(b) *En déduire que* $\Psi_n = \left(\frac{n}{4}\right)^n \frac{(3n+1)!(n/2)!}{(n+1)!(3n/2)!}$.

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\Psi_n &= n^n \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{n+1}{2}+i\right) \quad \text{d'après le résultat de la question 6}\\
&= n^n \prod_{i=1}^{2k}\left(k+\frac{1}{2}+i\right) \quad \text{car } n=2k\\
&= n^n \times \frac{\prod_{\ell=2}^{4k+1}(2k+\ell)}{4^{2k}(3k)!/k!} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}\\
&= \frac{n^n}{4^{2k}}\frac{k!}{(3k)!} \underbrace{\prod_{j=2k+2}^{6k+1} j}_{=\prod_{j=1}^{6k+1} j/\prod_{j=1}^{2k+1} j} \quad \text{en posant le décalage d'indice } j=2k+\ell\\
&= \frac{n^n}{4^{2k}}\frac{k!}{(3k)!}\frac{(6k+1)!}{(2k+1)!} \quad \text{par associativité du produit et définition de la factorielle}\\
&= \frac{n^n}{4^n}\frac{(n/2)!}{(3(n/2))!}\frac{(6(n/2)+1)!}{(n+1)!} \quad \text{car } k=n/2\\
&= \boxed{\left(\frac{n}{4}\right)^n \frac{(3n+1)!(n/2)!}{(n+1)!(3n/2)!}}.
\end{aligned}$$

9. ***[Informatique]*** *On rappelle que l'instruction* `n\%2` *est égale à* `0` *si* `n` *est pair et* `1` *si* `n` *est impair. À l'aide de la fonction* `fact`*, écrire une fonction* `psi2` *similaire à la fonction* `psi` *mais utilisant les résultats des questions 7 et 8.*

▶ Par exemple :

```
def psi2(n):
    if n%2 == 1:
        return (n**n)*fact((3*n+1)/2)/fact((n+1)/2)
    else:
        return ((n/4)**n)*fact(3*n+1)*fact(n/2)/(fact(n+1)*fact(3*n/2))
```

Les parenthèses autour des puissances `n**n` *et* `(n/4)**n` *ne sont pas nécessaires mais les expressions sont plus claires avec. En pratique, cette fonction retourne une erreur car les divisions* `(3*n+1)/2`*,* `(n+1)/2`*,* `n/2` *et* `3*n/2` *renvoient des nombres flottants (à virgules) même si les résultats sont entiers (par exemple* `1/1=1.0`*), alors que la fonction* `fact` *prend en argument un nombre entier* `k` *(à cause de l'instruction* `range(1,k+1)`*). Pour corriger cette erreur, il serait nécessaire de remplacer l'opérateur de division* `/` *par l'opérateur de division entière* `//` *(qui renvoie le quotient entier de la division sans calculer le reste) ou d'utiliser l'instruction* `int` *qui transforme les nombres flottants en nombres entiers.*

Exercice 3

Soit $x \in [-1,1]$. Montrer que $\arccos(x)+\arcsin(x)=\dfrac{\pi}{2}$.

▶ Il suffit de montrer que $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$. Or, par définition de la fonction arccosinus, $\arccos(x)$ est l'unique solution de l'équation $\cos(\theta)=x$ d'inconnue $\theta \in [0,\pi]$. Or on a d'après les formules de trigonométrie (symétrie des fonction cosinus et sinus et réciprocité de la fonction arcsinus) :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin(x)\right) = \sin(\arcsin(x)) = x.$$

De plus,

$$\begin{array}{rl} & \arcsin(x) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \quad \text{par définition de la fonction arcsinus} \\ \text{donc} & -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \arcsin(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ \text{donc} & 0 = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} \leqslant \dfrac{\pi}{2} - \arcsin(x) \leqslant \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi \\ \text{donc} & \left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) \in [0, \pi]. \end{array}$$

Ainsi $\theta = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right)$ est solution de l'équation $\cos(\theta) = x$ et $\theta \in [0, \pi]$. Par définition de la fonction arccosinus, on en déduit que :

$$\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) = \arccos(x)$$

et par conséquent :

$$\boxed{\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}}.$$

N'oubliez pas de justifier que $\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) \in [0, \pi]$ *sinon on peut seulement déduire de* $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) = x$ *que* $\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) \equiv \arccos(x)$ *ou* $-\arccos(x)$ $[2\pi]$.

DS n^{o} 3 de mathématiques et d'informatique

durée : 4 heures

Exercice

Lors d'une sortie scolaire, une classe de BCPST de 35 filles, 11 garçons et 3 accompagnateurs montent dans un autocar de 53 places : 12 rangées de 2 places à gauche, 12 rangées de 2 places à droite et 1 rangée de 5 places au fond. Les précisions ci-dessous sont valables pour tout l'exercice :

— le chauffeur et sa place ne sont pas pris en compte ;

— les termes «garçons» et «filles» désignent seulement des étudiants, non des accompagnateurs ;

— les réponses aux questions n'ont pas besoin d'être simplifiées.

1. De combien de façons différentes les 49 personnes peuvent-elles s'asseoir dans l'autocar ?

Désormais, on suppose que les 4 premières places (1re rangée à gauche et 1re rangée à droite) sont réservées aux 3 accompagnateurs (qui laissent la quatrième place inoccupée).

2. De combien de façons différentes les 49 personnes peuvent-elles s'asseoir dans l'autocar ?
3. Parmi ces façons, combien d'entre-elles sont telles que (chaque question est indépendante) :
   (a) aucune fille n'est assise dans la rangée du fond ?
   (b) les 5 places de la rangée du fond sont occupées par des filles ?
   (c) dans chacune des 25 rangées, il y a au plus un seul garçon ?
   (d) il y a autant de garçons assis dans les rangées à gauche que dans les rangées à droite (quel que soit le nombre de garçons assis dans la rangée du fond) ?

Problème 1

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Une p-filtration de E est une p-liste $(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_p)$ de parties de E telle que $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \subset A_p$. Par exemple $(\emptyset, \emptyset, \{1\}, \{1,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\})$ est une 6-filtration de $\{1,2,3\}$, mais aussi de $\{1,2,3,4\}$. Le but de ce problème est de dénombrer les p-filtrations de E. Pour tout couple d'entiers $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$, on note $F_{n,p}$ le nombre de p-filtrations d'un ensemble à n éléments.

1. Que vaut $F_{0,p}$? Justifier votre réponse.
2. À toute p-filtration $(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_p)$ de l'ensemble $\{1\}$, on associe le nombre :

$$\varphi(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_p) = \operatorname{card}\Big\{i \in [\![1,p]\!] \mid A_i = \emptyset\Big\}.$$

   (a) Que vaut $\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset, \{1\}, \{1\})$ dans le cas $p = 5$?
   (b) Déterminer l'image directe de l'ensemble des p-filtrations de $\{1\}$ par l'application φ.
   (c) Montrer que l'application φ est injective.
   (d) En déduire la valeur de $F_{1,p}$.
3. En remarquant que l'ensemble des 1-filtrations de E est un ensemble du cours, déterminer $F_{n,1}$.
4. Montrer que $F_{n,p} \leqslant 2^{np}$.
5. Dans cette question, on considère le cas $p = 2$.
   (a) Déterminer toutes les 2-filtrations de l'ensemble $\{1,2\}$ et en déduire que $F_{2,2} = 9$.
   (b) Dans cette question, on fixe un entier $k \in [\![0,n]\!]$.
      i. Combien y a-t-il de parties $A_2 \subset E$ telles que $\operatorname{card}(A_2) = k$?
      ii. On fixe une partie $A_2 \subset E$ telle que $\operatorname{card}(A_2) = k$. Combien y a-t-il de parties $A_1 \subset A_2$?
   (c) À l'aide des résultats précédents, écrire $F_{n,2}$ sous la forme d'une somme.
   (d) En déduire que $F_{n,2} = 3^n$.
6. Pour tout entier $p \geqslant 1$, on pose la proposition suivante :

$$\mathscr{H}(p) : \text{«il existe une constante } C_p \in \mathbb{R} \text{ telle que pour tout } n \in \mathbb{N},\ F_{n,p} = (C_p)^n\text{»}.$$

   Le but de cette question est de montrer que cette proposition est héréditaire. Pour cela, on fixe un entier $p \geqslant 1$ et on suppose que la proposition $\mathscr{H}(p)$ est vraie.
   (a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0,n]\!]$. Combien y a-t-il de $(p+1)$-filtrations $(A_1, A_2, \ldots, A_p, A_{p+1})$ de E telles que $\operatorname{card}(A_{p+1}) = k$? Exprimer ce nombre en fonction de k, n et $F_{k,p}$.
   (b) Montrer que $F_{n,p+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (C_p)^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) En déduire que $\mathscr{H}(p+1)$ est vraie.
7. À l'aide du résultat de la question précédente, exprimer C_p en fonction de $p \geqslant 1$.
8. Conclure le problème en détaillant votre raisonnement à l'aide des résultats précédents.

Problème 2

Dans tout le problème, pour tout $m \in \mathbb{R}$, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$S_m(a,b) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suites réelles } | u_0 = a, u_1 = b, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + m \cdot u_n\}.$$

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'équation d'inconnue complexe x, $E_m : x^2 - x - m = 0$. Déterminer le nombre de solutions réelles de E_m en fonction de m.
2. (INFO) Écrire une fonction `nb_sol(m)` qui renvoie le nombre de solutions réelles de l'équation $x^2 - x - m = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$: E_1, $E_{-\frac{1}{3}}$, $E_{-\frac{1}{4}}$. Dans le cas de solutions complexes non réelles donner également une écriture exponentielle des solutions.
4. Soit la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\alpha_0 = 2, \alpha_1 = 3, \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} - \frac{1}{4}\alpha_n$.
   (a) (INFO) On considère les deux fonctions suivantes écrites en Python :

```
def alpha(n) :
    u0=2
    u1=3
    for i in range(n) :
        u1=u1-0.25*u0
        u1=u0
    return u0
```

```
def alphabis(n) :
    u0=2
    u1=3
    for i in range(n) :
        u=u1
        u1=u-0.25*u0
        u0=u
        return u
```

   Déterminer la valeur de `alpha(3)` et de `alphabis(3)`.

   (b) (INFO) Écrire une fonction `alphater(n)` qui prend en argument un entier n et qui renvoie la valeur de α_n.

   (c) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de α_n en fonction de n.

   (d) Déterminer a, b, m des réels tels que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $S_m(a,b)$.
5. Soit la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\beta_0 = 0, \beta_1 = 4, \forall n \in \mathbb{N}, \beta_{n+2} = \beta_{n+1} - \frac{1}{3}\beta_n$.
   (a) (INFO) Écrire une fonction `beta(n)` qui renvoie la valeur de β_n. On utilisera la formule de récurrence.

   (b) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de β_n en fonction de n.

   (c) Montrer que $S_{-\frac{1}{4}}(0,4)$ contient comme unique élément la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pourra considérer une suite quelconque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $S_{-\frac{1}{4}}(0,4)$ et montrer par une récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \beta_n$.
6. On définit la suite de Lucas $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $L_0 = 2, L_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

   (b) (INFO) Déduire de la question 6a une fonction `Lucas(n)` qui renvoie la valeur de L_n.

   (c) Soient a, b, m des réels. Montrer que si $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $S_m(a,b)$ alors $a = 2, b = 1, m = 1$.
7. Soient m, a, b des réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $S_m(a,b)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on souhaite simplifier $\sum_{k=0}^{n} u_k$.
   (a) (INFO) Écrire une fonction `suite(a,b,m,n)` qui prend en arguments trois réels a, b, m et un entier n et qui renvoie la valeur de u_n où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $S_m(a,b)$.

   (b) (INFO) On déduit de la question précédente la fonction `somme(a,b,m,n)` définie par

```
def somme(a,b,m,n) :
    S=0
    for i in range(n+1) :
        S=S+suite(a,b,m,n)
    return S
```

Quelle est la valeur de retour de cette fonction ? Modifier celle-ci pour que la valeur de retour de cette fonction soit $\sum_{k=0}^{n} u_k$, où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $S_m(a,b)$.

(c) Cas 1 : $m = 0$.

i. Calculer $\sum_{k=0}^{0} u_k, \sum_{k=0}^{1} u_k, \sum_{k=0}^{2} u_k$.

ii. Pour tout $n \geq 2$, simplifier $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

(d) Cas 2 : $m \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, simplifier $\sum_{k=0}^{n} u_k$. On pourra remarquer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_k = \frac{1}{m}\left(u_{k+2} - u_{k+1}\right).$$

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k, \sum_{k=0}^{n} \beta_k, \sum_{k=0}^{n} L_k$.

8. Dans cette question, on cherche à simplifier diverses sommes faisant intervenir la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à la question 6.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, simplifier $\sum_{k=0}^{n} L_{2k}$ et $\sum_{k=0}^{n} L_{2k+1}$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{cases} L_{2n} &= L_n^2 - 2\cdot(-1)^n \\ L_{2n+1} &= L_n L_{n+1} - (-1)^n \end{cases}$$

(c) (INFO) Écrire en python une fonction correspondant au pseudo-code suivant :

```
liste_lucas(n) :
    si n=0 :
        retourner [2]
    si n=1 :
        retourner [2,0]
    sinon :
        L=[2,0]
        pour  i allant de 0 à n-1 (inclus) :
            si i est pair et est égal à 2k :
                S= L[k]**2-2 (-1)**n
            si i est impair et est égal à 2k+1 :
                S=L[k]*L[k+1]-(-1)**n
            ajouter S à la fin de L
        retourner L
```

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ simplifier $\sum_{k=0}^{n} L_k^2$ et $\sum_{k=0}^{n} L_k L_{k+1}$. On pourra s'aider des questions précédentes.

(e) (INFO) Écrire une fonction `somme1(n)` qui renvoie la valeur de $\sum_{0\leq i,j\leq n} L_i L_j$. On pourra utiliser la fonction `Lucas` de la question 6b.

(f) (INFO) Écrire une fonction `somme2(n)` qui renvoie la valeur de $\sum_{0\leq i\leq j\leq n} L_i L_j$. On pourra utiliser la fonction `Lucas` de la question 6b.

(g) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, simplifier $\sum_{0\leq i,j\leq n} L_i L_j$ et $\sum_{0\leq i\leq j\leq n} L_i L_j$. On pourra s'aider de résultats de la question 7.

Corrigé du DS n° 3 de mathématiques et d'informatique

Exercice

Lors d'une sortie scolaire, une classe de BCPST de 35 filles, 11 garçons et 3 accompagnateurs montent dans un autocar de 53 places : 12 rangées de 2 places à gauche, 12 rangées de 2 places à droite et 1 rangée de 5 places au fond. Les précisions ci-dessous sont valables pour tout l'exercice :

- *le chauffeur et sa place ne sont pas pris en compte ;*
- *les termes «garçons» et «filles» désignent seulement des étudiants, non des accompagnateurs ;*
- *les réponses aux questions n'ont pas besoin d'être simplifiées.*

1. *De combien de façons différentes les 49 personnes peuvent-elles s'asseoir dans l'autocar ?*

   ▶ Les $35+11+3=49$ personnes montent dans l'autocar les unes après les autres et chaque personne qui monte doit choisir une des 53 places qui n'est pas encore occupée :
   - il y a 53 places disponibles pour la première personne qui monte,
   - et puis il reste 52 places disponibles pour la deuxième personne qui monte,
   - et puis il reste 51 places disponibles pour la troisième personne qui monte,
   - etc.

   On reconnaît une 49-liste sans répétition des 53 places. Le nombre de façons différentes d'asseoir tout le monde dans l'autocar est donc égal à :

   $$\boxed{\frac{53!}{(53-49)!}}.$$

   Ce qui fait un total de $\frac{53!}{4!} \approx 1,78 \times 10^{68}$.

Désormais, on suppose que les 4 premières places (1^{re} rangée à gauche et 1^{re} rangée à droite) sont réservées aux 3 accompagnateurs (qui laissent la quatrième place inoccupée).

2. *De combien de façons différentes les 49 personnes peuvent-elles s'asseoir dans l'autocar ?*

   ▶ Pour les accompagnateurs, on reconnaît une 3-liste sans répétition des 4 premières places. Et puis, il reste $35+11=46$ étudiants qui peuvent s'asseoir dans $53-4=49$ places. On reconnaît donc une 46-liste sans répétition des 49 places restantes. Finalement, le nombre de façons différentes d'asseoir tout le monde dans l'autocar est donc égal à :

   $$\boxed{\frac{4!}{(4-3)!} \times \frac{49!}{(49-46)!}}.$$

   Ce qui fait un total de $\frac{4!49!}{3!} \approx 2,43 \times 10^{63}$.

3. *Parmi ces façons, combien d'entre-elles sont telles que (chaque question est indépendante) :*

   (a) *aucune fille n'est assise dans la rangée du fond ?*

   ▶ Pour les accompagnateurs, on a toujours une 3-liste sans répétition des 4 premières places. Et puis, les 35 filles peuvent s'asseoir dans $53-4-5=44$ places. On reconnaît donc une 35-liste sans répétition des 44 places possibles pour les filles. Et puis, les 11 garçons peuvent s'asseoir dans $53-4-35=14$ places. On reconnaît une 11-liste sans répétition des 14 places restantes. Finalement, le nombre de façons différentes d'asseoir tout le monde dans l'autocar est donc égal à :

   $$\boxed{\frac{4!}{(4-3)!} \times \frac{44!}{(44-35)!} \times \frac{14!}{(14-11)!}}.$$

Ce qui fait un total de $\frac{4!44!14!}{9!3!} \approx 2,55 \times 10^{60}$.

(b) *les 5 places de la rangée du fond sont occupées par des filles ?*

▶ Pour les accompagnateurs, on a toujours une 3-liste sans répétition des 4 premières places. Et puis, on choisit 5 filles parmi les 35 qui s'assoient dans les 5 places de la rangée du fond. On reconnaît une 5-combinaison des 35 filles pour choisir celles qui s'assoient dans les 5 places de la rangée du fond, et puis une permutation de ces 5 filles pour choisir une façon de les asseoir dans les 5 places de la rangée du fond. Et puis, il reste $35-5+11=41$ étudiants qui peuvent s'asseoir dans les $53-4-5=44$ places restantes. On reconnaît une 41-liste sans répétition des 44 places restantes. Finalement, le nombre de façons différentes d'asseoir tout le monde dans l'autocar est donc égal à :

$$\boxed{\frac{4!}{(4-3)!} \times \binom{35}{5} \times 5! \times \frac{44!}{(44-41)!}}.$$

Ce qui fait un total de $\frac{4!35!44!}{30!3!} \approx 4,14 \times 10^{62}$.

(c) *dans chacune des 25 rangées, il y a au plus un seul garçon ?*

▶ Pour les accompagnateurs, on a toujours une 3-liste sans répétition des 4 premières places. Et puis, on considère deux cas disjoints : aucun garçon ne s'assoit dans dans la rangée du fond, ou bien un seul garçon s'assoit dans la rangée du fond.

— Si aucun des 11 garçons ne s'assoit dans la rangée du fond, chaque garçon qui monte choisit une des $12+12+1-2-1=22$ rangées qui n'est pas encore occupée par un garçon, et puis une des deux places de cette rangée. On reconnaît une 11-liste sans répétition des 22 rangées possibles, et puis une 11-liste des deux places possibles pour chaque rangée (par exemple : la place à gauche ou à droite). On obtient donc :
$$\frac{22!}{(22-11)!} \times 2^{11} \quad \text{façons d'asseoir les garçons dans ce cas.}$$

— Si un seul des 11 garçons s'assoit dans la rangée du fond, on reconnaît une 1-combinaison des 11 garçons pour choisir celui qui s'assoit dans la rangée du fond, et puis on choisit une des 5 places possibles de la rangée du fond. Et puis, il reste $11-1=10$ garçons s'assoient comme dans le premier cas. On reconnaît donc une 10-liste sans répétition des 22 rangées possibles pour les 10 garçons restants, et puis une 10-liste des deux places possibles pour chaque rangée. On obtient donc :
$$\binom{11}{1} \times 5 \times \frac{22!}{(22-10)!} \times 2^{10} \quad \text{façons d'asseoir les garçons dans ce cas.}$$

Et puis, il reste 35 filles qui peuvent s'asseoir dans les $53-4-11=38$ places restantes. On reconnaît une 35-liste sans répétition des 38 places restantes. Finalement, Le nombre de façons différentes d'asseoir tout le monde dans l'autocar est donc égal à :

$$\boxed{\frac{4!}{(4-3)!} \times \left(\frac{22!}{(22-11)!} \times 2^{11} + \binom{11}{1} \times 5 \times \frac{22!}{(22-10)!} \times 2^{10}\right) \times \frac{38!}{(38-35)!}}.$$

Ce qui fait un total de $4!(\frac{22!}{11!}2^{11} + 55\frac{22!}{12!}2^{10})\frac{38!}{3!} \approx 3,97 \times 10^{62}$.

(d) *il y a autant de garçons assis dans les rangées à gauche que dans les rangées à droite (quel que soit le nombre de garçons assis dans la rangée du fond) ?*

▶ Pour les accompagnateurs, on a toujours une 3-liste sans répétition des 4 premières places. Et puis, on considère six cas disjoints : aucun garçon ne s'assoit dans la rangée du fond, ou bien un seul garçon s'assoit dans la rangée du fond, ou bien exactement deux garçons s'assoient dans la rangée du fond, etc., ou bien cinq garçons s'assoient dans la rangée du fond. Puisqu'il y a 11 garçons au total, on remarque que si exactement 0, 2 ou 4 garçons s'assoient dans la rangée du fond, alors il reste un nombre impair de garçons (11, 9 ou 7) qui ne peuvent pas se répartir équitablement entre les rangées à gauche et à droite. On considère donc seulement les cas où exactement 1, 3 ou 5 garçons s'assoient dans la rangée du fond.

— Si un seul des 11 garçons s'assoit dans la rangée du fond, on reconnaît une 1-combinaison des 11 garçons pour choisir celui qui s'assoit dans la rangée du fond, et puis on choisit une des 5 places de la rangée du fond. Et puis, on choisit $(11-1)/2 = 5$ garçons parmi les $11-1 = 10$ restants qui s'assoient dans les $(53-4-5)/2 = 22$ places des rangées à gauche. On reconnaît une 5-combinaison des 10 garçons restants pour choisir ceux qui s'assoient dans les rangées à gauche, et puis une 5-liste sans répétition des 22 places possibles dans les rangées à gauche. Et puis, il reste $11-1-5 = 5$ garçons qui s'assoient dans les $53-4-5-22 = 22$ places des rangées à droite. On reconnaît une 5-liste sans répétition des 22 places possibles dans les rangées à droite. On obtient donc :

$$\binom{11}{1} \times 5 \times \binom{10}{5} \times \frac{22!}{(22-5)!} \times \frac{22!}{(22-5)!} \quad \text{façons d'asseoir les garçons dans ce cas.}$$

— Si exactement 3 des 11 garçons s'assoient dans la rangée du fond, on reconnaît une 3-combinaison des 11 garçons pour choisir ceux qui s'assoient dans la rangée du fond, et puis une 3-liste sans répétition des 5 places de la rangée du fond. Et puis, il reste $11-3 = 8$ garçons qui s'assoient comme dans le premier cas. On reconnaît donc une 4-combinaison des 8 garçons restants pour choisir ceux qui s'assoient dans les rangées à gauche, et puis une 4-liste sans répétition des 22 places possibles dans les rangées à gauche, et puis une 4-liste sans répétition des 22 places possibles dans les rangées à droite pour les garçons qui s'assoient dans les rangées à droite. On obtient donc :

$$\binom{11}{3} \times \frac{5!}{(5-3)!} \times \binom{8}{4} \times \frac{22!}{(22-4)!} \times \frac{22!}{(22-4)!} \quad \text{façons d'asseoir les garçons dans ce cas.}$$

— Si exactement 5 des 11 garçons s'assoient dans la rangée du fond, on reconnaît une 5-combinaison des 11 garçons pour choisir ceux qui s'assoient dans la rangée du fond, et puis une permutation de ces 5 garçons pour choisir une façon de les asseoir dans les 5 places de la rangée du fond. Et puis, il reste $11-5 = 6$ garçons qui s'assoient comme dans le premier cas. On reconnaît donc une 3-combinaison des 6 garçons restants pour choisir ceux qui s'assoient dans les rangées à gauche, et puis une 3-liste sans répétition des 22 places possibles dans les rangées à gauche, et puis une 3-liste sans répétition des 22 places possibles dans les rangées à droite pour les garçons qui s'assoient dans les rangées à droite. On obtient donc :

$$\binom{11}{5} \times 5! \times \binom{6}{3} \times \frac{22!}{(22-3)!} \times \frac{22!}{(22-3)!} \quad \text{façons d'asseoir les garçons dans ce cas.}$$

Et puis, il reste 35 filles qui peuvent s'asseoir dans les $53-4-11 = 38$ places restantes. On reconnaît une 35-liste sans répétition des 38 places restantes. Finalement, Le nombre de façons différentes d'asseoir tout le monde dans l'autocar est donc égal à :

$$\boxed{\frac{4!}{(4-3)!} \times \left(\begin{array}{c} \binom{11}{1} \times 5 \times \binom{10}{5} \times \frac{22!}{(22-5)!} \times \frac{22!}{(22-5)!} \\ + \binom{11}{3} \times \frac{5!}{(5-3)!} \times \binom{8}{4} \times \frac{22!}{(22-4)!} \times \frac{22!}{(22-4)!} \\ + \binom{11}{5} \times 5! \times \binom{6}{3} \times \frac{22!}{(22-3)!} \times \frac{22!}{(22-3)!} \end{array} \right) \times \frac{38!}{(38-35)!}}.$$

Ce qui fait un total de $\boxed{4!(55\frac{10!22!22!}{5!5!17!17!}+\frac{11!5!8!22!22!}{3!8!2!4!4!18!18!}+\frac{11!22!22!}{3!3!19!19!})\frac{38!}{3!}\approx 3,34\times 10^{62}}$.

Problème 1

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Une p-filtration de E est une p-liste $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p)$ de parties de E telle que $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \subset A_p$. Par exemple $(\emptyset, \emptyset, \{1\}, \{1,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\})$ est une 6-filtration de $\{1,2,3\}$, mais aussi de $\{1,2,3,4\}$. Le but de ce problème est de dénombrer les p-filtrations de E. Pour tout couple d'entiers $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$, on note $F_{n,p}$ le nombre de p-filtrations d'un ensemble à n éléments.

1. *Que vaut $F_{0,p}$? Justifier votre réponse.*

   ▶ Si le cardinal de E vaut $n=0$, alors $E=\emptyset$. Dans ce cas, la seule partie de E est $\emptyset$ et donc la seule p-filtration de E est $(\emptyset, \emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset)$. On en déduit que $\boxed{F_{0,p}=1}$.

2. *À toute p-filtration $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p)$ de l'ensemble $\{1\}$, on associe le nombre :*

$$\varphi(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p) = \operatorname{card}\Big\{i \in [\![1,p]\!] \mid A_i = \emptyset\Big\}.$$

   (a) *Que vaut $\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset, \{1\}, \{1\})$ dans le cas $p=5$?*

   ▶ Si $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) = (\emptyset, \emptyset, \emptyset, \{1\}, \{1\})$ alors :

$$\Big\{i \in [\![1,p]\!] \mid A_i = \emptyset\Big\} = \{1,2,3\} \quad \text{car } A_1 = A_2 = A_3 = \emptyset \text{ et } A_4 = A_5 = \{1\} \neq \emptyset.$$

   Par conséquent :

$$\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset, \{1\}, \{1\}) = \operatorname{card}\Big\{i \in [\![1,p]\!] \mid A_i = \emptyset\Big\} = \operatorname{card}\{1,2,3\} = \boxed{3}.$$

   (b) *Déterminer l'image directe de l'ensemble des p-filtrations de $\{1\}$ par l'application φ.*

   ▶ Puisque les seules parties de l'ensemble $\{1\}$ sont $\emptyset$ et $\{1\}$, les p-filtrations de $\{1\}$ sont de la forme :

$$(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p) = \Big(\underbrace{\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset}_{k \text{ fois}}, \underbrace{\{1\}, \{1\}, \dots, \{1\}}_{p-k \text{ fois}}\Big) \quad \text{où } k \in \{0,1,2,\dots,p\}.$$

   Or on a :

$$\varphi\Big(\underbrace{\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset}_{k \text{ fois}}, \underbrace{\{1\}, \{1\}, \dots, \{1\}}_{p-k \text{ fois}}\Big) = \operatorname{card}\{1,2,\dots,k\} = k.$$

   Par conséquent, l'image directe de l'ensemble des p-filtrations de $\{1\}$ par l'application φ est égal à l'ensemble des valeurs de k possibles, c'est-à-dire $\boxed{\{0,1,2,\dots,p\}}$.

   On peut remarquer que φ atteint son maximum pour $\varphi(\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset) = p$ et son minimum pour $\varphi(\{1\}, \{1\}, \dots, \{1\}) = 0$. L'image directe des p-filtrations de $\{1\}$ est donc égal à l'ensemble des entiers compris entre 0 et p.

   (c) *Montrer que l'application φ est injective.*

   ▶ Soient $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p)$ et $(B_1, B_2, B_3, \dots, B_p)$ deux p-filtrations de $\{1\}$. D'après ce qu'on a vu à la question précédente, il existe donc $k \in \{0,1,2,\dots,p\}$ et $k' \in \{0,1,2,\dots,p\}$ tels que :

$$(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p) = \Big(\underbrace{\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset}_{k \text{ fois}}, \underbrace{\{1\}, \{1\}, \dots, \{1\}}_{p-k \text{ fois}}\Big)$$

$$\text{et} \quad (B_1, B_2, B_3, \dots, B_p) = \Big(\underbrace{\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset}_{k' \text{ fois}}, \underbrace{\{1\}, \{1\}, \dots, \{1\}}_{p-k' \text{ fois}}\Big).$$

On suppose que $\varphi(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p) = \varphi(B_1, B_2, B_3, \dots, B_p)$. Or on a :

$$\varphi(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p) = \varphi\Big(\underbrace{\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset}_{k \text{ fois}}, \underbrace{\{1\}, \{1\}, \dots, \{1\}}_{p-k \text{ fois}}\Big) = k$$

$$\text{et} \quad \varphi(B_1, B_2, B_3, \dots, B_p) = \varphi\Big(\underbrace{\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset}_{k' \text{ fois}}, \underbrace{\{1\}, \{1\}, \dots, \{1\}}_{p-k' \text{ fois}}\Big) = k'.$$

On en déduit que $k = k'$ et donc que $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p) = (B_1, B_2, B_3, \dots, B_p)$. Par conséquent, on a bien montré que $\boxed{\varphi \text{ est injective}}$.

(d) *En déduire la valeur de $F_{1,p}$.*

▶ Par définition de l'image directe et de la surjectivité, l'application φ est une surjection de l'ensemble des p-filtrations de $\{1\}$ vers son image directe. D'après le résultat de la question 2(b), φ est donc une surjection de l'ensemble des p-filtrations de $\{1\}$ vers l'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, p\}$. D'après le résultat de la question précédente, φ est aussi injective. Ainsi, φ est une bijection de l'ensemble des p-filtrations de $\{1\}$ vers l'ensemble $\{0, 1, 2, \dots, p\}$. Par conséquent, le nombre de p-filtrations de l'ensemble $\{1\}$ est égal à $\text{card}\{0, 1, 2, \dots, p\} = p + 1$. On en déduit que :

$$\boxed{F_{1,p} = p + 1}.$$

3. *En remarquant que l'ensemble des 1-filtrations de E est un ensemble du cours, déterminer $F_{n,1}$.*

▶ D'après l'énoncé, une 1-filtration de E est une 1-liste (A_1) de partie de E. Autrement dit, une 1-filtration est une partie $A_1 \subset E$ et l'ensemble des 1-filtrations de E est égal à l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ des parties de E. On en déduit que :

$$F_{n,1} = \text{card}(\mathscr{P}(E)) = 2^{\text{card}(E)} = \boxed{2^n}.$$

4. *Montrer que $F_{n,p} \leqslant 2^{np}$.*

▶ D'après l'énoncé, une p-filtration de E est une p-liste $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p)$ de parties de E telle que $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \subset A_p$. En particulier, l'ensemble des p-filtrations de E est un sous-ensemble de l'ensemble des p-listes $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p)$ de parties de E, c'est-à-dire de l'ensemble $(\mathscr{P}(E))^p$. On en déduit que :

$$F_{n,p} \leqslant \text{card}\Big((\mathscr{P}(E))^p\Big) = \Big(\text{card}(\mathscr{P}(E))\Big)^p = \Big(2^{\text{card}(E)}\Big)^p = \Big(2^n\Big)^p = \boxed{2^{np}}.$$

5. *Dans cette question, on considère le cas $p = 2$.*

(a) *Déterminer toutes les 2-filtrations de l'ensemble $\{1, 2\}$ et en déduire que $F_{2,2} = 9$.*

▶ L'ensemble des parties de $\{1, 2\}$ est :

$$\mathscr{P}(\{1, 2\}) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\Big\}.$$

Les 2-filtrations de $\{1, 2\}$ sont donc :

$$\boxed{\begin{array}{c} (\emptyset, \emptyset),\ (\emptyset, \{1\}),\ (\emptyset, \{2\}),\ (\emptyset, \{1, 2\}), \\ (\{1\}, \{1\}),\ (\{1\}, \{1, 2\}), \\ (\{2\}, \{2\}),\ (\{2\}, \{1, 2\}), \\ \text{et } (\{1, 2\}, \{1, 2\}). \end{array}}$$

On en déduit bien que $\boxed{F_{2,2} = 9}$.

(b) *Dans cette question, on fixe un entier $k \in [\![0, n]\!]$.*

i. Combien y a-t-il de parties $A_2 \subset E$ telles que $\mathrm{card}(A_2) = k$?

▶ Une partie $A_2 \subset E$ telle que $\mathrm{card}(A_2) = k$ est une k-combinaison de E. Il y en a donc :

$$\boxed{\binom{\mathrm{card}(E)}{k} = \binom{n}{k}}.$$

ii. On fixe une partie $A_2 \subset E$ telle que $\mathrm{card}(A_2) = k$. Combien y a-t-il de parties $A_1 \subset A_2$?

▶ Une partie $A_1 \subset A_2$ est une partie de A_2. Il y en a donc :

$$\boxed{\mathrm{card}(\mathscr{P}(A_2)) = 2^{\mathrm{card}(A_2)} = 2^k}.$$

(c) À l'aide des résultats précédents, écrire $F_{n,2}$ sous la forme d'une somme.

▶ D'après l'énoncé, une 2-filtration de E est une 2-liste (A_1, A_2) de parties de E telle que $A_1 \subset A_2$. En particulier, si (A_1, A_2) est une 2-filtration de E alors $\mathrm{card}(A_2) \in [\![0, n]\!]$ car $A_2 \subset E$ et $\mathrm{card}(E) = n$. Autrement dit, $\mathrm{card}(A_2) = 0$ ou bien $\mathrm{card}(A_2) = 1$ ou bien $\mathrm{card}(A_2) = 2$ ou bien, etc., ou bien $\mathrm{card}(A_2) = n$. De plus :

— choisir une 2-filtration (A_1, A_2) de E telle que $\mathrm{card}(A_2) = 0$ revient à choisir une partie $A_2 \subset E$ telle que $\mathrm{card}(A_2) = 0$ et puis une partie $A_1 \subset A_2$, il y en a donc $\binom{n}{0} \times 2^0$ d'après les résultats des deux questions précédentes,

— de même, il y a $\binom{n}{1} \times 2^1$ 2-filtrations (A_1, A_2) de E telles que $\mathrm{card}(A_2) = 1$,

— il y a $\binom{n}{2} \times 2^2$ 2-filtrations (A_1, A_2) de E telles que $\mathrm{card}(A_2) = 2$,

— etc.

— il y a $\binom{n}{n} \times 2^n$ 2-filtrations (A_1, A_2) de E telles que $\mathrm{card}(A_2) = n$.

Finalement, le nombre de 2-filtrations de E est égal à :

$$F_{n,2} = \binom{n}{0} \times 2^0 + \binom{n}{1} \times 2^1 + \binom{n}{2} \times 2^2 + \cdots + \binom{n}{n} \times 2^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} \times 2^k \right) = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k}.$$

Plus précisément, si on note F l'ensemble des 2-filtrations de E et F_k le sous-ensemble des 2-filtrations (A_1, A_2) de E telles que $\mathrm{card}(A_2) = k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on remarque que la famille $(F_0, F_1, F_2, \ldots, F_n)$ forme une partition de F car

$$\bigcup_{k=0}^{n} F_k = F \quad \text{et} \quad \forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2,\ i \neq j \implies F_i \cap F_j = \emptyset.$$

D'après les résultats des deux questions précédentes, on en déduit que :

$$F_{n,2} = \mathrm{card}(F) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{card}(F_k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k.$$

(d) En déduire que $F_{n,2} = 3^n$.

▶ On a d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned} F_{n,2} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} \quad \text{car } 1^{n-k} = 1 \\ &= (2+1)^n \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton} \\ &= \boxed{3^n}. \end{aligned}$$

6. *Pour tout entier $p \geqslant 1$, on pose la proposition suivante :*

$$\mathscr{H}(p) : \text{«il existe une constante } C_p \in \mathbb{R} \text{ telle que pour tout } n \in \mathbb{N},\ F_{n,p} = (C_p)^n\text{».}$$

Le but de cette question est de montrer que cette proposition est héréditaire. Pour cela, on fixe un entier $p \geqslant 1$ et on suppose que la proposition $\mathscr{H}(p)$ est vraie.

(a) *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Combien y a-t-il de $(p+1)$-filtrations $(A_1, A_2, \ldots, A_p, A_{p+1})$ de E telles que $\operatorname{card}(A_{p+1}) = k$? Exprimer ce nombre en fonction de k, n et $F_{k,p}$.*

▶ D'après l'énoncé, une $(p+1)$-filtration de E est une $(p+1)$-liste $(A_1, A_2, \ldots, A_p, A_{p+1})$ de parties de E telle que $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_p \subset A_{p+1}$. En particulier, on remarque que si $(A_1, A_2, \ldots, A_p, A_{p+1})$ est une $(p+1)$-filtration de E alors $(A_1, A_2, \ldots, A_p)$ est une p-filtration de A_{p+1} car $A_1, A_2, \ldots, A_p$ sont des parties de A_{p+1} et $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_p$. Par conséquent, choisir une $(p+1)$-filtrations $(A_1, A_2, \ldots, A_p, A_{p+1})$ de E telle que $\operatorname{card}(A_{p+1}) = k$, revient à choisir :

— une partie A_{p+1} de E telle que $\operatorname{card}(A_{p+1}) = k$, c'est-à-dire que k-combinaison de E, il y en a $\binom{\operatorname{card}(E)}{k} = \binom{n}{k}$,

— et puis une p-filtration $(A_1, A_2, \ldots, A_p)$ de A_{p+1}, il y en a $F_{\operatorname{card}(A_{p+1}),p} = F_{k,p}$.

On en déduit que le nombre de $(p+1)$-filtrations $(A_1, A_2, \ldots, A_p, A_{p+1})$ de E telles que $\operatorname{card}(A_{p+1}) = k$ est égal à :

$$\boxed{\binom{n}{k} \times F_{k,p}}.$$

(b) *Montrer que $F_{n,p+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (C_p)^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

▶ Soit $n \in \mathbb{N}$. On raisonne comme à la question 5(c) en partitionnant l'ensemble des $(p+1)$-filtrations de E par les sous-ensembles des $(p+1)$-filtrations $(A_1, A_2, \ldots, A_p, A_{p+1})$ de E telles que $\operatorname{card}(A_{p+1}) = k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que :

$$F_{n,p+1} = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} \times F_{k,p} \right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{k,p}.$$

Or on a supposé que la proposition $\mathscr{H}(p+1)$ est vraie, c'est-à-dire que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ F_{k,p} = (C_p^k).$$

En reportant dans la somme précédente, on a bien montré que :

$$\boxed{F_{n,p+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (C_p)^k} \quad \text{et ceci est vrai pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(c) *En déduire que $\mathscr{H}(p+1)$ est vraie.*

▶ On a d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ F_{n,p+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (C_p)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (C_p)^k 1^{n-k} \quad \text{car } 1^{n-k} = 1 \\ &= (C_p + 1)^n \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton.} \end{aligned}$$

On pose $C_{p+1} = C_p + 1$. On a donc bien trouvé une constante $C_{p+1} \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_{n,p+1} = (C_{p+1})^n.$$

Par conséquent, $\boxed{\text{la proposition } \mathscr{H}(p+1) \text{ est vraie}}$.

7. *À l'aide du résultat de la question précédente, exprimer C_p en fonction de $p \geqslant 1$.*

▶ On a vu à la question précédente que pour tout entier $p \geqslant 1$:

$$C_{p+1} = C_p + 1.$$

On reconnaît une suite arithmétique. Donc :

$$\forall p \geqslant 1,\ C_p = C_1 + (p-1) \times 1.$$

De plus, on a montré à la question 3 que $F_{n,1} = 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que la proposition $\mathscr{H}(1)$ est vraie en posant $C_1 = 2$. Finalement, on obtient :

$$\forall p \geqslant 1,\ C_p = C_1 + p - 1 = 2 + p - 1 = \boxed{p+1}.$$

8. *Conclure le problème en détaillant votre raisonnement à l'aide des résultats précédents.*

▶ On a vu à la question précédente que la proposition $\mathscr{H}(1)$ est vraie en posant $C_1 = 2$ (d'après le résultat de la question 3). De plus, on a montré à la question 6 que la proposition est héréditaire, c'est-à-dire que $\mathscr{H}(p) \implies \mathscr{H}(p+1)$ pour tout entier $p \geqslant 1$. D'après le principe de récurrence, on en déduit que la proposition $\mathscr{H}(p)$ est vraie pour tout entier $p \geqslant 1$. Ainsi $F_{n,p} = (C_p)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout entier $p \geqslant 1$. Or on a montré à la question précédente que $C_p = p+1$ pour tout entier $p \geqslant 1$. Finalement, on en déduit que le nombre de p-filtrations de E est égal à :

$$\boxed{F_{n,p} = (p+1)^n}.$$

Au lieu de déterminer ce résultat par récurrence (méthode proposée par l'énoncé), on peut également montrer que l'application suivante est une bijection de l'ensemble des p-filtrations de E vers $[\![0,p]\!]^E$:

$$\psi : (A_1, A_2, A_3, \ldots, A_p) \mapsto f \quad \text{où} \quad \begin{array}{rcl} f : E & \to & [\![0,p]\!] \\ x & \mapsto & \operatorname{card}\left\{i \in [\![1,p]\!] \mid x \in A_i\right\} \end{array}$$

dont la bijection réciproque est définie par :

$$\psi^{-1} : f \mapsto (A_1, A_2, A_3, \ldots, A_p) \quad \text{où} \quad \forall i \in [\![1,p]\!],\ A_i = \left\{x \in E \mid f(x) \geqslant p+1-i\right\}.$$

Ainsi, on retrouve que le nombre de p-filtrations de E est égal à :

$$F_{n,p} = \operatorname{card}\left([\![0,p]\!]^E\right) = \left(\operatorname{card}[\![0,p]\!]\right)^{\operatorname{card}(E)} = (p+1)^n.$$

Problème 2
Énoncé et corrigé de V. Vong

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. L'équation $E_m : x^2 - x - m = 0$ est une équation de degré 2 de discriminant $\Delta_m = 1 + 4m$. Il en résulte que :
   — Cas 1 : $m > \frac{-1}{4}$. L'équation a alors exactement 2 solutions réelles.
   — Cas 2 : $m = \frac{-1}{4}$. L'équation a exactement 1 solution réelle.
   — Cas 3 : $m < \frac{-1}{4}$. L'équation n'a pas de solution réelle.

2.
```
def nb_sol(m) :
    if m>(-1/4) :
        return 2
    elif m==(-1/4) :
        return 1
    else :
        return 0
```

3. — Résolvons $E_1 : x^2 - x - 1 = 0$. On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$. On en déduit que les solutions de E_1 sont exactement :

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Donc $\boxed{S = \{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\}}$

— Résolvons $E_{\frac{-1}{3}} : x^2 - x + \frac{1}{3} = 0$. On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$. On en déduit que les solutions de E_1 sont exactement :

$$x_1 = \frac{1 - i\frac{1}{\sqrt{3}}}{2}, x_2 = \frac{1 + i\frac{1}{\sqrt{3}}}{2}.$$

— Résolvons $E_{-\frac{1}{4}} : x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$. Or $E_{-\frac{1}{4}}$ est équivalente à

$$(x - \frac{1}{2})^2 = 0.$$

Il en résulte que la solution de $E_{-\frac{1}{4}}$ est $\frac{1}{2}$.

4. Soit la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\alpha_0 = 2, \alpha_1 = 3, \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} - \frac{1}{4}\alpha_n$.

(a) (INFO) Pour `alpha(3)`, la valeur de u_0 n'étant pas modifié, la valeur de retour est 2. Pour `alphabis(3)`, u prenant la valeur 3, n'étant pas modifié au sein de la boucle, le return étant dans celle-ci, il en résulte que la valeur de retour est 3.

(b) (INFO) Voici la fonction `alphater(n)` :

```
def alphater(n) :
    alpha0=2
    alpha1=3
    for i in range(n) :
        u=alpha1
        alpha1=alpha1-(1/4)*alpha0
        alpha0=u
    return alpha0
```

(c) La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite récurrente linéaire d'ordre 2 ayant comme équation caractéristique $E_{\frac{-1}{4}}$, il en résulte qu'il existe A, B des réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = (A + nB)(\frac{1}{2})^n.$$

En effet, d'après la question 3, $\frac{1}{2}$ est solution double de $E_{\frac{-1}{4}}$. Déterminons A, B à l'aide des conditions initiales :

$$\begin{cases} A & = 2 \\ \frac{A+B}{2} & = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 4 \end{cases}$$

On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \alpha_n = (2+4n)(\frac{1}{2})^n = (1+2n)(\frac{1}{2})^{n-1}}$

(d) En posant $a = 2, b = 3, m = \frac{-1}{4}$, la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors un élément de $S_m(a,b)$ par définition.

5. Soit la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\beta_0 = 0, \beta_1 = 4, \forall n \in \mathbb{N}, \beta_{n+2} = \beta_{n+1} - \frac{1}{3}\beta_n$.

(a) (INFO) Voici la fonction `beta(n)` :

```
def beta(n) :
    beta0=0
    beta1=4
    for i in rangen(n) :
        u=beta1
        beta1=beta1-(1/3)*beta0
        beta0=u
    return beta0
```

(b) La suite $(\beta)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite récurrente linéaire d'ordre 2 ayant comme équation caractéristique $E_{\frac{-1}{3}}$, il en résulte qu'il existe A, B des réels tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \beta_n = (\frac{\sqrt{3}}{3})^n \left(A\cos(n\frac{\pi}{6}) + B\sin(\frac{n\pi}{6})\right).$$

En effet, d'après la question 3, $\frac{\sqrt{3}}{3}e^{\frac{i\pi}{6}}$ est une solution complexe de $E_{\frac{-1}{3}}$.
Déterminons A, B à l'aide des conditions initiales :

$$\begin{cases} A & = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3}(A\frac{\sqrt{3}}{2} + B\frac{1}{2}) & = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{24}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

On a donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \beta_n = (\frac{\sqrt{3}}{3})^n \cdot \frac{24}{\sqrt{3}}\sin(\frac{n\pi}{6}) = (\frac{\sqrt{3}}{3})^{n-1} 8\sin(\frac{n\pi}{6})}$

(c) Par définition, $(\beta)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $S_{\frac{-1}{3}}(0,4)$. Montrons que $S_{-\frac{1}{3}}(0,4)$ contient comme unique élément la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $S_{\frac{-1}{3}}(0,4)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P(n) : u_n = \beta_n.$$

— Initialisation :
Pour $n = 0, n = 1$, par définition de $S_{\frac{-1}{3}}(0,4)$, on a $u_0 = 0 = \beta_0, u_1 = 4 = \beta_1$.

— Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ et $P(n+1)$ vraies. Montrons que $P(n+2)$ est vraies.
Par définition de u_{n+2}, on a

$$u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$$

Or d'après $P(n)$ et $P(n+1)$, $u_n = \beta_n, u_{n+1} = \beta_{n+1}$. Donc

$$u_{n+2} = \beta_{n+1} - \frac{1}{3}\beta_n.$$

Or par définition de β_{n+2}, on a $\beta_{n+2} = \beta_{n+1} - \frac{1}{3}\beta_n$. D'où $u_{n+2} = \beta_{n+2}$.
$P(n+2)$ est donc vraie.

— Conclusion : d'après le principe de récurrence, il en résulte que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \beta_n.$$

On en déduit que $S_{\frac{-1}{3}}(0,4)$ contient comme unique élément $(\beta)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. On définit la suite de Lucas $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $L_0 = 2, L_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$.

   (a) La suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 ayant comme équation caractéristique E_1. Celle-ci ayant pour solutions $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ d'après la question 3, il en résulte qu'il existe A, B des réels tels que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, L_n = A\phi^n + B\psi^n.$$
   Déterminons A et B à l'aide des conditions initiales :
   $$\begin{cases} A + B & = 2 \\ A\frac{1+\sqrt{5}}{2} + B\frac{1-\sqrt{5}}{2} & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{A+B}{2} & = 1 \\ \frac{A+B}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}(A-B) & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{A+B}{2} & = 1 \\ 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}(A-B) & = 1 \end{cases}$$
   Il en résulte que le système est équivalent à
   $$\begin{cases} \frac{A+B}{2} & = 1 \\ \frac{\sqrt{5}}{2}(A-B) & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{A+B}{2} & = 1 \\ A & = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ A = B \end{cases} (A = B) \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases} (A = B)$$
   D'où : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\boxed{L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$.

   (b) (INFO) Voici une fonction `Lucas(n)` calculant L_n :

```
def lucas(n) :
    return ((1+5**(0.5))/2)**n+((1-5**(0.5))/2)**n
```

   (c) Soient a, b, m des réels. Supposons que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $S_m(a, b)$. Par définition, $L_0 = a, L_1 = b$. Mais $L_0 = 2$ et $L_1 = 1$. Donc $\underline{a = 2}$ et $\underline{b = 1}$. Par définition, on a aussi $L_2 = L_0 + mL_1$. Mais $L_2 = 3, L_0 = 2, L_1 = 1$. D'où
   $$3 = 2 + m.$$
   Donc $\underline{m = 1}$.

7. Soient m, a, b des réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $S_m(a, b)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on souhaite simplifier $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

   (a) (INFO) Voici la fonction `suite` :

```
def suite(a,b,m,n) :
    u0=a
    u1=b
    for i in range(n) :
        u=u1
        u1=u1+m*u0
        u0=u
    return u0
```

   (b) (INFO) Soient $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}$. Constatons que dans la fonction, on ajoute à S toujours la même valeur : u_n, où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $S_m(a, b)$. De plus, on effectue $n + 1$ fois cet ajout. Ainsi, la valeur de retour est $(n + 1)u_n$

```
def somme(a,b,m,n) :
    S=0
    for i in range(n+1) :
        S=S+suite(a,b,m,n)
    return S
```

Pour obtenir la somme voulue, il suffit de remplacer n par i dans la boucle :

```
def somme(a,b,m,n) :
    S=0
    for i in range(n+1) :
        S=S+suite(a,b,m,i)
    return S
```

(c) Cas 1 : $m = 0$.

i. $\sum_{k=0}^{0} u_k = u_0 = a, \sum_{k=0}^{1} = a + b, \sum_{k=0}^{2} u_k = a + b + b = a + 2b.$

ii. Constatons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+2} = u_{n+1}$. Ainsi, la suite est constante à partir du rang 1. D'où, pour tout $n \geq 2$,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = a + \sum_{k=1}^{n} b = a + nb.}$$

(d) Cas 2 : $m \neq 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n} \frac{u_{k+2} - u_{k+1}}{m} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{n} (u_{k+2} - u_{k+1})\end{aligned}$$

On reconnaît une somme télescopique, d'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} u_k &= \frac{1}{m}(u_{n+2} - u_1) \\ &= \boxed{\frac{1}{m}(u_{n+2} - b)}\end{aligned}$$

(e) Soit $n \in \mathbb{N}$. Chacune des trois suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant respectivement dans $S_{\frac{-1}{3}}(2,3)$, $S_{\frac{-1}{4}}(0,4)$, $S_1(2,1)$,
on peut appliquer le résultat de la question 7.d. obtient alors

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = -3(\alpha_{n+2} - 3), \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -4(\beta_{n+2} - 4), \sum_{k=0}^{n} L_k = (L_{n+2} - 1)$$

Or, d'après les questions 4.c, 5.b, 6.a,

$$\alpha_{n+2} = (2n+5)(\frac{1}{2})^{n+1}, \beta_{n+2} = (\frac{\sqrt{3}}{3})^{n+1} 8 \sin(\frac{(n+2)\pi}{6}), L_{n+2} = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2} + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = -3(2n+5)(\frac{1}{2})^{n+1} + 9, \sum_{k=0}^{n} \beta_k = -32(\frac{\sqrt{3}}{3})^{n+1} \sin(\frac{(n+2)\pi}{6}) + 16, \sum_{k=0}^{n} L_k = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2} + (}$$

8. Dans cette question, on cherche à simplifier diverses sommes faisant intervenir la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à la question 6.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} L_{2k} &= \sum_{k=0}^{n} (\phi^{2k} + \psi^{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (\phi^2)^k + \sum_{k=0}^{n} (\psi^2)^k\end{aligned}$$

On reconnaît deux sommes de termes consécutifs de suites géométrique de raison différent de 1, d'où

$$\sum_{k=0}^{n} L_{2k} = \frac{1 - (\phi^2)^{n+1}}{1 - \phi^2} + \frac{1 - (\psi^2)^{n+1}}{1 - \psi^2}$$

Or $\phi^2-\phi-1=0, \psi^2-\psi-1=0$. Donc

$$\sum_{k=0}^{n} L_{2k} = \frac{1-(\phi^2)^{n+1}}{-\phi} + \frac{1-(\psi^2)^{n+1}}{-\psi}$$

Or $\phi\psi=-1, \phi+\psi=1$. D'où, en réduisant au même dénominateur :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} L_{2k} &= -\psi(\phi^2)^{n+1}+\psi+\phi-\phi(\psi^2)^{n+1} \\ &= \phi^{2n+1}+\psi^{2n+1}+1 \\ &= \underline{1+L_{2n+1}} \\ &= \boxed{1+(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n+1}+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n+1}}.\end{aligned}$$

Autre preuve :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} L_{2k} &= L_0+\sum_{k=1}^{n} L_{2k}. \\ &= L_0+\sum_{k=1}^{n}(L_{2k-1}+L_{2k-2}) && \text{récurrence de } (L_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= L_0+\sum_{k=0}^{2n-1} L_k && \text{on reconnaît la somme des indices pairs et impairs} \\ &= L_0+L_{2n+1}-L_1 && \text{d'après la question7.d} \\ &= 1+L_{2n+1} && \text{en remplaçant par les valeurs.}\end{aligned}$$

Calculons $\sum_{k=0}^{n} L_{2k+1}$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} L_{2k+1} &= \sum_{k=0}^{n}(\phi^{2k+1}+\psi^{2k+1}) \\ &= \phi\sum_{k=0}^{n}\phi^{2k}+\psi\sum_{k=0}^{n}\psi^{2k}\end{aligned}$$

On reconnaît deux sommes de termes consécutifs de suites géométriques de raison différente de 1. D'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} L_{2k+1} &= \phi\tfrac{1-\phi^{2n+2}}{1-\phi^2}+\psi\tfrac{1-\psi^{2n+2}}{1-\psi^2} \\ &= \phi^{2n+2}-1+\psi^{2n+2}-1 \\ &= \underline{L_{2n+2}-2} \\ &= \boxed{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n+2}+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n+2}-2.}\end{aligned}$$

(b) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}L_n^2 &= (\phi^n+\psi^n)^2 \\ &= \phi^{2n}+2\phi^n\psi^n+\psi^{2n} \\ &= L_{2n}+2(-1)^n\end{aligned}$$

D'où $\boxed{L_{2n}=L_n^2-2\cdot(-1)^n}$.

De même,

$$\begin{aligned}L_nL_{n+1} &= (\phi^n+\psi^n)(\phi^{n+1}+\psi^{n+1}) \\ &= \phi^{2n+1}+(\phi\psi)^n\psi+(\psi\phi)^n\phi+\psi^{2n+1} \\ &= L_{2n+1}+(-1)^n(\phi+\psi) && \text{car } \phi\psi=-1 \\ &= L_{2n+1}+(-1)^n && \text{car } \phi+\psi=1\end{aligned}$$

D'où $\boxed{L_{2n+1}=L_nL_{n+1}-(-1)^n}$.

(c) (INFO) Écrire en python une fonction correspondant au pseudo-code suivant : Voici la fonction correspondante :

```
def liste_lucas(n) :
    if n==0 :
        return  [2]
    elif n==1 :
        return [2,1]
    else :
        L=[2,1]
        for  i in range(n) :
            if i%2==0 :
                S= L[i//2]**2-2 (-1)**(i//2)
            else :
                S=L[i//2]*L[(i//2)+1]-(-1)**(i//2)
            L.append(S)
        return L
```

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} L_k^2 &= \sum_{k=0}^{n}(L_{2k} + 2(-1)^k) && \text{(question 8c)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} L_{2k} + 2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \\
&= L_{2n+1} + 1 + 1 - (-1)^{n+1} \\
&= L_{2n+1} + 2 + (-1)^{n+2} \\
&= \boxed{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n+1} + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n+1} + 2 + (-1)^{n+2}}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} L_k L_{k+1} &= \sum_{k=0}^{n}(L_{2k+1} + (-1)^k) && \text{(question 8c)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} L_{2k+1} + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \\
&= L_{2n+2} - 2 + \tfrac{1-(-1)^{n+1}}{2} \\
&= L_{2n+2} - \tfrac{3+(-1)^{n+1}}{2} \\
&= \boxed{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n+2} + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n+2} - \frac{3+(-1)^{n+1}}{2}}
\end{aligned}$$

(e) (INFO) Voici la fonction `somme1` :

```
def somme1(n) :
    S=0
    for i in range(n+1) :
        for j in range(n+1) :
            S=S+Lucas(i)*Lucas(j)
    return S
```

(f) (INFO) Voici la fonction `somme2` :

```
def somme2(n) :
    S=0
    for i in range(n+1) :
        for j in range(i,n+1) :
            S=S+Lucas(i)*Lucas(j)
    return S
```

(g) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{0\leq i,j\leq n} L_iL_j &= \textstyle\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n L_iL_j \\
&= (\textstyle\sum_{i=0}^n L_i)(\sum_{j=0}^n L_j) \\
&= \underline{(L_{n+2}-1)^2} \\
&= \boxed{\left((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2}+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}-1\right)^2}
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{0\leq i\leq j} L_iL_j &= \textstyle\sum_{j=0}^n L_j \sum_{i=0}^j L_i \\
&= \textstyle\sum_{j=0}^n L_j(L_{j+2}-1) \\
&= \textstyle\sum_{j=0}^n L_j(L_j+L_{j+1}-1), \text{ en effet } L_j+L_{j+1}=L_{j+2} \\
&= \textstyle\sum_{j=0}^n (L_j)^2+\sum_{j=0}^n L_jL_{j+1}-\sum_{j=0}^n L_j \\
&= L_{2n+1}+2+(-1)^{n+2}+L_{2n+2}-\tfrac{3+(-1)^{n+1}}{2}-(L_{n+2}-1) \\
&= L_{2n+3}-L_{n+2}+\tfrac{3(-1)^{n+2}+5}{2} \\
&= \boxed{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{2n+3}+(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{2n+3}-(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}+\frac{3(-1)^{n+2}+5}{2}}
\end{aligned}$$

DS n$^{\text{o}}$ 4 de mathématiques

durée : 3 heures

Exercice 1

On considère l'application suivante :

$$f : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (4x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 2x_4, -x_1 + x_2 - x_3 + x_4, -x_1 + x_2 - x_3 + x_4, 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4).$$

Déterminer toutes les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'application $f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ n'est pas bijective.

Problème 1

Dans tout ce problème, on fixe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et on désigne par P la fonction polynomiale $P : x \mapsto ax^2+bx+c$. Le premier but de ce problème est de déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + P(x). \qquad (\mathrm{E}^+)$$

1. Dans cette question, on suppose l'existence d'une fonction continue f solution de (E^+).
   (a) Calculer $f(0)$.
   (b) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$ en fonction de f, a, b, c et $x \in \mathbb{R}$.
   (c) En déduire la fonction f.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions continues solutions de (E^+).

Le deuxième but de problème est de déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t + P(x). \qquad (\mathrm{E}^-)$$

3. Dans cette question, on suppose l'existence d'une fonction continue f solution de (E^-).
   (a) Calculer $f(0)$.
   (b) Justifier l'existence d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f(x)$ en fonction de F, P et $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$ en fonction de f, a, b, c et $x \in \mathbb{R}$.
   (d) Calculer $f'(0)$.
   (e) Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f''(x)$ en fonction de f', a, b, c et $x \in \mathbb{R}$.
   (f) Montrer que $f''(x) + f(x) = 2a(1 - x) + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (g) En déduire la fonction f.
4. Déterminer l'ensemble des fonctions continues solutions de (E^-).

Exercice 2

Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 3^s \cos(2\pi s)\mathrm{d}s, \quad I_2 = \int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 4x + 7} \quad \text{et} \quad I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos(\theta) + 1} \quad \text{en posant } t = \tan(\theta/2).$$

Problème 2

On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ admet une «décomposition LU» lorsqu'il est possible de l'écrire sous la forme $A = LU$ où :

- $L \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire inférieure ("Lower" en anglais) dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1, c'est-à-dire de la forme :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_1 & 1 & 0 \\ \ell_2 & \ell_3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } (\ell_1, \ell_2, \ell_3) \in \mathbb{R}^3$$

- $U \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire supérieure ("Upper" en anglais), c'est-à-dire de la forme :

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & u_6 \end{pmatrix} \quad \text{avec } (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \in \mathbb{R}^6.$$

1. Calculer le produit LU en fonction des coefficients $\ell_1, \ell_2, \ell_3, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$.
2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ admet-elle une décomposition LU ? Justifier votre réponse.
3. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 13 \end{pmatrix}$ admet au moins deux décompositions LU différentes.
4. Dans cette question, on considère l'exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
   (b) En déterminant les matrices L et U, montrer que A admet une unique décomposition LU.
   (c) Inverser L et U puis retrouver A^{-1} à l'aide de L^{-1} et U^{-1}.

Dans les questions suivantes, on revient au cas général $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

5. Dans cette question, on suppose que A admet une décomposition LU.
   (a) Justifier que L est inversible.
   (b) En déduire que A est inversible si et seulement si $u_1 u_4 u_6 \neq 0$.
6. Dans cette question, on suppose que $a \neq 0$ et que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ est inversible.
   (a) Montrer que A admet une unique décomposition LU.
   (b) À l'aide des résultats précédents, en déduire que A est inversible si et seulement si

$$aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh \neq 0.$$

   Comment appelleriez-vous la quantité $aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$ pour la matrice A ?

Corrigé du DS n$^{\text{o}}$ 4 de mathématiques

Exercice 1

On considère l'application suivante :

$f : (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (4x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 2x_4, -x_1 + x_2 - x_3 + x_4, -x_1 + x_2 - x_3 + x_4, 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4).$

Déterminer toutes les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'application $f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ n'est pas bijective.

► L'application $f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ est bijective si et seulement si l'équation

$$(f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

d'inconnue $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ admet une unique solution pour tout $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$. Or on a :

$$\begin{aligned}
& (f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4})(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3, y_4) \\
\iff & f(x_1, x_2, x_3, x_4) - \lambda(x_1, x_2, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3, y_4) \\
\iff & (4x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 2x_4, -x_1 + x_2 - x_3 + x_4, -x_1 + x_2 - x_3 + x_4, 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4) \\
& \qquad - (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4) = (y_1, y_2, y_3, y_4) \\
\iff & \left\{ \begin{aligned} 4x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 - \lambda x_1 &= y_1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - \lambda x_2 &= y_2 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - \lambda x_3 &= y_3 \\ 3x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 - \lambda x_4 &= y_4 \end{aligned} \right. \\
\iff & \left\{ \begin{array}{ccccc} (4-\lambda)x_1 & -4x_2 & +6x_3 & -2x_4 & = y_1 \\ -x_1 & +(1-\lambda)x_2 & -x_3 & +x_4 & = y_2 \\ -x_1 & +x_2 & +(-1-\lambda)x_3 & +x_4 & = y_3 \\ 3x_1 & -3x_2 & +5x_3 & +(-1-\lambda)x_4 & = y_4 \end{array} \right. \\
\iff & \underbrace{\begin{pmatrix} (4-\lambda) & -4 & 6 & -2 \\ -1 & (1-\lambda) & -1 & 1 \\ -1 & 1 & (-1-\lambda) & 1 \\ 3 & -3 & 5 & (-1-\lambda) \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}}_{Y} \iff AX = Y.
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'application $f - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ est bijective si et seulement si la matrice A est inversible. Il suffit donc de calculer le rang de A à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

> *Pour résoudre un système linéaire, pensez à utiliser son équivalent matriciel pour gagner du temps. De plus, il est inutile ici de résoudre le système puisqu'on s'intéresse seulement au nombre de solutions. Le calcul du rang est donc suffisant et on peut oublier les seconds membres.*

$$A=\begin{pmatrix} (4-\lambda) & -4 & 6 & -2 \\ -1 & (1-\lambda) & -1 & 1 \\ -1 & 1 & (-1-\lambda) & 1 \\ 3 & -3 & 5 & (-1-\lambda) \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & (1-\lambda) & -1 & 1 \\ (4-\lambda) & -4 & 6 & -2 \\ -1 & 1 & (-1-\lambda) & 1 \\ 3 & -3 & 5 & (-1-\lambda) \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2+(4-\lambda)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & (1-\lambda) & -1 & 1 \\ 0 & \star & (2+\lambda) & (2-\lambda) \\ 0 & \lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & -3\lambda & 2 & (2-\lambda) \end{pmatrix}$$

où $\star = -4+(4-\lambda)(1-\lambda) = -4+4-\lambda-4\lambda+\lambda^2 = \lambda(\lambda-5)$

<u>1^er^ cas</u> : $\lambda = 0$. Alors la matrice A est équivalente à

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \; L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \; \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\mathrm{rang}(A) = 2$ n'est pas maximal. On en déduit que A n'est pas inversible et donc que l'application $f-\lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^4} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ n'est pas bijective.
<u>2^e^ cas</u> : $\lambda \neq 0$. Alors la matrice A est équivalente à

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & (1-\lambda) & -1 & 1 \\ 0 & \lambda(\lambda-5) & (2+\lambda) & (2-\lambda) \\ 0 & \lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & -3\lambda & 2 & (2-\lambda) \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftrightarrow \frac{1}{\lambda}L_3 \quad \text{car } \lambda \neq 0 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & (1-\lambda) & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-5) & (2+\lambda) & (2-\lambda) \\ 0 & -3\lambda & 2 & (2-\lambda) \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - \lambda(\lambda-5)L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3\lambda L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & (1-\lambda) & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \star & (2-\lambda) \\ 0 & 0 & (2-3\lambda) & (2-\lambda) \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4 \\ \\ \end{matrix}$$

où $\star = (2+\lambda)+\lambda(\lambda-5) = 2+\lambda+\lambda^2-5\lambda = \lambda^2-4\lambda+2$

N'hésitez pas à utiliser des opérations intermédaires sur les lignes dans la méthode du pivot de Gauss pour simplifier vos calculs. Ici, on remarque que $L_3 - L_4$ permet de simplifier la troisième ligne.

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & (1-\lambda) & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda^2-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & (2-3\lambda) & (2-\lambda) \end{pmatrix} \; L_3 \leftarrow \frac{1}{\lambda}L_3 \quad \text{car } \lambda \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & (1-\lambda) & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & (2-3\lambda) & (2-\lambda) \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_3 \end{matrix}$$

Même commentaire ici. L'opération L_4+3L_3 n'est pas dans l'algorithme de la méthode du pivot de Gauss mais elle permet de gagner du temps ensuite car on remarque qu'elle fait apparaître un pivot qui ne dépend pas du paramètre λ.

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & (1-\lambda) & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & -1 & (2-\lambda) \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftrightarrow L_4 \\ L_4 \leftrightarrow L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & (1-\lambda) & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & (2-\lambda) \\ 0 & 0 & (\lambda-1) & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftrightarrow L_4+(\lambda-1)L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{-1} & (1-\lambda) & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & (2-\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{(\lambda-1)(2-\lambda)} \end{pmatrix}$$

<u>1er sous-cas</u> : $(\lambda-1)(2-\lambda)=0 \iff (\lambda=1 \text{ ou } \lambda=2)$. Alors $\text{rang}(A)=3$ n'est pas maximal. On en déduit que A n'est pas inversible et donc que l'application $f-\lambda\text{Id}_{\mathbb{R}^4}:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ n'est pas bijective.
<u>2e sous-cas</u> : $(\lambda-1)(2-\lambda)\neq 0 \iff (\lambda\neq 1 \text{ et } \lambda\neq 2)$. Alors $\text{rang}(A)=4$ est maximal. On en déduit que A est inversible et donc que l'application $f-\lambda\text{Id}_{\mathbb{R}^4}:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ est bijective.
<u>Conclusion</u>. L'application $f-\lambda\text{Id}_{\mathbb{R}^4}:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ n'est pas bijective si et seulement si $\boxed{\lambda\in\{0,1,2\}}$.

Problème 1

Dans tout ce problème, on fixe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et on désigne par P la fonction polynomiale $P:x\mapsto ax^2+bx+c$. Le premier but de ce problème est de déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+P(x). \tag{E$^+$}$$

1. *Dans cette question, on suppose l'existence d'une fonction continue f solution de (E^+).*
   (a) *Calculer $f(0)$.*
   ▶ On a :
   $$f(0)=\int_0^0 f(t)\mathrm{d}t+P(0)=0+a0^2+b0+c=\boxed{c}.$$

   (b) *Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$ en fonction de f, a, b, c et $x\in\mathbb{R}$.*
   ▶ Puisque la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, f admet des primitives sur $\mathbb{R}$ d'après le théorème fondamental de l'analyse. Par définition, $F:x\mapsto\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0. Donc F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'=f$. D'autre part, P est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale. On en déduit que $\boxed{f=F+P \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, on a :
   $$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=F'(x)+P'(x)=\boxed{f(x)+2ax+b}.$$

   (c) *En déduire la fonction f.*
   ▶ D'après le résultat de la question précédente, on a :
   $$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)-f(x)=2ax+b.$$

On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. L'équation différentielle linéaire homogène associée est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) - y(x) = 0.$$

Ses solutions sont de la forme :

$$y_{\mathrm{H}} : x \mapsto \lambda \exp(-(-1)x) = \lambda e^x \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ est une constante.}$$

Puis on cherche une solution particulière de l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) - y(x) = 2ax + b.$$

Analyse. On cherche une solution particulière de la forme $y_{\mathrm{P}} : x \mapsto \alpha x + \beta$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2ax + b = y_{\mathrm{P}}'(x) - y_{\mathrm{P}}(x) = \alpha - (\alpha x + \beta) = -\alpha x + (\alpha - \beta).$$

Par identification des coefficients de polynômes, on obtient :

$$\begin{cases} 2a = -\alpha \\ b = \alpha - \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -2a \\ \beta = \alpha - b = -2a - b \end{cases}$$

Synthèse. On pose $y_{\mathrm{P}} : x \mapsto -2ax - 2a - b$. D'après les calculs faits dans l'analyse, y_{P} est bien une solution particulière de l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y'(x) - y(x) = 2ax + b.$$

D'après le principe de superposition, on en déduit que toutes les solutions de cette équation sont de la forme :

$$y : x \mapsto y(x) = y_{\mathrm{H}}(x) + y_{\mathrm{P}}(x) = \lambda e^x - 2ax - 2a - b \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ est une constante.}$$

D'après le résultat de la question précédente, on en déduit qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que :

$$f : x \mapsto \lambda e^x - 2ax - 2a - b.$$

Or on a d'après le résultat de la question 1(a) :

$$c = f(0) = \lambda e^0 - 2a0 - 2a - b = \lambda - 2a - b \iff \lambda = 2a + b + c.$$

Finalement, on a :

$$\boxed{f : x \mapsto (2a + b + c)e^x - 2ax - 2a - b}.$$

2. *Déterminer l'ensemble des fonctions continues solutions de* (E^+).

► D'après le résultat de la question précédente, on a montré que si une fonction f continue est solution de (E^+) alors f est égale à la fonction $x \mapsto (2a + b + c)e^x - 2ax - 2a - b$. Autrement dit, on a montré que l'ensemble des fonctions continues solutions de (E^+) est inclus dans l'ensemble $\{x \mapsto (2a+b+c)e^x - 2ax - 2a - b\}$. Réciproquement, si on pose $f : x \mapsto (2a+b+c)e^x - 2ax - 2a - b$ alors on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + P(x) \\
=&\int_0^x \Big((2a + b + c)e^t - 2at - 2a - b\Big)\mathrm{d}t + ax^2 + bx + c \\
=&\Big[(2a + b + c)e^t - 2a\tfrac{t^2}{2} - 2at - bt\Big]_0^x + ax^2 + bx + c \quad \text{par linéarité} \\
=&\Big((2a + b + c)e^x - ax^2 - 2ax - bx\Big) - \Big((2a + b + c)1 - 0 - 0 - 0\Big) + ax^2 + bx + c \\
=&(2a + b + c)e^x - 2ax - 2a - b = f(x).
\end{aligned}$$

Donc f est bien solution de (E^+). De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Par double inclusion, on en déduit que l'ensemble des fonctions continues solutions de (E^+) est égal au singleton :

$$\boxed{\left\{x \mapsto (2a+b+c)e^x - 2ax - 2a - b\right\}}.$$

Rédigez précisément votre réponse pour montrer que vous avez compris le raisonnement par double inclusion.

Le deuxième but de problème est de déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t + P(x). \qquad (E^-)$$

3. *Dans cette question, on suppose l'existence d'une fonction continue f solution de (E^-).*

(a) *Calculer $f(0)$.*

▶ On a :

$$f(0) = \int_0^{-0} f(t)\mathrm{d}t + P(0) = 0 + a0^2 + b0 + c = \boxed{c}.$$

(b) *Justifier l'existence d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f(x)$ en fonction de F, P et $x \in \mathbb{R}$.*

▶ Puisque la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, $\boxed{f \text{ admet des primitives sur } \mathbb{R}}$ d'après le théorème fondamental de l'analyse. Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Alors, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t + P(x) = \Big[F(t)\Big]_0^{-x} + P(x) = \boxed{F(-x) - F(0) + P(x)}.$$

(c) *Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$ en fonction de f, a, b, c et $x \in \mathbb{R}$.*

▶ Par définition des primitives, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$. Donc la fonction $x \mapsto F(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut $x \mapsto -F'(-x) = -f(-x)$. D'autre part, $-F(0)$ et P sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme fonctions constante et polynomiale. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -F'(-x) - 0 + P'(x) = \boxed{-f(-x) + 2ax + b}.$$

(d) *Calculer $f'(0)$.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$f'(0) = -f(0) + 2a0 + b = \boxed{-c+b}$$

car $f(0) = c$ d'après le résultat de la question 3(a).

(e) *Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f''(x)$ en fonction de f', a, b, c et $x \in \mathbb{R}$.*

▶ Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après le résultat de la question 3(c), la fonction $x \mapsto -f(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut $x \mapsto -(-f'(-x)) = f'(-x)$. D'autre part, $x \mapsto 2ax + b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale. D'après le résultat de la question 3(c), on en déduit que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc que $\boxed{f \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}}$. De plus, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = -(-f'(-x)) + 2a = \boxed{f'(-x) + 2a}.$$

(f) Montrer que $f''(x)+f(x)=2a(1-x)+b$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

▶ On a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f''(x)+f(x) &= f'(-x)+2a+f(x) \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}\\ &= -f(-(-x))+2a(-x)+b+2a+f(x) \quad \text{d'après le résultat de la question 3(c)}\\ &= -f(x)-2ax+b+2a+f(x)\\ &= \boxed{2a(1-x)+b}. \end{aligned}$$

(g) En déduire la fonction f.

▶ Au résultat de la question précédente, on reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. L'équation différentielle linéaire homogène associée est :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad y''(x)+y(x)=0.$$

L'équation caractéristique associée est $r^2+1=0 \iff r^2=-1$ d'inconnue $r\in\mathbb{C}$. Elle admet deux solutions complexes conjuguées : $i=0+1i$ et $-i=0-1i$. On en déduit que les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène associée sont de la forme :

$$y_{\mathrm{H}} : x\mapsto e^{0x}\Big(A\cos(1x)+B\sin(1x)\Big)=A\cos(x)+B\sin(x) \quad \text{où } (A,B)\in\mathbb{R}^2 \text{ sont deux constantes.}$$

Puis on cherche une solution particulière de l'équation différentielle :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad y''(x)+y(x)=2a(1-x)+b=-2ax+(2a+b).$$

Analyse. On cherche une solution particulière de la forme $y_{\mathrm{P}} : x\mapsto \alpha x+\beta$ où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Alors :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad -2ax+(2a+b)=y_{\mathrm{P}}''(x)+y_{\mathrm{P}}(x)=0+\alpha x+\beta.$$

Par identification des coefficients de polynômes, on obtient :

$$\begin{cases} -2a=\alpha\\ 2a+b=\beta \end{cases}$$

Synthèse. On pose $y_{\mathrm{P}} : x\mapsto -2ax+2a+b$. D'après les calculs faits dans l'analyse, y_{P} est bien une solution particulière de l'équation différentielle :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad y''(x)+y(x)=2a(1-x)+b=-2ax+(2a+b).$$

D'après le principe de superposition, on en déduit que toutes les solutions de cette équation sont de la forme :

$$y : x\mapsto y(x)=y_{\mathrm{H}}(x)+y_{\mathrm{P}}(x)=A\cos(x)+B\sin(x)-2ax+2a+b$$

où $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ sont deux constantes. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit qu'il existe deux constantes $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ telles que :

$$f : x\mapsto A\cos(x)+B\sin(x)-2ax+2a+b.$$

Or on a d'après les résultats des questions 3(a) et 3(d) :

$$\begin{cases} c=f(0)=A\cos(0)+B\sin(0)-2a0+2a+b=A+2a+b\\ -c+b=f'(0)=-A\sin(0)+B\cos(0)-2a=B-2a \end{cases} \iff \begin{cases} A=-2a-b+c\\ B=2a+b-c \end{cases}$$

Finalement, on a :

$$\boxed{f : x\mapsto (-2a-b+c)\cos(x)+(2a+b-c)\sin(x)-2ax+2a+b}.$$

4. *Déterminer l'ensemble des fonctions continues solutions de* (E^-)*.*

► Dans la question précédente, on a montré que l'ensemble des fonctions continues solutions de (E^-) est inclus dans l'ensemble $\{x \mapsto (-2a-b+c)\cos(x)+(2a+b-c)\sin(x)-2ax+2a+b\}$. Réciproquement, si on pose $f : x \mapsto (-2a-b+c)\cos(x)+(2a+b-c)\sin(x)-2ax+2a+b$ alors on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t + P(x)\\
=&\int_0^{-x}\Big((-2a-b+c)\cos(t)+(2a+b-c)\sin(t)-2at+2a+b\Big)\mathrm{d}t + ax^2+bx+c\\
=&\Big[(-2a-b+c)\sin(t)-(2a+b-c)\cos(t)-2a\tfrac{t^2}{2}+2at+bt\Big]_0^{-x}+ax^2+bx+c \quad \text{par linéarité}\\
=&\Big((-2a-b+c)\sin(-x)-(2a+b-c)\cos(-x)-ax^2-2ax-bx\Big)\\
&\qquad -\Big((-2a-b+c)0-(2a+b-c)1-0+0+0\Big)+ax^2+bx+c\\
=&(-2a-b+c)\cos(x)-(-2a-b+c)\sin(x)-2ax+2a+b=f(x).
\end{aligned}$$

Donc f est bien solution de (E^-). De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Par double inclusion, on en déduit que l'ensemble des fonctions continues solutions de (E^-) est égal au singleton :

$$\boxed{\Big\{x :\mapsto (-2a-b+c)\cos(x)+(2a+b-c)\sin(x)-2ax+2a+b\Big\}}.$$

Exercice 2

Calculer chacune des intégrales suivantes :

$$I_1=\int_0^1 3^s\cos(2\pi s)\mathrm{d}s,\quad I_2=\int_1^5\frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+7}\quad \textit{et}\quad I_3=\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos(\theta)+1}\quad \textit{en posant } t=\tan(\theta/2).$$

► Pour I_1, on utilise une intégration par parties en posant pour tout $s \in [0,1]$:

$$\begin{cases} u(s) &= 3^s\\ v'(s) &= \cos(2\pi s)\end{cases} \quad\text{donc}\quad \begin{cases} u'(s) &= \ln(3)3^s\\ v(s) &= \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi s)\end{cases}.$$

Puisque u, v sont dérivables sur $[0,1]$ et u', v' sont continues sur $[0,1]$, on a d'après le théorème d'intégration par parties :

N'oubliez pas de vérifier les hypothèses de chaque théorème que vous utilisez.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 3^s\cos(2\pi s)\mathrm{d}s=\int_0^1 u(s)v'(s)\mathrm{d}s=\Big[u(s)v(s)\Big]_0^1-\int_0^1 u'(s)v(s)\mathrm{d}s\\
&=\Big[3^s\tfrac{1}{2\pi}\sin(2\pi s)\Big]_0^1-\int_0^1\ln(3)3^s\tfrac{1}{2\pi}\sin(2\pi s)\mathrm{d}s\\
&=0-0-\frac{\ln(3)}{2\pi}\int_0^1 3^s\sin(2\pi s)\mathrm{d}s \quad \text{par linéarité.}
\end{aligned}$$

On utilise une nouvelle intégration par parties en posant pour tout $s\in[0,1]$:

$$\begin{cases} u(s) &= 3^s\\ w'(s) &= \sin(2\pi s)\end{cases} \quad\text{donc}\quad \begin{cases} u'(s) &= \ln(3)3^s\\ w(s) &= -\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi s)\end{cases}.$$

Puisque u, w sont dérivables sur $[0,1]$ et u', w' sont continues sur $[0,1]$, on a d'après le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I_1 &= -\frac{\ln(3)}{2\pi}\int_0^1 3^s \sin(2\pi s)\mathrm{d}s \\
&= -\frac{\ln(3)}{2\pi}\left(\Big[-3^s\tfrac{1}{2\pi}\cos(2\pi s)\Big]_0^1 - \int_0^1 -\ln(3)3^s\tfrac{1}{2\pi}\cos(2\pi s)\mathrm{d}s\right) \\
&= -\frac{\ln(3)}{2\pi}\left(-\frac{3}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}+\frac{\ln(3)}{2\pi}\int_0^1 3^s\cos(2\pi s)\mathrm{d}s\right) \quad \text{par linéarité} \\
&= \frac{\ln(3)}{2\pi^2} - \frac{\ln(3)^2}{4\pi^2}I_1.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\left(1+\frac{\ln(3)^2}{4\pi^2}\right)I_1 = \frac{\ln(3)}{2\pi^2} \quad \text{donc} \quad I_1 = \frac{\ln(3)}{2\pi^2}\times\frac{4\pi^2}{4\pi^2+\ln(3)^2} = \boxed{\frac{2\ln(3)}{4\pi^2+\ln(3)^2}}.$$

On a :

$$I_2 = \int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-4x+7} = \int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-4x+4)+3} = \int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)^2+3} = \int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{3\left(\frac{(x-2)^2}{3}+1\right)} = \frac{1}{3}\int_1^5 \frac{\mathrm{d}x}{(\frac{x-2}{\sqrt{3}})^2+1}.$$

On pose le changement de variable $t = \frac{x-2}{\sqrt{3}} \iff x = t\sqrt{3}+2 = \varphi(t)$. On a :

$$x = 1 \iff t = \frac{1-2}{\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad x = 5 \iff t = \frac{5-2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

La fonction $\varphi : t \mapsto t\sqrt{3}+2$ est dérivable sur $[-1/\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ comme fonction affine et $\varphi' : t \mapsto \sqrt{3}$ est continue sur $[-1/\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ comme fonction constante. De plus :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t) = \sqrt{3} \quad \text{donc} \quad \mathrm{d}x = \sqrt{3}\mathrm{d}t.$$

On a donc d'après le théorème de changement de variable :

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{3}\int_{-1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\Big[\arctan(t)\Big]_{-1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\arctan\left(\sqrt{3}\right) - \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \boxed{\frac{\pi\sqrt{3}}{6}}.
\end{aligned}$$

On pose le changement de variable $t = \tan(\theta/2) \iff \theta = 2\arctan(t) = \psi(t)$. On a :

$$\theta = 0 \iff t = \tan(0) = 0 \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\pi}{2} \iff t = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

La fonction $\psi : t \mapsto 2\arctan(t)$ est dérivable sur $[0,1]$ comme fonction usuelle et $\psi' : t \mapsto \frac{2}{1+t^2}$ est continue sur $[0,1]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\psi(t)}{\mathrm{d}t} = \psi'(t) = \frac{2}{1+t^2} \quad \text{donc} \quad \mathrm{d}\theta = \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

$$\text{et} \quad \cos(\theta)+1 = \cos\left(2\tfrac{\theta}{2}\right)+1 = 2\cos^2\left(\tfrac{\theta}{2}\right)-1+1 = \frac{2}{1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{2}{1+t^2}$$

d'après les formules de trigonométrie. On a donc d'après le théorème de changement de variable :

$$I_3 = \int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\cos(\theta)+1} = \int_0^1 \frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\frac{2}{1+t^2}} = \int_0^1 \mathrm{d}t = \Big[t\Big]_0^1 = 1-0 = \boxed{1}.$$

Problème 2

On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ admet une «décomposition LU» lorsqu'il est possible de l'écrire sous la forme $A = LU$ où :

- *$L \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire inférieure ("Lower" en anglais) dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1, c'est-à-dire de la forme :*

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_1 & 1 & 0 \\ \ell_2 & \ell_3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } (\ell_1, \ell_2, \ell_3) \in \mathbb{R}^3$$

- *$U \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire supérieure ("Upper" en anglais), c'est-à-dire de la forme :*

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & u_6 \end{pmatrix} \quad \text{avec } (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \in \mathbb{R}^6.$$

1. *Calculer le produit LU en fonction des coefficients $\ell_1, \ell_2, \ell_3, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$.*

▶ On a :

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_1 & 1 & 0 \\ \ell_2 & \ell_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & u_4 & u_5 \\ 0 & 0 & u_6 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \ell_1 u_1 & \ell_1 u_2 + u_4 & \ell_1 u_3 + u_5 \\ \ell_2 u_1 & \ell_2 u_2 + \ell_3 u_4 & \ell_2 u_3 + \ell_3 u_5 + u_6 \end{pmatrix}}.$$

2. *La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ admet-elle une décomposition LU ? Justifier votre réponse.*

▶ Si la matrice A admet une décomposition LU alors il existe des coefficients $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) \in \mathbb{R}^3$ et $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \in \mathbb{R}^6$ tels que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} = A = LU = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \ell_1 u_1 & \ell_1 u_2 + u_4 & \ell_1 u_3 + u_5 \\ \ell_2 u_1 & \ell_2 u_2 + \ell_3 u_4 & \ell_2 u_3 + \ell_3 u_5 + u_6 \end{pmatrix}$$

d'après le résultat de la question précédente. Par identification des coefficients de matrices, on en déduit que :

$$\left\{ \begin{aligned} u_1 &= 1 \ (L_1) \\ u_2 &= 2 \ (L_2) \\ u_3 &= 3 \ (L_3) \\ \ell_1 u_1 &= 0 \ (L_4) \\ \ell_1 u_2 + u_4 &= 0 \ (L_5) \\ \ell_1 u_3 + u_5 &= 4 \ (L_6) \\ \ell_2 u_1 &= 7 \ (L_7) \\ \ell_2 u_2 + \ell_3 u_4 &= 6 \ (L_8) \\ \ell_2 u_3 + \ell_3 u_5 + u_6 &= 5 \ (L_9) \end{aligned} \right.$$

Attention ! Il ne s'agit pas d'un système linéaire !!

On a $u_1 = 1$ d'après (L_1). On en déduit que $\ell_1 = 0$ d'après (L_4) puis que $u_4 = 0$ d'après (L_5). Par conséquent, $\ell_2 u_2 = 6$ d'après (L_8). Or $\ell_2 = 7$ d'après (L_7) et $u_2 = 2$ d'après (L_2) donc $\ell_2 u_2 = 14 \neq 6$. On obtient une absurdité. Donc $\boxed{A \text{ n'admet pas de décomposition LU}}$.

3. *Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 8 & 13 \end{pmatrix}$ admet au moins deux décompositions LU différentes.*

▶ Analyse. On cherche $(\ell_1,\ell_2,\ell_3)\in\mathbb{R}^3$ et $(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6)\in\mathbb{R}^6$ tels que $A=LU$. En raisonnant comme à la question précédente, on obtient le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rl} u_1=1 & (L_1)\\ u_2=2 & (L_2)\\ u_3=3 & (L_3)\\ \ell_1u_1=3 & (L_4)\\ \ell_1u_2+u_4=6 & (L_5)\\ \ell_1u_3+u_5=9 & (L_6)\\ \ell_2u_1=4 & (L_7)\\ \ell_2u_2+\ell_3u_4=8 & (L_8)\\ \ell_2u_3+\ell_3u_5+u_6=13 & (L_9)\end{array}\right.$$

Attention ! Il ne s'agit toujours pas d'un système linéaire ! !

On a $(u_1,u_2,u_3)=(1,2,3)$ d'après les trois premières lignes. En reportant dans les autres lignes, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rl} \ell_1=3 & (L_4)\\ 2\ell_1+u_4=6 & (L_5)\\ 3\ell_1+u_5=9 & (L_6)\\ \ell_2=4 & (L_7)\\ 2\ell_2+\ell_3u_4=8 & (L_8)\\ 3\ell_2+\ell_3u_5+u_6=13 & (L_9)\end{array}\right.$$

Donc $(\ell_1,\ell_2)=(3,4)$ d'après les lignes (L_4) et (L_7). En reportant dans les autres lignes, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rl} 6+u_4=6 & (L_5)\\ 9+u_5=9 & (L_6)\\ 8+\ell_3u_4=8 & (L_8)\\ 12+\ell_3u_5+u_6=13 & (L_9)\end{array}\right.$$

On déduit des lignes (L_5) et (L_6) que $(u_4,u_5)=(0,0)$. En reportant dans les deux dernières lignes, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rl} 8=8 & (L_8)\\ 12+u_6=13 & (L_9)\end{array}\right.$$

Donc $u_6=1$. Puisque (L_8) est compatible, on peut choisir n'importe quel coefficient ℓ_3.
Synthèse. D'après les calculs faits en analyse, on a par exemple :

$$\boxed{A=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\4&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\4&42&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}}.$$

4. *Dans cette question, on considère l'exemple* $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{pmatrix}$.

(a) *Montrer que A est inversible et calculer son inverse.*

▶ Soit $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. À l'aide de la méthode du pivot de Gauss, on résout le système linéaire $AX=Y$ d'inconnues $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$AX=Y\iff\begin{pmatrix}\boxed{1}&2&3\\2&3&7\\1&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\quad\begin{array}{l}L_2\leftarrow L_2-2L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1\end{array}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 - 2y_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 - 2y_1 \\ y_3 + y_2 - 3y_1 \end{pmatrix}.$$

On obtient un système linéaire échelonné de rang maximal donc $\boxed{A \text{ est inversible}}$.

$$AX = Y \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_1 \\ \quad -x_2 + x_3 = y_2 - 2y_1 \\ \qquad -x_3 = y_3 + y_2 - 3y_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = y_1 - 2x_2 - 3x_3 = -18y_1 + 7y_2 + 5y_3 \\ x_2 = 2y_1 - y_2 + x_3 = 5y_1 - 2y_2 - y_3 \\ x_3 = 3y_1 - y_2 - y_3 \end{cases}$$

$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{Y}.$$

Par conséquent, $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$.

(b) *En déterminant les matrices L et U, montrer que A admet une unique décomposition LU.*

▶ Analyse. On cherche $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) \in \mathbb{R}^3$ et $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \in \mathbb{R}^6$ tels que $A = LU$. En raisonnant comme aux questions 2 et 3, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \ (L_1) \\ u_2 = 2 \ (L_2) \\ u_3 = 3 \ (L_3) \\ \ell_1 u_1 = 2 \ (L_4) \\ \ell_1 u_2 + u_4 = 3 \ (L_5) \\ \ell_1 u_3 + u_5 = 7 \ (L_6) \\ \ell_2 u_1 = 1 \ (L_7) \\ \ell_2 u_2 + \ell_3 u_4 = 3 \ (L_8) \\ \ell_2 u_3 + \ell_3 u_5 + u_6 = 1 \ (L_9) \end{cases}$$

Attention ! Il ne s'agit toujours pas d'un système linéaire !!

On a $(u_1, u_2, u_3) = (1, 2, 3)$ d'après les trois premières lignes. En reportant dans les autres lignes, on obtient :

$$\begin{cases} \ell_1 = 2 \ (L_4) \\ 2\ell_1 + u_4 = 3 \ (L_5) \\ 3\ell_1 + u_5 = 7 \ (L_6) \\ \ell_2 = 1 \ (L_7) \\ 2\ell_2 + \ell_3 u_4 = 3 \ (L_8) \\ 3\ell_2 + \ell_3 u_5 + u_6 = 1 \ (L_9) \end{cases}$$

Donc $(\ell_1, \ell_2) = (2, 1)$ d'après les lignes (L_4) et (L_7). En reportant dans les autres lignes, on obtient :

$$\begin{cases} 4 + u_4 = 3 \ (L_5) \\ 6 + u_5 = 7 \ (L_6) \\ 2 + \ell_3 u_4 = 3 \ (L_8) \\ 3 + \ell_3 u_5 + u_6 = 1 \ (L_9) \end{cases}$$

On déduit des lignes (L_5) et (L_6) que $(u_4, u_5) = (-1, 1)$. En reportant dans les deux dernières lignes, on obtient :

$$\begin{cases} 2 - \ell_3 = 3 \ (L_8) \\ 3 + \ell_3 + u_6 = 1 \ (L_9) \end{cases}$$

Donc $\ell_3 = -1$ d'après (L_8) puis $u_6 = -1$ d'après (L_9).
Synthèse. D'après les calculs faits en analyse, on trouve une unique décomposition LU :

$$\boxed{A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=U}}.$$

(c) *Inverser L et U puis retrouver A^{-1} à l'aide de L^{-1} et U^{-1}.*

► On raisonne comme à la question 4(a).

$$\begin{aligned} LX = Y \iff & \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\ \iff & \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 - 2y_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix} \ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ \iff & \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}}_{=I_3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 - 2y_1 \\ y_3 + y_2 - 3y_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On obtient un système linéaire échelonné de rang maximal donc L est inversible et :

$$LX = Y \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 - 2y_1 \\ y_3 + y_2 - 3y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, $\boxed{L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$. De même :

$$UX = Y \iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

On obtient un système linéaire échelonné de rang maximal donc U est inversible et :

$$\begin{aligned} UX = Y \iff & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = y_1 \\ -x_2 + x_3 = y_2 \\ -x_3 = y_3 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x_1 = y_1 - 2x_2 - 3x_3 = y_1 + 2y_2 + 5y_3 \\ x_2 = -y_2 + x_3 = -y_2 - y_3 \\ x_3 = -y_3 \end{cases} \\ \iff & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$.

Les calculs d'inversion sont beaucoup plus simples avec des matrices triangulaires. C'est tout l'intérêt de la décomposition LU.

On en déduit que :

$$A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -18 & 7 & 5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

Dans les questions suivantes, on revient au cas général $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

5. *Dans cette question, on suppose que A admet une décomposition LU.*

   (a) *Justifier que L est inversible.*

   ► Il suffit de calculer le rang de L à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ \ell_1 & 1 & 0 \\ \ell_2 & \ell_3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - \ell_1 L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \ell_2 L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & \ell_3 & 1 \end{pmatrix} \; L_3 \leftarrow L_3 - \ell_3 L_2$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

   Ainsi $\mathrm{rang}(L) = 3$ est maximal donc $\boxed{L \text{ est inversible}}$.

   On peut aller un peu plus vite en inversant les colonnes. Par contre, il est inutile de calculer L^{-1}, ce n'est pas demandé !

   (b) *En déduire que A est inversible si et seulement si $u_1u_4u_6 \neq 0$.*

   ► On raisonne par double implication.

   Sens direct. On suppose que A est inversible. Puisque $A = LU$ et que L est inversible d'après le résultat de la question précédente, on a :

$$L^{-1}A = L^{-1}LU = \mathrm{I}_3 U = U \quad \text{par associativité.}$$

   On en déduit que $U = L^{-1}A$ est inversible comme produit de matrices inversibles. Ainsi $\mathrm{rang}(U) = 3$ est maximal. Or U est une matrice échelonnée car :

$$U = \begin{pmatrix} \boxed{u_1} & u_2 & u_3 \\ 0 & \boxed{u_4} & u_5 \\ 0 & 0 & \boxed{u_6} \end{pmatrix}.$$

   Puisque les pivots u_1, u_4 et u_6 sont non nuls, on en déduit que $u_1u_4u_6 \neq 0$.

   Sens réciproque. On suppose que $u_1u_4u_6 \neq 0$. On en déduit que U est une matrice échelonnée de rang maximal. Donc U est inversible. Par conséquent, $A = LU$ est inversible comme produit de matrices inversibles.

   Conclusion. On a bien montré que $\boxed{A \text{ est inversible si et seulement si } u_1u_4u_6 \neq 0}$.

6. *Dans cette question, on suppose que $a \neq 0$ et que la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ est inversible.*

(a) Montrer que A admet une unique décomposition LU.

▶ Analyse. On cherche $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) \in \mathbb{R}^3$ et $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \in \mathbb{R}^6$ tels que $A = LU$. En raisonnant comme aux questions 2, 3 et 4(b), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} u_1 = a \ (L_1) \\ u_2 = b \ (L_2) \\ u_3 = c \ (L_3) \\ \ell_1 u_1 = d \ (L_4) \\ \ell_1 u_2 + u_4 = e \ (L_5) \\ \ell_1 u_3 + u_5 = f \ (L_6) \\ \ell_2 u_1 = g \ (L_7) \\ \ell_2 u_2 + \ell_3 u_4 = h \ (L_8) \\ \ell_2 u_3 + \ell_3 u_5 + u_6 = i \ (L_9) \end{cases}$$

Attention ! Il ne s'agit toujours pas d'un système linéaire ! !

On a $(u_1, u_2, u_3) = (a, b, c)$ d'après les trois premières lignes. En reportant dans les autres lignes, on obtient :

$$\begin{cases} a\ell_1 = d \ (L_4) \\ b\ell_1 + u_4 = e \ (L_5) \\ c\ell_1 + u_5 = f \ (L_6) \\ a\ell_2 = g \ (L_7) \\ b\ell_2 + \ell_3 u_4 = h \ (L_8) \\ c\ell_2 + \ell_3 u_5 + u_6 = i \ (L_9) \end{cases}$$

Donc $(\ell_1, \ell_2) = (d/a, g/a)$ car $a \neq 0$ d'après les lignes (L_4) et (L_7). En reportant dans les autres lignes, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{bd}{a} + u_4 = e \ (L_5) \\ \frac{cd}{a} + u_5 = f \ (L_6) \\ \frac{bg}{a} + \ell_3 u_4 = h \ (L_8) \\ \frac{cg}{a} + \ell_3 u_5 + u_6 = i \ (L_9) \end{cases}$$

On déduit des lignes (L_5) et (L_6) que $(u_4, u_5) = ((ae - bd)/a, (af - cd)/a)$. En reportant dans les deux dernières lignes, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{bg}{a} + \frac{ae-bd}{a}\ell_3 = h \ (L_8) \\ \frac{cg}{a} + \frac{af-cd}{a}\ell_3 + u_6 = i \ (L_9) \end{cases}$$

Or la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ est inversible par hypothèse, donc :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} = ae - bd \neq 0.$$

On déduit de la ligne (L_8) que :

$$\ell_3 = \frac{h - \frac{bg}{a}}{\frac{ae-bd}{a}} = \frac{ah - bg}{ae - bd}$$

et de la ligne (L_9) que :

$$u_6 = i - \frac{cg}{a} - \frac{af - cd}{a} \times \frac{ah - bg}{ae - bd}.$$

Synthèse. D'après les calculs faits en analyse, on trouve une unique décomposition LU :

$$\boxed{A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{d}{a} & 1 & 0 \\ \frac{g}{a} & \frac{ah-bg}{ae-bd} & 1 \end{pmatrix}}_{=L} \underbrace{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & \frac{ae-bd}{a} & \frac{af-cd}{a} \\ 0 & 0 & i - \frac{cg}{a} - \frac{(af-cd)(ah-bg)}{a(ae-bd)} \end{pmatrix}}_{=U}}.$$

(b) À l'aide des résultats précédents, en déduire que A est inversible si et seulement si

$$aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh \neq 0.$$

Comment appelleriez-vous la quantité $aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$ pour la matrice A ?

▶ D'après le résultat de la question 6(a), A admet une décomposition LU. On peut donc appliquer le résultat de la question 5(b) : A est inversible si et seulement si $u_1 u_4 u_6 \neq 0$.

> *Attention à la logique de votre raisonnement. Pour démontrer les résultats de la question 5, on a supposé que A admet une décomposition LU : il faut donc vérifier cette hypothèse pour appliquer ces résultats.*

De plus, on a obtenu à la question précédente :

$$u_1 = a, \quad u_4 = \frac{ae - bd}{a} \quad \text{et} \quad u_6 = i - \frac{cg}{a} - \frac{(af - cd)(ah - bg)}{a(ae - bd)}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
u_1 u_4 u_6 &= a \left(\frac{ae - bd}{a} \right) \left(i - \frac{cg}{a} - \frac{(af - cd)(ah - bg)}{a(ae - bd)} \right) \\
&= (ae - bd) \left(\frac{ai - cg}{a} - \frac{(af - cd)(ah - bg)}{a(ae - bd)} \right) \\
&= \frac{(ae - bd)(ai - cg) - (af - cd)(ah - bg)}{a} \\
&= \frac{1}{a} \Big((a^2 ei - aceg - abdi + bcdg) - (a^2 fh - abfg - acdh + bcdg) \Big) \\
&= \frac{1}{a} \Big(a^2 ei - aceg - abdi - a^2 fh + abfg + acdh \Big) \\
&= aei - ceg - bdi - afh + bfg + cdh.
\end{aligned}$$

Finalement, on a bien montré que :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \text{ est inversible } \iff aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh \neq 0}.$$

Pour les matrices carrées d'ordre 2, on a :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \text{ est inversible } \iff ad - bc \neq 0$$

et la quantité $\det(A) = ad - bc$ est appelée le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Par analogie, la quantité $aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$ pourrait être appelée le $\boxed{\text{déterminant}}$ de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

> *On a seulement montré l'équivalence dans le cas où $a \neq 0$ et $ae - bd \neq 0$. En fait, on peut montrer que cette équivalence est vraie dans tous les cas (en étudiant le cas $a = 0$ et le cas $ae - bd = 0$) mais c'est plus difficile car on ne dispose pas toujours d'une décomposition LU dans ces cas (cf. la question 2). Cette quantité généralise donc bien le critère d'inversibilité de l'ordre 2 à l'ordre 3, et on l'appelle bien le déterminant des matrices carrées d'ordre 3.*

DS n$^{\text{o}}$ 5 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

Problème 1

Ce problème propose d'étudier, en fonction d'un paramètre $\alpha > 0$, la nature de la suite définie par :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha + n^\alpha}.$$

1. Dans cette question, on fixe une valeur quelconque du paramètre $\alpha > 0$.
   (a) Montrer que : $$\forall n \geqslant 1, \quad \tfrac{n^{1-\alpha}}{2} \leqslant u_n \leqslant \tfrac{n}{1+n^\alpha}.$$
   (b) En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ dans les cas $\alpha \in]0,1[$ et $\alpha \in]1,+\infty[$. Dans chacun de ces deux cas, préciser la valeur de la limite de u_n quand $n \to +\infty$ si elle existe.
2. Dans cette question, on considère le cas $\alpha = 1$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.
   (b) Prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.
   (c) Montrer que $\ln(1+x) \leqslant x \leqslant -\ln(1-x)$ pour tout $x \in]-1,1[$.
   (d) En appliquant cette inégalité à $x = \frac{1}{k+n}$, montrer que : $$\forall n \geqslant 1, \quad \ln\left(\tfrac{2n+1}{n+1}\right) \leqslant u_n \leqslant \ln(2).$$
   (e) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
3. Dans cette question, on revient au cas général $\alpha > 0$ et on souhaite déterminer un équivalent de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$. Pour cela, on pose la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha+1}$.
   (a) Soit $n \geqslant 1$. En utilisant la monotonie de f sur $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, montrer que : $$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \frac{1}{n} f(\tfrac{k}{n}) \leqslant \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n} f(\tfrac{k-1}{n}).$$
   (b) En déduire que : $$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{u_n}{n^{1-\alpha}} \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{u_n}{n^{1-\alpha}} + \frac{1}{2n}.$$
   (c) Déterminer un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$ en fonction de n, α et $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.
   (d) Calculer I dans le cas $\alpha = 1$ et retrouver le résultat de la question 2.
   (e) Déterminer un équivalent simple de u_n quand $n \to +\infty$ dans le cas $\alpha = 2$.

Exercice

Toutes les fonctions doivent être écrites en Python.

1. Écrire une fonction `suite(n,alpha)` qui calcule les termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ du Problème 1.
2. Écrire une fonction `transpose` qui prend en argument une matrice de taille quelconque et renvoie sa matrice transposée.
3. On suppose avoir écrit deux fonctions `a(n)` et `b(n)` qui calculent les termes de deux suites adjacentes $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$. On rappelle que ces deux suites convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et que $a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$ pour tout $n \geqslant 0$. Écrire une fonction `approche(epsilon)` qui prend en argument un réel `epsilon` > 0 et renvoie une valeur approchée de la limite ℓ à `epsilon` près, c'est-à-dire que : $$|\ell - \texttt{appproche(epsilon)}| \leqslant \texttt{epsilon}.$$
4. Écrire une fonction `est_colineaire` qui prend en arguments deux listes des composantes de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et renvoie le booléen `True` si ces vecteurs sont colinéaires et `False` sinon.
5. Écrire une fonction `ecarttype` qui prend en argument une liste de modalités (dont les effectifs sont supposés égaux à 1) et renvoie la valeur de leur écart type.
6. Écrire une fonction `produit` qui prend en argument deux listes des coefficients de deux polynômes (par exemple la liste `[1,2,0,3]` pour le polynôme $1 + 2X + 3X^3$) et renvoie la liste des coefficients du produit de ces deux polynômes.

Problème 2

Dans tout ce problème, on se place dans un plan affine $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On désigne par «triangle» une figure formée par trois points distincts et non alignés de $\mathscr{P}$, appelés sommets. On rappelle que les hauteurs d'un triangle sont les trois droites passant par un des sommets de ce triangle et perpendiculaires à la droite contenant les deux autres sommets.

1. Dans cette question, on fixe un triangle ABC de $\mathscr{P}$.
   (a) Soit $M \in \mathscr{P}$ un point quelconque. Montrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$.
   (b) En déduire que les trois hauteurs de ABC sont concourantes en un point H.

On rappelle que le point H de concourance des hauteurs d'un triangle est appelé l'orthocentre de ce triangle. Étant donnée une partie $X \subset \mathscr{P}$, on note $\mathscr{H}(X)$ l'ensemble des orthocentres des triangles dont les sommets appartiennent à X. De plus, on dit que la partie X est «orthocentrique» lorsque $\mathscr{H}(X) \subset X$, c'est-à-dire lorsque tout orthocentre d'un triangle formé de trois points distincts et non alignés de X appartient à X.

2. Justifier que toute partie X incluse dans une droite de $\mathscr{P}$ est orthocentrique.

Dans la suite du problème, on considère des exemples de parties X non incluses dans une droite.

3. Dans cette question, on considère une partie X_1 formée de l'union d'une droite $\mathscr{D}$ de $\mathscr{P}$ et d'un point $M \in \mathscr{P}$ qui n'appartient pas à $\mathscr{D}$. Quitte à changer de repère orthonormé, on suppose que $\mathscr{D}$ est la droite d'équation cartésienne $y = 0$ et que M est d'abscisse nulle. On note $(0, m)$ les coordonnées de M dans ce repère.
   (a) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et passant par M.
   (b) Soient A et B deux points distincts de $\mathscr{D}$ d'abscisses respectives a et b. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABM.
   (c) Réciproquement, soit H un point de Δ d'ordonnée h. Trouver les coordonnées de deux points distincts $(A, B) \in \mathscr{D}^2$ tels que H soit l'orthocentre du triangle ABM.
   (d) En déduire $\mathscr{H}(X_1)$. La partie X_1 est-elle orthocentrique ?
   (e) Justifier brièvement que la partie $X_2 = X_1 \cup \mathscr{H}(X_1)$ est orthocentrique.
4. Dans cette question, on considère une partie de la forme $X_3 = \mathscr{C}$ où $\mathscr{C}$ est un cercle de $\mathscr{P}$. Quitte à changer de repère orthonormé, on suppose que $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon $R > 0$, c'est-à-dire l'ensemble des points $S(\theta)$ de coordonnées $(R\cos(\theta), R\sin(\theta))$ où $\theta \in [0, 2\pi[$.
   (a) Soient α, β et γ trois réels distincts de $[0, 2\pi[$. Montrer que le point H de coordonnées
   $$\Big(R(\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma)), R(\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma))\Big)$$
   est l'orthocentre du triangle $S(\alpha)S(\beta)S(\gamma)$.
   (b) Calculer la distance OH pour $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$. La partie X_3 est-elle orthocentrique ?
5. Dans cette question, on considère la partie $X_4 \subset \mathscr{P}$ d'équation cartésienne $xy = k$ où $k \in \mathbb{R}$ est un paramètre fixé.
   (a) À l'aide d'un résultat précédent, justifier que X_4 est orthocentrique dans le cas où $k = 0$.

   Dans les questions suivantes, on suppose que $k \neq 0$.
   (b) Sur un schéma du plan $\mathscr{P}$, représenter graphiquement la partie X_4 dans le cas où $k = 1$.
   (c) Soient A, B et C trois points distincts de X_4 d'abscisses respectives a, b et c.
      i. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur de ABC passant par A.
      ii. Montrer que les coordonnées (x, y) de l'orthocentre H du triangle ABC vérifient :
      $$\begin{pmatrix} abc & -kc \\ abc & -kb \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abc^2 - k^2 \\ ab^2c - k^2 \end{pmatrix}.$$
      iii. En déduire que X_4 est orthocentrique.

Corrigé du DS n° 5 de mathématiques et d'informatique

Problème 1

Ce problème propose d'étudier, en fonction d'un paramètre $\alpha > 0$, la nature de la suite définie par :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha + n^\alpha}.$$

1. *Dans cette question, on fixe une valeur quelconque du paramètre $\alpha > 0$.*

   (a) *Montrer que :* $\forall n \geqslant 1, \quad \frac{n^{1-\alpha}}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{n}{1+n^\alpha}$.

   ► Soit $n \geqslant 1$. Puisque $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On en déduit que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

   $$1 = 1^\alpha \leqslant k^\alpha \leqslant n^\alpha \quad \text{donc} \quad 1 + n^\alpha \leqslant k^\alpha + n^\alpha \leqslant n^\alpha + n^\alpha = 2n^\alpha.$$

   Puis on a d'après la stricte décroissance de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$:

   $$\frac{1}{1+n^\alpha} \geqslant \frac{1}{k^\alpha + n^\alpha} \geqslant \frac{1}{2n^\alpha}.$$

   En sommant pour $k \in [\![1, n]\!]$ toutes ces inégalités, on obtient :

   $$\frac{n}{1+n^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+n^\alpha} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha + n^\alpha} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n^\alpha} = \frac{n}{2n^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{2}.$$

   Finalement, on a bien montré que :

   $$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{\frac{n^{1-\alpha}}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{n}{1+n^\alpha}}.$$

   (b) *En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ dans les cas $\alpha \in]0, 1[$ et $\alpha \in]1, +\infty[$. Dans chacun de ces deux cas, préciser la valeur de la limite de u_n quand $n \to +\infty$ si elle existe.*

   ► Si $\alpha \in]0, 1[$ alors $1 - \alpha > 0$ et donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{2} = +\infty$. D'après le résultat de la question précédente et le théorème de limite par comparaison, on en déduit que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$ et donc que $\boxed{(u_n)_{n \geqslant 1} \text{ est divergente de } 1^{\text{re}} \text{ espèce}}$.

   Si $\alpha \in]1, +\infty[$ alors $1 - \alpha < 0$ et donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{2} = 0$. De plus, on a :

   $$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{1+n^\alpha} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^{1-\alpha}}{n^{-\alpha} + 1} = \frac{0}{0+1} = 0 \quad \text{car } -\alpha < 0.$$

   D'après le résultat de la question précédente et le théorème de limite par encadrement, on en déduit que $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$ et donc que $\boxed{(u_n)_{n \geqslant 1} \text{ est convergente}}$.

2. *Dans cette question, on considère le cas $\alpha = 1$.*

(a) *Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.*

▶ Soit $n \geqslant 1$. On a dans le cas $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^1 + (n+1)^1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^1 + n^1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(k+1)+n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \\
&= \sum_{i=2}^{n+2} \frac{1}{i+n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \quad \text{en posant } i = k+1 \\
&= \frac{1}{n+2+n} + \frac{1}{n+1+n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+n} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+n} - \frac{1}{1+n} \quad \text{par associativité} \\
&= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{(2n+1)(n+1) + (2n+2)(n+1) - (2n+2)(2n+1)}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} \\
&= \frac{(2n^2+3n+1) + (2n^2+4n+2) - (4n^2+6n+2)}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} \\
&= \frac{n+1}{(2n+2)(2n+1)(n+1)} = \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} > 0.
\end{aligned}$$

On en déduit bien que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ est croissante}}$.

On peut aussi aller plus vite au début du calcul de $u_{n+1} - u_n$ en reconnaissant des sommes télescopiques.

(b) *Prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.*

▶ D'après le résultat de la question 1(a), on a :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n \leqslant \frac{n}{1+n^1} = \frac{n}{1+n} \leqslant 1 \quad \text{car } 0 < n \leqslant 1+n.$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée par 1.

Attention : $\frac{n}{1+n}$ n'est pas un majorant car il dépend de n !!

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante d'après le résultat de la question précédente et majorée. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ est convergente}}$.

(c) *Montrer que $\ln(1+x) \leqslant x \leqslant -\ln(1-x)$ pour tout $x \in]-1,1[$.*

▶ On pose la fonction $g : x \mapsto x - \ln(1+x)$. Cette fonction est bien définie et dérivable sur $]-1,1[$ comme somme et composée de fonctions usuelles. On a pour tout $x \in]-1,1[$:

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

Puisque $1+x > 0$ car $x > -1$, on en déduit que $g'(x)$ est du signe de x. Par conséquent, la fonction g est strictement décroissante sur $]-1,0]$ et strictement croissante sur $[0,1[$. En particulier, la fonction g admet un minimum en 0 valant $g(0) = 0 - \ln(1) = 0$. On en déduit pour tout $x \in]-1,1[$ que :

$$g(x) \geqslant 0 \quad \text{donc} \quad \ln(1+x) \leqslant x.$$

De plus, si $x \in]-1,1[$ alors $-x \in]-1,1[$. Ainsi, l'inégalité précédente donne aussi en remplaçant x par $-x$:

$$\ln(1-x) \leqslant -x \quad \text{donc} \quad x \leqslant -\ln(1-x).$$

On peut aussi étudier la fonction $h : x \mapsto -\ln(1-x) - x$ pour démontrer cette inégalité (comme pour obtenir la première inégalité à l'aide de l'étude de la fonction g) mais c'est plus long.

Finalement, on a bien montré que :

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \boxed{\ln(1+x) \leqslant x \leqslant -\ln(1-x)}.$$

(d) *En appliquant cette inégalité à $x = \frac{1}{k+n}$, montrer que :*

$$\forall n \geqslant 1, \quad \ln\left(\tfrac{2n+1}{n+1}\right) \leqslant u_n \leqslant \ln(2).$$

▶ Soient $n \geqslant 1$ et $k \in [\![1,n]\!]$. En reprenant le raisonnement de la question 1(a), on a :

$$-1 < 0 < \frac{1}{2n^1} \leqslant \frac{1}{k+n} \leqslant \frac{n}{1+n^1} < 1 \quad \text{car } 0 < 1 < 1+n.$$

On peut donc appliquer l'inégalité de la question précédente à $x = \frac{1}{k+n} \in]-1,1[$:

$$\ln\left(1+\frac{1}{k+n}\right) \leqslant \frac{1}{k+n} \leqslant -\ln\left(1-\frac{1}{k+n}\right).$$

En sommant pour $k \in [\![1,n]\!]$ toutes ces inégalités, on obtient :

$$\begin{aligned}
u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k+n}\right) &= \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k+n}\right)\right) \\
&= \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k+n+1}{k+n}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\prod_{k=1}^{n}((k+1)+n)}{\prod_{k=1}^{n}(k+n)}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\prod_{i=2}^{n+1}(i+n)}{\prod_{k=1}^{n}(k+n)}\right) \quad \text{en posant } i = k+1 \\
&= \ln\left(\frac{n+1+n}{1+n}\right) \quad \text{après simplifications} \\
&= \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

On peut aussi aller plus vite en reconnaissant un produit télescopique.

$$\begin{aligned}
\text{et de même } u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \leqslant -\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k+n}\right) &= -\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k+n}\right)\right) \\
&= -\ln\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{k+n-1}{k+n}\right) \\
&= -\ln\left(\frac{1+n-1}{n+n}\right) \quad \text{après simplifications} \\
&= -\ln\left(\frac{n}{2n}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2).
\end{aligned}$$

Finalement, on a bien montré que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{\ln\left(\tfrac{2n+1}{n+1}\right) \leqslant u_n \leqslant \ln(2)}.$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

▶ On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right) = \ln\left(\frac{2+0}{1+0}\right) = \ln(2).$$

D'après le résultat de la question précédente et le théorème de limite par encadrement, on en déduit que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(2)}$.

3. *Dans cette question, on revient au cas général $\alpha > 0$ et on souhaite déterminer un équivalent de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$. Pour cela, on pose la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha+1}$.*

   (a) *Soit $n \geqslant 1$. En utilisant la monotonie de f sur $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, montrer que :*

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \frac{1}{n} f(\tfrac{k}{n}) \leqslant \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n} f(\tfrac{k-1}{n}).$$

▶ Soit $k \in [\![1, n]\!]$. La fonction f est définie est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme et composée de fonctions usuelles. On a pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{-\alpha x^{\alpha-1}}{(x^\alpha+1)^2} < 0.$$

Par conséquent, la fonction f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. En particulier, on a pour tout $x \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$:

$$f(\tfrac{k-1}{n}) \geqslant f(x) \geqslant f(\tfrac{k}{n}).$$

Puisque f est continue sur $]0, +\infty[$, on en déduit par croissance de l'intégrale sur $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ que :

$$\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(\tfrac{k}{n})\mathrm{d}x = f(\tfrac{k}{n})\Big[x\Big]_{(k-1)/n}^{k/n} = f(\tfrac{k}{n})\left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) = \frac{1}{n} f(\tfrac{k}{n})$$

$$\text{et de même} \quad \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(\tfrac{k-1}{n})\mathrm{d}x = \frac{1}{n} f(\tfrac{k-1}{n}).$$

Finalement, on a bien montré que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \boxed{\frac{1}{n} f(\tfrac{k}{n}) \leqslant \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n} f(\tfrac{k-1}{n})}.$$

   (b) *En déduire que :*

$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{u_n}{n^{1-\alpha}} \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{u_n}{n^{1-\alpha}} + \frac{1}{2n}.$$

▶ Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(\tfrac{k}{n}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\left((\frac{k}{n})^\alpha + 1\right)} = \frac{1}{\frac{n}{n^\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha + n^\alpha} = \frac{u_n}{n^{1-\alpha}}$$

et de même :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(\tfrac{k-1}{n}) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f(\tfrac{i}{n}) \quad \text{en posant } i = k-1 \\
&= \frac{1}{n} f(\tfrac{0}{n}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(\tfrac{k}{n}) - \frac{1}{n} f(\tfrac{n}{n}) \\
&= \frac{1}{n(0^\alpha+1)} + \frac{u_n}{n^{1-\alpha}} - \frac{1}{n(1^\alpha+1)} = \frac{u_n}{n^{1-\alpha}} + \frac{1}{2n}.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^{1/n} f(x)\mathrm{d}x + \int_{1/n}^{2/n} f(x)\mathrm{d}x + \int_{2/n}^{3/n} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{(n-1)/n}^{1} f(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Par conséquent, en sommant pour $k \in [\![1, n]\!]$ toutes les inégalités obtenues à la question précédente, on obtient :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \boxed{\frac{u_n}{n^{1-\alpha}} \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{u_n}{n^{1-\alpha}} + \frac{1}{2n}}.$$

(c) *Déterminer un équivalent de u_n quand $n \to +\infty$ en fonction de n, α et $I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.*

▶ Soit $n \geqslant 1$. On a $u_n > 0$ par définition de la suite. D'où, d'après le résultat de la question précédente :

$$I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{u_n}{n^{1-\alpha}} > 0.$$

On peut donc diviser l'inégalité obtenue à la question précédente par $I > 0$ et on obtient :

$$\forall n \geqslant 1, \quad 1 - \frac{1}{2In} \leqslant \frac{u_n}{In^{1-\alpha}} \leqslant 1.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{2In} = 1$. D'après le théorème de limite par encadrement, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{In^{1-\alpha}} = 1 \quad \text{donc} \quad \boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} In^{1-\alpha}}.$$

(d) *Calculer I dans le cas $\alpha = 1$ et retrouver le résultat de la question 2.*

▶ On a dans le cas $\alpha = 1$:

$$I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^1+1}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \Big[\ln(x+1)\Big]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$$

D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} In^{1-1} = \ln(2).$$

Par conséquent, on retrouve que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(2)}$.

(e) *Déterminer un équivalent simple de u_n quand $n \to +\infty$ dans le cas $\alpha = 2$.*

▶ On a dans le cas $\alpha = 2$:

$$I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \Big[\arctan(x)\Big]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

D'après le résultat de la question 3(c), on en déduit que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} In^{1-2} = \frac{\pi}{4}n^{-1} = \boxed{\frac{\pi}{4n}}.$$

En particulier, on retrouve que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{4n} = 0$ dans le cas $\alpha = 2 \in]1, +\infty[$ comme démontré à la question 1(b).

Exercice

Toutes les fonctions doivent être écrites en Python.

1. *Écrire une fonction* `suite(n,alpha)` *qui calcule les termes de la suite* $(u_n)_{n\geqslant 1}$ *du Problème 1.*

   ▶ Par exemple :

```
def suite(n,alpha):
    S=0
    for k in range(1,n+1):
        S+=1/((k**alpha)+(n**alpha))
    return S
```

2. *Écrire une fonction* `transpose` *qui prend en argument une matrice de taille quelconque et renvoie sa matrice transposée.*

   ▶ Par exemple :

```
import numpy as np
def transpose(M):
    n=len(M)
    p=len(M[0])
    tM=np.zeros((p,n))
    for i in range(p):
        for j in range(n):
            tM[i,j]=M[j,i]
    return tM
```

On peut également utiliser la fonction `shape` *de la bibliothèque* `numpy` *pour calculer les nombres de lignes et de colonnes :* `(n,p)=np.shape(M)`.

3. *On suppose avoir écrit deux fonctions* `a(n)` *et* `b(n)` *qui calculent les termes de deux suites adjacentes* $(a_n)_{n\geqslant 0}$ *et* $(b_n)_{n\geqslant 0}$. *On rappelle que ces deux suites convergent vers la même limite* $\ell \in \mathbb{R}$ *et que* $a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$ *pour tout* $n \geqslant 0$. *Écrire une fonction* `approche(epsilon)` *qui prend en argument un réel* `epsilon` > 0 *et renvoie une valeur approchée de la limite* ℓ *à* `epsilon` *près, c'est-à-dire que :*

$$\Big|\ell - \texttt{appproche(epsilon)}\Big| \leqslant \texttt{epsilon}.$$

   ▶ Par exemple :

```
def approche(epsilon):
    n=0
    while b(n)-a(n)>epsilon:
        n+=1
    return a(n)
```

L'approximation de la limite ℓ *par le terme* a_n *est justifiée par :*

$$0 \leqslant \ell - a_n \leqslant b_n - a_n \quad \text{donc} \quad |\ell - a_n| \leqslant b_n - a_n.$$

Ainsi, il suffit de choisir un n *suffisamment grand afin que* $b_n - a_n \leqslant$ `epsilon`. *Et ceci est possible car* $\lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0$. *On peut également approcher la limite* ℓ *par le terme* b_n *car :*

$$-(b_n - a_n) = a_n - b_n \leqslant \ell - b_n \leqslant 0 \quad \text{donc} \quad |\ell - b_n| \leqslant b_n - a_n.$$

4. *Écrire une fonction* `est_colineaire` *qui prend en arguments deux listes des composantes de deux vecteurs de* $\mathbb{R}^2$ *et renvoie le booléen* `True` *si ces vecteurs sont colinéaires et* `False` *sinon.*

   ▶ Par exemple :

```
def est_colineaire(u,v):
    det=u[0]*v[1]-u[1]*v[0]
    if det==0:
        return True
    else:
        return False
```

Pensez au déterminant dans le cas de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ *!*

5. *Écrire une fonction* `ecarttype` *qui prend en argument une liste de modalités (dont les effectifs sont supposés égaux à 1) et renvoie la valeur de leur écart type.*

   ▶ Par exemple :

```
def ecarttype(x):
    n=len(x)
    S=0
    for i in range(n):
        S+=x[i]
    moyenne=S/n
    S=0
    for i in range(n):
        S+=(x[i]-moyenne)**2
    return (S/n)**(1/2)
```

6. *Écrire une fonction* `produit` *qui prend en argument deux listes des coefficients de deux polynômes (par exemple la liste* `[1,2,0,3]` *pour le polynôme* $1+2X+3X^3$*) et renvoie la liste des coefficients du produit de ces deux polynômes.*

   ▶ Par exemple :

```
def produit(P,Q):
    degP=len(P)-1
    degQ=len(Q)-1
    degR=degP+degQ
    R=[]
    for k in range(degR+1):
        S=0
        for i in range(k+1):
            if i<=degP and k-i<=degQ:
                S+=P[i]*Q[k-i]
        R+=[S]
    return R
```

Cette fonction utilise la définition du produit de deux polynômes :

$$\left(\sum_{k=0}^{m} a_k X^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{m+n}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) X^k.$$

On peut utiliser des algorithmes différents mais plus efficaces, par exemple :

```
def produit(P,Q):
    R=[0 for i in range(len(P)+len(Q)-1)]
    for i in range(len(P)):
        for j in range(len(Q)):
            R[i+j]+=P[i]*Q[j]
    return R
```

Problème 2

Dans tout ce problème, on se place dans un plan affine $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On désigne par «triangle» une figure formée par trois points distincts et non alignés de $\mathscr{P}$, appelés sommets. On rappelle que les hauteurs d'un triangle sont les trois droites passant par un des sommets de ce triangle et perpendiculaires à la droite contenant les deux autres sommets.

1. *Dans cette question, on fixe un triangle ABC de $\mathscr{P}$.*

   (a) *Soit $M \in \mathscr{P}$ un point quelconque. Montrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0$.*

   ▶ On a :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB}\\
=&\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}\right).\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} \quad \text{d'après la relation de Chasles}\\
=&\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} \quad \text{par bilinéarité}\\
=&\overrightarrow{MB}.\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MC} \quad \text{par bilinéarité et par symétrie}\\
=&\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MC} \quad \text{d'après la relation de Chasles et car } \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}\\
=&\overrightarrow{BA}.\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MC}\right) \quad \text{par symétrie et par bilinéarité}\\
=&\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{0} \quad \text{d'après la relation de Chasles}\\
=&\boxed{0}.
\end{aligned}$$

   (b) *En déduire que les trois hauteurs de ABC sont concourantes en un point H.*

   ▶ Puisque les trois points A, B et C sont distincts et non alignés (car ils forment un triangle), les trois hauteurs du triangle ABC se coupent deux à deux. Soit H le point d'intersection des hauteurs passant par A et B. Ainsi $\overrightarrow{HA}$ est un vecteur directeur de la hauteur passant par A qui est perpendiculaire à la droite (BC) dirigée par $\overrightarrow{BC}$. On en déduit que $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0$. De même, on a $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA} = 0$ par définition de H et de la hauteur passant par B. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que :

$$0 = \underbrace{\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}}_{=0} + \underbrace{\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{CA}}_{=0} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB}.$$

   Par conséquent, le point H appartient aussi à la droite passant par C et perpendiculaire à la droite (AB), c'est-à-dire la hauteur passant par C. Autrement dit, $\boxed{\text{les trois hauteurs de } ABC \text{ se coupent au même point } H}$.

On rappelle que le point H de concourance des hauteurs d'un triangle est appelé l'orthocentre de ce triangle. Étant donnée une partie $X \subset \mathscr{P}$, on note $\mathscr{H}(X)$ l'ensemble des orthocentres des triangles dont les sommets appartiennent à X. De plus, on dit que la partie X est «orthocentrique» lorsque $\mathscr{H}(X) \subset X$, c'est-à-dire lorsque tout orthocentre d'un triangle formé de trois points distincts et non alignés de X appartient à X.

2. *Justifier que toute partie X incluse dans une droite de $\mathscr{P}$ est orthocentrique.*

   ► Soit $X \subset \mathscr{P}$ une partie incluse dans une droite de $\mathscr{P}$. Alors tout triplet de points distincts de X sont alignés. Par conséquent, il n'existe pas de triangle dont les sommets appartiennent à X et donc $\mathscr{H}(X) = \emptyset$. Puisque l'ensemble vide est inclus dans tout ensemble, on en déduit que $\mathscr{H}(X) \subset X$, c'est-à-dire que $\boxed{X \text{ est orthocentrique}}$.

Dans la suite du problème, on considère des exemples de parties X non incluses dans une droite.

3. *Dans cette question, on considère une partie X_1 formée de l'union d'une droite $\mathscr{D}$ de $\mathscr{P}$ et d'un point $M \in \mathscr{P}$ qui n'appartient pas à $\mathscr{D}$. Quitte à changer de repère orthonormé, on suppose que $\mathscr{D}$ est la droite d'équation cartésienne $y = 0$ et que M est d'abscisse nulle. On note $(0, m)$ les coordonnées de M dans ce repère.*

   (a) *Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et passant par M.*

   ► Le vecteur $\overrightarrow{j} = (0, 1)$ est normal à la droite $\mathscr{D}$ d'équation cartésienne $0x + 1y = 0$. Ainsi $\overrightarrow{j} = (0, 1)$ est un vecteur directeur de la droite Δ perpendiculaire à $\mathscr{D}$. Or $\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j} = 0$ car $\overrightarrow{i} = (1, 0)$, donc le vecteur $\overrightarrow{i}$ est normal à la droite Δ. On en déduit qu'une équation cartésienne de la droite Δ est de la forme $1x + 0y + c = 0$ où $c \in \mathbb{R}$. Puisque $M \in \Delta$, on a en injectant les coordonnées du point M :

   $$1 \times 0 + 0 \times m + c = 0 \quad \text{donc} \quad c = 0.$$

   Finalement, une équation cartésienne de la droite Δ est $\boxed{x = 0}$.

   Ce résultat est évident à l'aide d'un dessin.

   (b) *Soient A et B deux points distincts de $\mathscr{D}$ d'abscisses respectives a et b. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABM.*

   ► La hauteur du triangle ABM passant par M est perpendiculaire à la droite $(AB) = \mathscr{D}$, elle est donc confondue avec la droite Δ d'équation cartésienne $y = 0$ d'après le résultat de la question précédente. D'autre part, le vecteur $\overrightarrow{BM} = (0 - b, m - 0) = (-b, m)$ est normal à la hauteur passant par A. On en déduit qu'une équation cartésienne de cette hauteur est de la forme $-bx + my + c' = 0$ où $c' \in \mathbb{R}$. Puisque cette hauteur passe par A, on a en injectant les coordonnées du point A :

   $$-b \times a + m \times 0 + c' = 0 \quad \text{donc} \quad c' = ab.$$

   Une équation cartésienne de la hauteur passant par A est donc $-bx + my + ab = 0$. On note (x, y) les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABM. Puisque H est le point d'intersection des hauteurs passant par M et A, on obtient le système linéaire suivant :

   $$\begin{cases} \boxed{1}x & = 0 \\ -bx + my & = -ab \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + bL_1 \quad \iff \quad \begin{cases} \boxed{1}x & = 0 \\ \boxed{\mathrm{m}}y & = -ab \end{cases}.$$

   On a $m \neq 0$ car $M \notin \mathscr{D}$. Par conséquent, on obtient un système linéaire de rang maximal qui admet une unique solution. On en déduit que les coordonnées du point H sont $\boxed{(0, \frac{-ab}{m})}$

   Inutile de perdre du temps à déterminer une équation cartésienne de la troisième hauàteur. Deux hauteurs suffisent pour déterminer les coordonnées de l'orthocentre.

(c) *Réciproquement, soit H un point de Δ d'ordonnée h. Trouver les coordonnées de deux points distincts $(A,B)\in\mathscr{D}^2$ tels que H soit l'orthocentre du triangle ABM.*

▶ On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse. On cherche A et B deux points distincts de $\mathscr{D}$ tels que l'orthocentre du triangle ABM est égal à H. On note $(a,0)$ et $(b,0)$ les coordonnées respectives de A et B. Ainsi, on cherche $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $a\neq b$ et tels que les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABM sont égales à $(0,h)$. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que :

$$\frac{-ab}{m}=h \quad \text{donc} \quad ab=-mh.$$

Synthèse. On pose $a=1$ et $b=-mh$ si $-mh\neq 1$. Sinon, $-mh=1$ et on pose $a=2$ et $b=\frac{1}{2}$. On a bien $a\neq b$ dans tous les cas. De plus, on a $ab=-mh$ dans tous les cas, donc H est l'orthocentre du triangle ABM d'après le résultat de la question précédente. Finalement, on a trouvé deux points A et B qui conviennent et qui ont pour coordonnées respectives $\boxed{(0,1) \text{ et } (0,-mh) \text{ si } -mh\neq 1 \text{ et } (0,2) \text{ et } (0,\frac{1}{2}) \text{ si } -mh=1}$.

N'oubliez pas de vérifier que $A\neq B$. Si votre synthèse comporte des cas particuliers, n'hésitez pas à distinguer ces cas.

(d) *En déduire $\mathscr{H}(X_1)$. La partie X_1 est-elle orthocentrique ?*

▶ Puisque $X_1=\mathscr{D}\cup\{M\}$, tout triplet de points distincts et non alignés de X_1 contient le point M et deux points distincts A et B de $\mathscr{D}$. D'après, le résultat de la question 3(b), l'orthocentre H du triangle ABM appartient à la droite Δ. Puisque ceci est vrai pour tout orthocentre d'un triangle formé de trois points distincts et non alignés de X_1, on en déduit que $\mathscr{H}(X_1)\subset\Delta$. Réciproquement, on a montré à la question précédente que tout point de Δ est l'orthocentre d'un triangle formé de trois points distincts et non alignés de X_1. Par conséquent, $\Delta\subset\mathscr{H}(X_1)$. Par double inclusion, on en déduit que $\boxed{\mathscr{H}(X_1)=\Delta}$.

Montrez que vous avez compris l'énoncé en distinguant bien chacune des deux inclusions et en concluant par double inclusion.

Puisque Δ est la droite perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par M, il existe des points de $\mathscr{H}(X_1)=\Delta$ qui n'appartiennent pas à $X_1=\mathscr{D}\cup\{M\}$. Autrement dit, $\mathscr{H}(X_1)\not\subset X_1$ donc $\boxed{\text{la partie } X_1 \text{ n'est pas orthocentrique}}$.

(e) *Justifier brièvement que la partie $X_2=X_1\cup\mathscr{H}(X_1)$ est orthocentrique.*

▶ Soit H l'orthocentre d'un triangle ABC formé de trois points distincts et non alignés de X_2. D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$X_2=X_1\cup\mathscr{H}(X_1)=(\mathscr{D}\cup\{M\})\cup\Delta=\mathscr{D}\cup(\{M\}\cup\Delta)=\mathscr{D}\cup\Delta \quad \text{car } M\in\Delta.$$

Puisque A, B et C sont non alignés, il y a deux cas possibles :

1[er] cas : deux des trois points A, B ou C appartiennent à la droite $\mathscr{D}$ et le troisième appartient à la droite Δ. En raisonnant comme à la question 3(b), on peut montrer que l'orthocentre de ABC appartient à la droite Δ.

2[e] cas : deux des trois points A, B ou C appartiennent à la droite Δ et le troisième appartient à la droite $\mathscr{D}$. À l'aide d'un raisonnement analogue à celui de la question 3(b), on peut montrer que l'orthocentre de ABC appartient à la droite $\mathscr{D}$.

Conclusion : dans tous les cas, on obtient que $H\in\mathscr{D}\cup\Delta=X_2$. Puisque ceci est vrai pour tout orthocentre d'un triangle formé de trois points distincts et non alignés de X_2, on en déduit que $\mathscr{H}(X_2)\subset X_2$ donc $\boxed{\text{la partie } X_2 \text{ est orthocentrique}}$.

En utilisant un raisonnement analogue à celui de la question 3(c), on peut aussi montrer par disjonction de cas que $X_2\subset\mathscr{H}(X_2)$ Donc $\mathscr{H}(X_2)=X_2$ par double inclusion. Mais inutile de perdre du temps à démontrer quelque chose non demandée dans l'énoncé.

4. *Dans cette question, on considère une partie de la forme $X_3 = \mathscr{C}$ où $\mathscr{C}$ est un cercle de $\mathscr{P}$. Quitte à changer de repère orthonormé, on suppose que $\mathscr{C}$ est le cercle de centre O et de rayon $R > 0$, c'est-à-dire l'ensemble des points $S(\theta)$ de coordonnées $(R\cos(\theta), R\sin(\theta))$ où $\theta \in [0, 2\pi[$.*

   (a) *Soient α, β et γ trois réels distincts de $[0, 2\pi[$. Montrer que le point H de coordonnées*

$$\Big(R(\cos(\alpha)+\cos(\beta)+\cos(\gamma)), R(\sin(\alpha)+\sin(\beta)+\sin(\gamma))\Big)$$

   est l'orthocentre du triangle $S(\alpha)S(\beta)S(\gamma)$.

   ▶ On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{S(\alpha)H} &= \Big(R(\cos(\alpha)+\cos(\beta)+\cos(\gamma)) - R\cos(\alpha), R(\sin(\alpha)+\sin(\beta)+\sin(\gamma)) - R\sin(\alpha)\Big)\\ &= \Big(R(\cos(\beta)+\cos(\gamma)), R(\sin(\beta)+\sin(\gamma))\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{et}\quad \overrightarrow{S(\beta)S(\gamma)} &= \Big(R\cos(\gamma) - R\cos(\beta), R\sin(\gamma) - R\sin(\beta)\Big)\\ &= \Big(R(\cos(\gamma)-\cos(\beta)), R(\sin(\gamma)-\sin(\beta))\Big).\end{aligned}$$

   Par conséquent :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{S(\alpha)H}.\overrightarrow{S(\beta)S(\gamma)} =& R(\cos(\beta)+\cos(\gamma))R(\cos(\gamma)-\cos(\beta))\\ &+ R(\sin(\beta)+\sin(\gamma))R(\sin(\gamma)-\sin(\beta))\\ =& R^2(\cos^2(\gamma)-\cos^2(\beta)) + R^2(\sin^2(\gamma)-\sin^2(\beta))\\ =& R^2\underbrace{(\cos^2(\gamma)+\sin^2(\gamma))}_{=1} - R^2\underbrace{(\cos^2(\beta)+\sin^2(\beta))}_{=1}\\ =& R^2 - R^2 = 0.\end{aligned}$$

   On en déduit que la droite $(S(\alpha)H)$ dirigée par $\overrightarrow{S(\alpha)H}$ est perpendiculaire à la droite $(S(\beta)S(\gamma))$ dirigée par $\overrightarrow{S(\beta)S(\gamma)}$. Autrement dit, la droite $(S(\alpha)H)$ est la hauteur du triangle $S(\alpha)S(\beta)S(\gamma)$ passant par $S(\alpha)$ et le point H appartient à cette hauteur. À l'aide de calculs et de raisonnements similaires, on peut montrer que :

$$\overrightarrow{S(\beta)H}.\overrightarrow{S(\gamma)S(\alpha)} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{S(\gamma)H}.\overrightarrow{S(\alpha)S(\beta)} = 0$$

   et donc que le point H appartient aux hauteurs passant par $S(\beta)$ et $S(\gamma)$. Par conséquent, H est le point de concourance des trois hauteurs, donc $\boxed{H \text{ est l'orthocentre de } S(\alpha)S(\beta)S(\gamma)}$.

   (b) *Calculer la distance OH pour $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$. La partie X_3 est-elle orthocentrique ?*

   ▶ On a :

$$\begin{aligned}OH &= \left\|\overrightarrow{OH}\right\|\\ &= \sqrt{\Big(R(\cos(\alpha)+\cos(\beta)+\cos(\gamma)) - 0\Big)^2 + \Big(R(\sin(\alpha)+\sin(\beta)+\sin(\gamma)) - 0\Big)^2}\\ &= \sqrt{R^2\Big(\cos(0)+\cos(\tfrac{\pi}{4})+\cos(\tfrac{\pi}{2})\Big)^2 + R^2\Big(\sin(0)+\sin(\tfrac{\pi}{4})+\sin(\tfrac{\pi}{2})\Big)^2}\\ &= R\sqrt{\Big(1+\tfrac{\sqrt{2}}{2}+0\Big)^2 + \Big(0+\tfrac{\sqrt{2}}{2}+1\Big)^2} \quad \text{car } R > 0\\ &= R\sqrt{2\left(\tfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2} = R\sqrt{2\left(\tfrac{6+4\sqrt{2}}{4}\right)} = R\sqrt{3+2\sqrt{2}} = R\sqrt{\Big(1+\sqrt{2}\Big)^2} = \boxed{R\left(1+\sqrt{2}\right)}.\end{aligned}$$

   En particulier, on a $OH \neq R$ donc H n'appartient pas au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon R. Or, d'après le résultat de la question précédente, le point H est l'orthocentre du triangle $S(\alpha)S(\beta)S(\gamma)$ formé de trois points distincts et non alignés de $X_3 = \mathscr{C}$. Puisque $H \notin X_3$, on en déduit que $\boxed{\text{la partie } X_3 \text{ n'est pas orthocentrique}}$.

En poursuivant l'étude, on pourrait montrer que $\mathscr{H}(X_3)$ est le disque ouvert de centre O et de rayon $3R$.

5. *Dans cette question, on considère la partie $X_4 \subset \mathscr{P}$ d'équation cartésienne $xy = k$ où $k \in \mathbb{R}$ est un paramètre fixé.*

   (a) *À l'aide d'un résultat précédent, justifier que X_4 est orthocentrique dans le cas où $k = 0$.*

   ▶ Si $k = 0$ alors l'équation cartésienne de X_4 est :

$$xy = 0 \iff x = 0 \text{ ou } y = 0.$$

   On reconnaît les équations des droites Δ et $\mathscr{D}$ de la question 3. D'après le résultat de la question 3(d), on en déduit que $\boxed{\text{la partie } X_4 = \mathscr{D} \cup \Delta = X_2 \text{ est orthocentrique}}$.

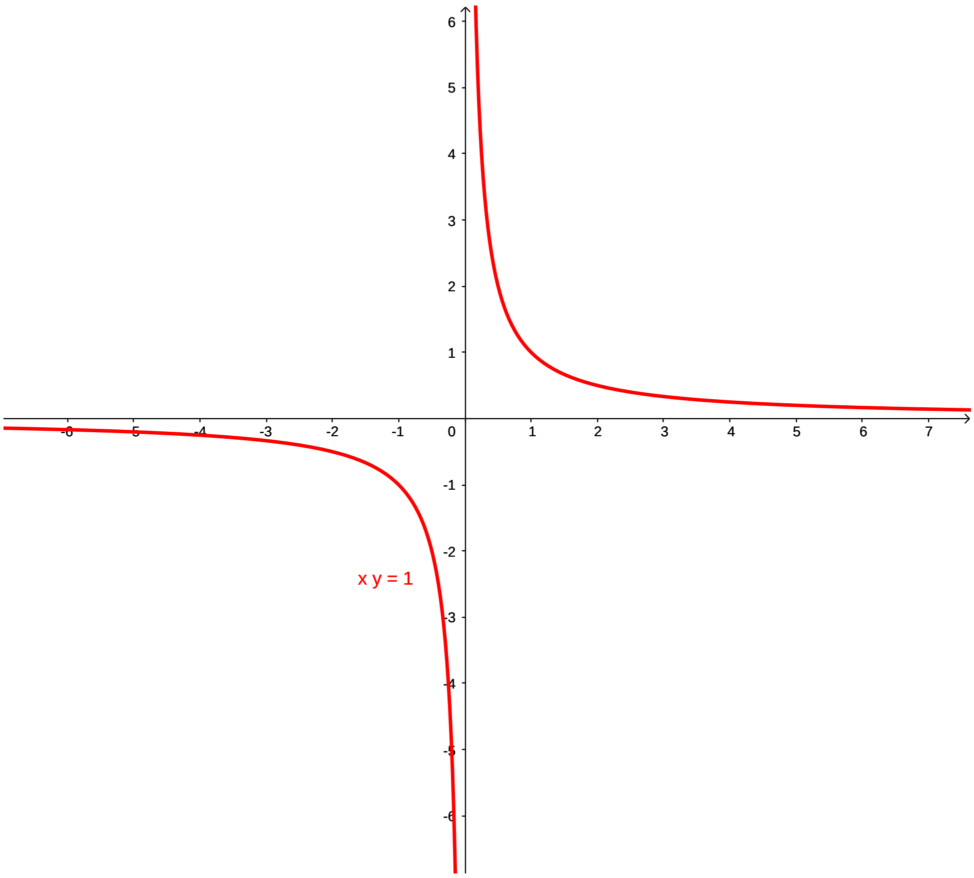
   Dans les questions suivantes, on suppose que $k \neq 0$.

   (b) *Sur un schéma du plan $\mathscr{P}$, représenter graphiquement la partie X_4 dans le cas où $k = 1$.*

   ▶ Si $k = 1$ alors l'équation cartésienne de X_4 est :

$$xy = 1 \iff y = \frac{1}{x}.$$

   On reconnaît donc la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.



   (c) *Soient A, B et C trois points distincts de X_4 d'abscisses respectives a, b et c.*

   i. *Déterminer une équation cartésienne de la hauteur de ABC passant par A.*

   ▶ Soit y_A l'ordonnée du point A. Puisque l'abscisse de A est égale à a, $A \in X_4$ et l'équation cartésienne de X_4 est $xy = k$, on en déduit que $ay_A = k$ donc $y_A = \frac{k}{a}$. De même, les ordonnées respectives de B et C sont $\frac{k}{b}$ et $\frac{k}{c}$. Soit $M \in \mathscr{P}$ un point quelconque de coordonnées (x, y). Par définition de la hauteur de ABC passant par A, le point M appartient à cette hauteur si et seulement si :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \iff &\left(x - a, y - \tfrac{k}{a}\right).\left(c - b, \tfrac{k}{c} - \tfrac{k}{b}\right) = 0 \\ \iff &(x-a)(c-b) + \left(y - \tfrac{k}{a}\right)\left(\tfrac{k}{c} - \tfrac{k}{b}\right) = 0 \\ \iff &\boxed{(c-b)x + \left(\frac{k(b-c)}{bc}\right)y + \left(-ac + ab - \frac{k^2}{ac} + \frac{k^2}{ab}\right) = 0}. \end{aligned}$$

On reconnaît bien l'équation cartésienne d'une droite du plan $\mathscr{P}$.

ii. Montrer que les coordonnées (x, y) de l'orthocentre H du triangle ABC vérifient :

$$\begin{pmatrix} abc & -kc \\ abc & -kb \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abc^2 - k^2 \\ ab^2c - k^2 \end{pmatrix}.$$

▶ En simplifiant l'équation cartésienne obtenue à la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} &(c-b)x + \left(\frac{k(b-c)}{bc}\right)y + \left(-ac + ab - \frac{k^2}{ac} + \frac{k^2}{ab}\right) = 0 \\ \iff &\left(\frac{abc(c-b)}{abc}\right)x + \left(\frac{ka(b-c)}{abc}\right)y + \left(\frac{a^2bc(-c+b)}{abc} + \frac{k^2(-b+c)}{abc}\right) = 0 \\ \iff &abc(c-b)x - ka(c-b)y + \Big(-a^2bc(c-b) + k^2(c-b)\Big) = 0 \\ \iff &abcx - kay + \left(-a^2bc + k^2\right) = 0 \quad \text{car } b - c \neq 0 \text{ puisque } B \text{ et } C \text{ sont deux points distincts de } X_4 \\ \iff &abcx - kay = a^2bc - k^2. \end{aligned}$$

En raisonnant de même, on obtient les équations cartésiennes des hauteurs de ABC passant par B et C respectivement :

$$abcx - kby = ab^2c - k^2 \quad \text{et} \quad abcx - kcy = abc^2 - k^2.$$

Inutile de perdre du temps à refaire les mêmes calculs. Il suffit seulement d'utiliser la même équation cartésienne en changeant les rôles de a, b et c.

Puisque l'orhocentre H du triangle ABC est le point de concourance des trois hauteurs, ses coordonnées (x, y) vérifient ces trois équations cartésiennes :

$$\begin{cases} abcx - kay = a^2bc - k^2 & (L_1) \\ abcx - kby = ab^2c - k^2 & (L_2) \\ abcx - kcy = abc^2 - k^2 & (L_3) \end{cases}.$$

En conservant seulement les lignes (L_3) et (L_2), on obtient le système linéaire suivant qu'on peut écrire sous forme matricielle :

$$\begin{cases} abcx - kcy = abc^2 - k^2 \\ abcx - kby = ab^2c - k^2 \end{cases} \iff \boxed{\begin{pmatrix} abc & -kc \\ abc & -kb \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abc^2 - k^2 \\ ab^2c - k^2 \end{pmatrix}}.$$

iii. En déduire que X_4 est orthocentrique.

▶ Le déterminant de la matrice carrée d'ordre 2 des coefficients du système obtenu à la question précédente est égal à :

$$abc(-kb) - abc(-kc) = kabc(-b+c) = -kabc(b-c).$$

Ce déterminant est non nul car :

- $k \neq 0$ par hypothèse,
- $a \neq 0$ car $A \in X_4$ (sinon $ay_A = 0$ ce qui est absurde car les coordonnées de A vérifient l'équation cartésienne de X_4 c'est-à-dire $ay_A = k \neq 0$) et de même $b \neq 0$ et $c \neq 0$,
- $b - c \neq 0$ puisque B et C sont deux points distincts de X_4.

On en déduit que la matrice est inversible et donc que le système admet une unique solution.

Tout cela est parfaitement logique puisque l'orthocentre existe et est unique d'après le résultat de la question 1(b).

Par conséquent, les coordonnées (x, y) de l'orthocentre H du triangle ABC sont égales à :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{-kabc(b-c)} \begin{pmatrix} -kb & kc \\ -abc & abc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} abc^2 - k^2 \\ ab^2c - k^2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{kabc(b-c)} \begin{pmatrix} -kb(abc^2 - k^2) + kc(ab^2c - k^2) \\ -abc(abc^2 - k^2) + abc(ab^2c - k^2) \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{kabc(b-c)} \begin{pmatrix} -kab^2c^2 + k^3b + kab^2c^2 - k^3c \\ abc(-abc^2 + k^2 + ab^2c - k^2) \end{pmatrix} \\
&= \frac{-1}{kabc(b-c)} \begin{pmatrix} k^3(b-c) \\ abc(abc(b-c)) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad x = \frac{-k^3(b-c)}{kabc(b-c)} = \boxed{\frac{-k^2}{abc}} \quad \text{et} \quad y = \frac{-(abc)^2(b-c)}{kabc(b-c)} = \boxed{\frac{-abc}{k}}.$$

En particulier, on remarque que :

$$xy = \frac{-k^2}{abc} \times \frac{-abc}{k} = k \quad \text{donc} \quad H \in X_4.$$

Puisque ceci est vrai pour l'orthocentre H de tout triangle ABC formé de trois points distincts de X_4, on en déduit que $\mathscr{H}(X_4) \subset X_4$ et donc que $\boxed{\text{la partie } X_4 \text{ est orthocentrique}}$.

DS n^o 6 de mathématiques et d'informatique

durée : 4 heures

Problème 1

Introduction

Toto décide de participer au jeu télévisé "C'est le dernier 0 !" qui se déroule de la façon suivante :

1. N urnes ($N \in \mathbb{N}^\star$) numérotées de 1 à N sont placées devant le candidat.
2. Pour tout $i \in [|1, N|]$, l'urne i contient exactement i boules, numérotées respectivement 0, 1, 2, $\cdots$, $i-1$. Par exemple, l'urne 1 contient uniquement une boule numérotée 0 et l'urne 2 contient deux boules numérotées respectivement 0 et 1.
3. Le candidat tire d'abord une boule dans l'urne 1 puis une boule dans l'urne 2, puis une dans l'urne 3 etc. Dès qu'il tombe sur un 0, on lui demande s'il pense que ce sera le dernier 0 qu'il aura tiré. Deux cas se présentent alors :
   — s'il considère que ce sera le dernier 0, il affirme alors que "c'est le dernier 0" et termine de tirer les boules des urnes suivantes. Si dans ces tirages il n'y a pas eu d'autre 0 alors le candidat gagne une mallette pleine de billets verts. Sinon, il repart les mains vides.
   — Ou bien il considère que ce ne sera pas le dernier 0 qu'il trouve, et dans ce cas il affirme qu'"il y aura d'autre 0", continue ses tirages jusqu'au prochain 0 (si celui-ci existe) et on lui demande de nouveau si c'est le dernier 0. S'il n'y en n'a pas eu, il repart les mains vides.

Par exemple, pour $N = 4$, si un candidat tire successivement $0, 1, 0, 2$, il y a eu plusieurs déroulements possibles :

— cas 1 : pour le premier 0, le candidat a affirmé que c'est le dernier 0. Il a alors perdu.
— cas 2 : pour le deuxième 0, le candidat a affirmé que c'est le dernier 0. Il a alors gagné.
— cas 3 : pour le deuxième 0, le candidat a affirmé qu'il y aura d'autre 0. Il a alors perdu.

L'objectif du problème est de trouver une stratégie optimisant les chances de gagner de Toto.

Dans la suite, $\Omega_N = \{0\} \times \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1, \cdots, N-1\}$ désigne l'ensemble des tirages possibles. Par exemple, $\Omega_2 = \{0\} \times \{0, 1\}$ est exactement l'ensemble $\{(0, 0), (0, 1)\}$, la 3-liste $(0, 1, 0)$ est un élément de Ω_3 et la 5-liste $(0, 0, 2, 3, 1)$ est un élément de Ω_5.

Pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, N\}$ et $i \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$, $(T_k = i)$ désigne l'événement "la boule i a été tirée dans l'urne k" et D_k désigne l'événement "la boule 0 a été tirée dans l'urne k et c'est le dernier 0".

On suppose que les tirages sont indépendants dans leur ensemble et

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, N\}, \forall i \in \{0, 1, \cdots, k-1\}, P(T_k = i) = \frac{1}{k}.$$

Calculs préliminaires

1. Décrire tous les éléments de Ω_3.
2. Soit $N \geq 1$. Déterminer le cardinal de Ω_N.
3. Soit $N \geq 1$. Montrer que pour tout $(a_1, a_2, \cdots, a_N) \in \Omega_N$:
$$P\left((T_1 = a_1) \cap (T_2 = a_2) \cap \cdots \cap (T_N = a_N)\right) = \frac{1}{N!}.$$
   Ainsi, Ω_N est muni de la probabilité uniforme.
4. **(INFO)** Écrire une fonction `tirage(N)` qui prend en argument un entier $N \geq 1$ et qui renvoie un élément de Ω_N de façon aléatoire et uniforme.
5. Soit $N \geq 1$. Déterminer la probabilité de gagner si on affirme que le premier 0 tiré est le dernier.

6. Soient $N \geq 1$ et $k \in \{1, \cdots, N\}$.
   (a) Montrer que $P(D_k|(T_k = 0)) = \prod_{j=k+1}^{N}(1 - \frac{1}{j})$.
   (b) En déduire que $P(D_k|(T_k = 0)) = \frac{k}{N}$.
   (c) Exprimer $P(D_k)$ en fonction de N.
7. Soit $N \geq 1$. Pour tout $(k, \ell) \in \{1, \cdots, N\}^2$, on pose
   — A_k l'événement " après le k^{e} tirage (exclus), il y a exactement un 0",
   — $B_{k,\ell} = \cap_{i=k+1}^{\ell-1}\overline{(T_i = 0)}$. Autrement dit, $B_{k,\ell}$ est l'événement "il n'y a pas de zéro entre le k^{e} tirage (exclus) et ℓ^{e} tirage (exclus)". Par convention, si $k \geq \ell - 1$, $B_{k,\ell}$ est l'événement certain Ω_N.

   (a) Soit $(k, \ell) \in \{1, 2 \cdots, N\}^2, k < \ell - 1$. Montrer que $P(B_{k,\ell}) = \frac{k}{\ell-1}$.
   (b) Soit $k \in \{1, 2, \cdots, N - 1\}$.
      i. Montrer que : $A_k = \displaystyle\bigcup_{\ell=k+1}^{N} (D_\ell \cap B_{k,\ell})$.
      ii. En déduire que : $P(A_k) = P(A_k|T_k = 0) = \dfrac{k}{N}\left(\displaystyle\sum_{\ell=k+1}^{N} \dfrac{1}{(\ell - 1)}\right)$.

Étude d'une stratégie

Toto décide d'opter pour la stratégie $\mathcal{S}$ suivante : au k^{e} tirage, si l'on a obtenu un 0, on compare $P(A_k|T_k = 0)$ et $P(D_k|T_k = 0)$. Si $P(A_k|T_k = 0) < P(D_k|T_k = 0)$, on annonce que c'est le dernier 0. Sinon, on effectue le même raisonnement au prochain 0.

Dans la suite, pour tout $N \geq 1$, on note k_N le plus petit entier k strictement positif vérifiant

$$P(A_k|T_k = 0) < P(D_k|T_k = 0).$$

Ainsi, la stratégie décrite consiste à affirmer que le premier 0 tiré à partir du $k_N{}^{\text{e}}$ tirage est le dernier. On remarque et on admet alors que l'événement G_N "le candidat gagne à l'aide de la stratégie $\mathcal{S}$" est égal à l'événement A_{k_N-1}.

8. Soient $N \geq 3, k \in \{1, 2, \cdots, N-1\}$. Montrer que : $(P(A_k|T_k = 0) < P(D_k|T_k = 0)) \Leftrightarrow \left(\displaystyle\sum_{\ell=k}^{N-1} \dfrac{1}{\ell} < 1\right)$.
9. Calculer k_3, k_4.
10. **(INFO)** Écrire une fonction `arrete(N)` qui prend en argument un entier $N \geq 2$ et qui renvoie k_N.
11. Dans les questions suivantes, on veut démontrer que :

$$\forall N \geq 3, \forall k \in \{2, 3, \cdots, N - 1\}, \ln\left(\frac{N}{k}\right) \leq \sum_{\ell=k}^{N-1} \frac{1}{\ell} \leq \ln\left(\frac{N-1}{k-1}\right).$$

   Soient $N \geq 3, \ell \in \{2, 3, \cdots, N - 1\}$.
   (a) Montrer que : $\forall x \in [\ell, \ell + 1], \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\ell} \leq \dfrac{1}{x - 1}$.
   (b) À l'aide du calcul intégral, montrer que $\ln(\ell + 1) - \ln(\ell) \leq \dfrac{1}{\ell} \leq \ln(\ell) - \ln(\ell - 1)$.
12. Soient $N \geq 3$, $k \in \{2, 3, \cdots, N - 1\}$. Déduire des calculs précédents que

$$\ln\left(\frac{N}{k}\right) \leq \sum_{\ell=k}^{N-1} \frac{1}{\ell} \leq \ln\left(\frac{N-1}{k-1}\right)$$

13. Soit $N \geq 5$. Montrer que $\ln(\frac{N}{k_N}) < 1$ et que $1 \leq \ln(\frac{N}{k_N-2})$.

14. Montrer que pour tout $N \geq 5, k_N > \frac{N}{e}$. En déduire la limite de la suite $(k_N)_{N\geq 5}$.
15. Montrer que la suite $(\frac{k_N}{N})_{N\geq 5}$ est convergente et déterminer sa limite.
16. À l'aide des questions précédentes, montrer que la suite $(P(G_N))_{N\geq 5}$ est convergente et déterminer sa limite.
17. En déduire que pour tout N assez grand, en adoptant la stratégie $\mathcal{S}$, Toto a plus d'une chance sur trois de gagner. On rappelle que $e < 3$.

Problème 2

On considère le polynôme $P_t = 4X^5 + 5tX^4 - 4$ où $t \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

1. **(Informatique)** Écrire une fonction `polynome(t,x)` qui prend en arguments une valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$ et un réel $x \in \mathbb{R}$ puis qui renvoie la valeur de $P_t(x)$.
2. Pour cette question, on fixe $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Factoriser le polynôme dérivé P_t' dans $\mathbb{C}[X]$. Quelles sont ses racines et leur multiplicité ?
   (b) En déduire que P_t admet cinq racines simples dans $\mathbb{C}$ si $t \neq 4^{1/5}$.
3. Déterminer le nombre de racines de P_t dans $\mathbb{C}$ et leur multiplicité dans le cas où $t = 4^{1/5}$.
4. Pour cette question, on fixe $t > 0$.
   (a) Dresser le tableau des variations de la fonction $x \mapsto P_t(x)$.
   (b) En déduire le nombre de racines de P_t dans $\mathbb{R}$ en distinguant plusieurs cas.

Pour la suite de l'énoncé, on note $r(t)$ l'unique racine réelle positive de P_t pour tout $t > 0$.

5. Justifier que $r(t) \in]0, 1[$ pour tout $t > 0$.
6. **(Informatique)**
   (a) En utilisant la fonction `polynome`, écrire une fonction `dichotomie1(t,n)` qui prend en arguments une valeur du paramètre $t > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ puis qui renvoie, à l'aide d'un algorithme de dichotomie, le n-ième terme d'une suite qui converge vers $r(t)$.
   (b) Écrire une fonction `approximation1(t,epsilon)` qui prend en arguments une valeur du paramètre $t > 0$ et une précision $\varepsilon > 0$ puis qui renvoie une valeur approchée de $r(t)$ à ε près.
7. (a) On fixe $t_2 > t_1 > 0$ dans cette question. Déterminer le signe de $P_{t_1}(r(t_2))$.
   (b) En déduire la monotonie de la fonction $r : t \mapsto r(t)$ sur $]0, +\infty[$.
8. (a) Justifier que r se prolonge par continuité en 0.
   (b) On note encore r le prolongement obtenu. Déterminer $r(0)$.
   (c) Montrer que $r(t) - 1$ est équivalent à $-t/4$ quand t tend vers 0^+.
9. (a) Justifier que $\ell = \lim_{t\to+\infty} r(t)$ existe et est finie.
   (b) Montrer que $\ell > 0$ est absurde. En déduire la valeur de ℓ.
   (c) Montrer que $r(t)$ est équivalent à $(4/(5t))^{1/4}$ quand t tend vers $+\infty$.
10. On pose la fonction $f : x \mapsto 4(1 - x^5)/(5x^4)$.
    (a) Montrer que f réalise une bijection de $]0, 1]$ vers un intervalle à déterminer.
    (b) Justifier que r est la bijection réciproque de f et en déduire que r est continue sur $[0, +\infty[$.

11. (a) Justifier que P_t admet également une unique racine réelle positive pour tout $t < 0$.
On note encore $r(t)$ cette racine pour tout $t < 0$.

(b) **(Informatique)** On considère la fonction `mystere` suivante.

```
def mystere(t):
    k=0
    while polynome(t,k)<=0:
        k=k+1
    return k
```

i. Expliquer ce que renvoie la fonction `mystere`.

ii. À l'aide de la fonction `mystere`, écrire une fonction `dichotomie2(t,n)` et une fonction `approximation2(t,epsilon)` similaires à celles des questions 6(a) et 6(b) mais qui prennent en argument une valeur du paramètre $t < 0$.

(c) À l'aide de la fonction f définie à la question 10, montrer que r est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, puis déterminer $\lim_{t\to-\infty} r(t)$ et un équivalent simple de $r(t)$ quand $t \to -\infty$.

Corrigé du DS n^o 6 de mathématiques et d'informatique

Problème 1
Énoncé et corrigé de V. Vong

1. Par définition, $\Omega_3 = \{0\} \times \{0,1\} \times \{0,1,2\}$. Ces éléments sont donc exactement :

$$\boxed{(0,0,0),(0,0,1),(0,0,2),(0,1,0),(0,1,1),(0,1,2).}$$

2. Soit $N \geq 1$. Par définition $\Omega_N = \{0\} \times \{0,1\} \times \{0,1,2,\cdots,N-1\}$. Donc

$$\mathrm{card}(\Omega_N) = \prod_{i=1}^{N} \mathrm{card}(\{0,1,\cdots,i-1\}).$$

D'où

$$\mathrm{card}(\Omega_N) = \prod_{i=1}^{N} i.$$

Donc $\boxed{\mathrm{card}(\Omega_N) = N!.}$

3. Soit $(a_1,a_2,\cdots,a_N) \in \Omega_N$. Par hypothèse, les tirages étant indépendants dans leur ensemble, on en déduit que

$$P\left((T_1 = a_1) \cap (T_2 = a_2) \cap \cdots \cap (T_N = a_N)\right) = \prod_{k=1}^{N} P(T_k = a_k).$$

De plus, pour tout $(k,i) \in \{1,2,\cdots,N\} \times \{0,1,\cdots,k-1\}$, $P(T_k = i) = \frac{1}{k}$. D'où

$$P\left((T_1 = a_1) \cap (T_2 = a_2) \cap \cdots \cap (T_N = a_N)\right) = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{k}.$$

Autrement dit,

$$\boxed{P\left((T_1 = a_1) \cap (T_2 = a_2) \cap \cdots \cap (T_N = a_N)\right) = \frac{1}{N!}}.$$

4. **(INFO)**

```
import random as rd
def tirage(N) :
    if N>=1 :
        L=[]
        for k in range(N) :
            a=rd.randint(0,k)
            L.append(a)
        return L
```

5. Soit $N \geq 1$. Notons A l'événement "le candidat gagne en affirmant que le premier 0 est le dernier". A est alors l'ensemble des tirages où le seul 0 est le premier. Donc $A = \{0\} \times \{1\} \times \{1,2\} \times \cdots \times \{1,2,\cdots,N-1\}$. Ω_N étant muni de la probabilité uniforme, on en déduit que
$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega_N)}.$$
Mais $\text{card}(A) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (N-1) = (N-1)!$. D'où
$$P(A) = \frac{(N-1)!}{N!}.$$
Par conséquent,
$$\boxed{P(A) = \frac{1}{N}.}$$

6. Soient $N \geq 1$ et $k \in \{1, \cdots, N\}$.
   (a) Par définition, D_k est exactement l'événement $(T_k = 0) \cap \left(\cap_{i=k+1}^N \overline{(T_i = 0)}\right)$. Donc
$$\begin{aligned} P(D_k|(T_k=0)) &= \tfrac{P(D_k \cap (T_k=0)}{P(T_k=0)} \\ &= \tfrac{P(D_k)}{P(T_k=0)} \qquad \text{car } D_k \subset (T_k = 0). \end{aligned}$$
   Les tirages étant indépendants dans leur ensemble, il en résulte que
$$\begin{aligned} P(D_k|(T_k=0)) &= \tfrac{P(T_k=0)\prod_{i=k+1}^N P(\overline{(T_i=0)})}{P(T_k=0)} \\ &= \textstyle\prod_{i=k+1}^N P(\overline{(T_i=0)}) \\ &= \textstyle\prod_{i=k+1}^N (1 - P(T_i=0)) \\ &= \textstyle\prod_{i=k+1}^N (1 - \frac{1}{i}) \end{aligned}$$
   D'où
$$\boxed{P(D_k|(T_k=0)) = \prod_{i=k+1}^N (1 - \frac{1}{i}).}$$
   (b) On a
$$\begin{aligned} P(D_k|(T_k=0)) &= \textstyle\prod_{i=k+1}^N (1 - \frac{1}{i}), \qquad \text{D'après la question 6.a,} \\ &= \textstyle\prod_{i=k+1}^N \frac{i-1}{i} \\ &= \tfrac{k}{k+1}\tfrac{k+1}{k+2} \cdots \tfrac{i-1}{i} \cdots \tfrac{N-1}{N} \\ &= \tfrac{k}{\cancel{k+1}}\tfrac{\cancel{k+1}}{\cancel{k+2}} \cdots \tfrac{\cancel{i-1}}{\cancel{i}} \cdots \tfrac{\cancel{N-1}}{N} \quad \text{Par télescopage} \\ &= \underline{\tfrac{k}{N}}. \end{aligned}$$
   (c) L'événement D_k étant inclus dans $(T_k = 0)$, on en déduit que
$$\begin{aligned} P(D_k) &= P((T_k=0) \cap D_k) \\ &= P(T_k=0)P(D_k|T_k=0) \\ &= \tfrac{1}{k}\tfrac{k}{N} \qquad \text{les différents tirages étant équiprobable et d'après la question 6.c} \\ &= \underline{\tfrac{1}{N}}. \end{aligned}$$

7. Soit $N \geq 1$.

(a) Soit $(k,\ell) \in \{1,2\cdots,N\}^2, k < \ell-1$. On a

$$\begin{aligned}
P(B_{k,\ell}) &= P(\cap_{i=k+1}^{\ell-1}\overline{(T_i=0)}) \\
&= \textstyle\prod_{i=k+1}^{\ell-1} P(\overline{T_i=0}), \qquad \text{les événements étant indépendants dans leur ensemble} \\
&= \textstyle\prod_{i=k+1}^{\ell-1}(1-P(T_i=0)) \\
&= \textstyle\prod_{i=k+1}^{\ell-1}(1-\frac{1}{i}) \\
&= \textstyle\prod_{i=k+1}^{\ell-1}\frac{i-1}{i} \\
&= \tfrac{k(k+1)\cdots(\ell-2}{(k+1)(k+2)\cdots(\ell-1)} \\
&= \underline{\tfrac{k}{\ell-1}} \qquad \text{en simplifiant.}
\end{aligned}$$

(b) Soit $k \in \{1,2,\cdots,N-1\}$.

i. Montrons que : $A_k = \displaystyle\bigcup_{\ell=k+1}^{N}(D_\ell \cap B_{k,\ell})$ par double inclusion.

— Soit $\omega = (\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N) \in A_k$. Notons k_0 l'indice du dernier 0. Par définition de k_0, ω_{k_0} est le dernier 0. Donc $\omega \in D_{k_0}$. De plus, par définition de A_k, ω_{k_0} est le seul 0 obtenu à partir du rang $k+1$. Donc $\omega \in B_{k,k_0}$. Par conséquent, $\omega \in D_{k_0} \cap B_{k,k_0}$. D'où

$$\omega \in \bigcup_{\ell=k+1}^{N}(D_\ell \cap B_{k,\ell}).$$

On a bien

$$\underline{A_k \subset \bigcup_{\ell=k+1}^{N}(D_\ell \cap B_{k,\ell}).}$$

— Soit $\omega = (\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N) \in \bigcup_{\ell=k+1}^{N}(D_\ell \cap B_{k,\ell})$. Il existe donc $k_0 \in \{k+1,\cdots,N\}$ tel que ω est un élément de $(D_{k_0} \cap B_{k,k_0})$. Donc l'unique 0 obtenu après le rang k (exclus) est ω_{k_0}. Donc ω est bien un élément de A_k. D'où

$$\underline{\bigcup_{\ell=k+1}^{N}(D_\ell \cap B_{k,\ell}) \subset A_k.}$$

— D'après le principe de double inclusion,

$$\boxed{\bigcup_{\ell=k+1}^{N}(D_\ell \cap B_{k,\ell}) = A_k.}$$

ii. D'après la question 7.b.i, $\bigcup_{\ell=k+1}^{N}(D_\ell \cap B_{k,\ell}) = A_k$. Les événements $(D_\ell \cap B_{k,\ell})_{k+1\leq \ell \leq N}$ étant deux à deux incompatibles, on en déduit que

$$P(A_k) = \sum_{\ell=k+1}^{N} P(D_\ell \cap B_{k,\ell}).$$

Or pour tout $\ell \in \{k+1, \cdots, N\}$, $D_\ell = (T_\ell = 0) \cap (\cap_{i=\ell+1}^{N} \overline{(T_i = 0)})$ et $B_{k,\ell} = \cap_{i=k+1}^{\ell-1} \overline{(T_i = 0)}$. Les tirages étant indépendants dans leur ensemble, ces deux événements sont donc indépendants. D'où

$$P(A_k) = \sum_{\ell=k+1}^{N} P(D_\ell) P(B_{k,\ell}).$$

En remplaçant par leur valeur,

$$P(A_k) = \sum_{\ell=k+1}^{N} \frac{1}{N} \frac{k}{\ell - 1}.$$

D'où

$$\boxed{P(A_k) = \frac{k}{N} \left(\sum_{\ell=k+1}^{N} \frac{1}{\ell - 1} \right).}$$

L'événement A_k étant indépendant de $(T_k = 0)$, on en déduit que

$$P(A_k | T_k = 0) = P(A_k).$$

D'où

$$\boxed{P(A_k | T_k = 0) = \frac{k}{N} \left(\sum_{\ell=k+1}^{N} \frac{1}{\ell - 1} \right).}$$

8. Soient $N \geq 3, k \in \{1, 2, \cdots, N-1\}$.

$$\begin{aligned} (P(A_k | T_k = 0) < P(D_k | T_k = 0)) &\Leftrightarrow \tfrac{k}{N} \textstyle\sum_{\ell=k+1}^{N} \tfrac{1}{\ell-1} < \tfrac{k}{N} \\ &\Leftrightarrow \textstyle\sum_{\ell=k+1}^{N} \tfrac{1}{\ell-1} < 1 \qquad (\tfrac{k}{N} > 0) \end{aligned}$$

En posant $\ell' = \ell - 1$, on a alors

$$\boxed{(P(A_k | T_k = 0) < P(D_k | T_k = 0)) \Leftrightarrow \sum_{\ell'=k}^{N-1} \frac{1}{\ell'} < 1.}$$

9. — Calculons k_3 : $1 + \frac{1}{2} > 1$ et $\frac{1}{2} < 1$. Donc $k_3 = 2$.
   — Calculons k_4 : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} > 1, \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} < 1$. Donc $k_4 = 2$.

10.

```
def arrete(N) :
    S=0
    for i in range(N-1,0,-1) :
        S=S+(1/i)
        if S>=1 :
            return i+1
```

11. Dans les questions suivantes, on veut démontrer que :

$$\forall N \geq 3, \forall k \in \{2, 3, \cdots, N-1\}, \ln\left(\frac{N}{k}\right) \leq \sum_{\ell=k}^{N-1} \frac{1}{\ell} \leq \ln\left(\frac{N-1}{k-1}\right).$$

Soient $N \geq 3, \ell \in \{2, 3, \cdots, N-1\}$.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x \in [\ell, \ell+1] &\Leftrightarrow (\ell \leq x \leq \ell+1) \\ &\Leftrightarrow (\ell - 1 \leq x - 1 \leq \ell) \\ &\Leftrightarrow (x - 1 \leq \ell \leq x) \\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{x-1} \geq \tfrac{1}{\ell} \geq \tfrac{1}{x} \qquad \text{car } x \mapsto \tfrac{1}{x} \text{ strictement décroissante sur } \mathbb{R}^{+\star},\ \ell > 0 \end{aligned}$$

(b) Pour tout $x \in [\ell, \ell+1]$, on a

$$\frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{\ell} \geq \frac{1}{x}$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_{\ell}^{\ell+1} \frac{1}{t-1} dt \geq \int_{\ell}^{\ell+1} \frac{1}{\ell} dt \geq \int_{\ell}^{\ell+1} \frac{1}{t} dt.$$

D'où

$$\ln(\ell) - \ln(\ell - 1) \geq \frac{1}{\ell} \geq \ln(\ell+1) - \ln(\ell).$$

Autrement dit,

$$\boxed{\ln(\ell+1) - \ln(\ell) \leq \frac{1}{\ell} \leq \ln(\ell) - \ln(\ell - 1).}$$

12. Soient $N \geq 3$, $k \in \{2, 3, \cdots, N-1\}$. D'après la question 11.b,

$$\forall \ell \in \{k, k+1, \cdots, N-1\}, \ln(\ell+1) - \ln(\ell) \leq \frac{1}{\ell} \leq \ln(\ell) - \ln(\ell-1).$$

En sommant, on obtient

$$\sum_{\ell=k}^{N-1} (\ln(\ell+1) - \ln(\ell)) \leq \sum_{\ell=k}^{N-1} \frac{1}{\ell} \leq \sum_{\ell=k}^{N-1} (\ln(\ell) - \ln(\ell-1)).$$

On reconnaît des sommes télescopiques à gauche et à droite de l'inégalité. D'où

$$\ln(N) - \ln(k) \leq \sum_{\ell=k}^{N-1} \frac{1}{\ell} \leq \ln(N-1) - \ln(k-1).$$

Autrement dit,

$$\boxed{\ln\left(\frac{N}{k}\right) \leq \sum_{\ell=k}^{N-1} \frac{1}{\ell} \leq \ln\left(\frac{N-1}{k-1}\right).}$$

13. Soit $N \geq 5$. Par définition de k_N, on a

$$\sum_{k=k_N}^{N-1} \frac{1}{k} < 1.$$

Mais d'après la question 11, $\ln(\frac{N}{k_N}) \leq \sum_{k=k_N}^{N-1} \frac{1}{k}$. D'où $\ln(\frac{N}{k_N}) < 1$. De plus,

$$\sum_{k=k_N-1}^{N-1} \frac{1}{k} \geq 1$$

et $\sum_{k=k_N-1}^{N-1} \frac{1}{k} \leq \ln(\frac{N-1}{k_N-1-1})$. D'où

$$1 \leq \ln(\frac{N-1}{k_N-1-1}) < \ln(\frac{N}{k_N-2}).$$

D'où

$$\boxed{\ln(\frac{N}{k_N}) < 1 < \ln(\frac{N}{k_N-2}).}$$

14. Soit $N \geq 5$. On a

$$\ln(\frac{N}{k_N}) < 1$$

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\frac{N}{k_N} < e.$$

D'où $\frac{N}{e} < k_N$. Mais $\lim_{N\to+\infty} \frac{N}{e} = +\infty$. D'où

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} k_N = +\infty.}$$

15. Soit $N \geq 5$. D'après la question 13, on a

$$\ln(\frac{N}{k_N}) < 1 < \ln(\frac{N}{k_N-2}).$$

D'où, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$0 < \frac{N}{k_N} < e < \frac{N}{k_N-2}.$$

Par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+\star}$:

$$\frac{k_N}{N} > e > \frac{k_N-2}{N}$$

D'où

$$\frac{k_N}{N} > \frac{1}{e} \text{ et } \frac{1}{e} + \frac{2}{N} > \frac{k_N}{N}.$$

Autrement dit,

$$\frac{1}{e} + \frac{2}{N} > \frac{k_N}{N} > \frac{1}{e}.$$

Or $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{e} + \frac{2}{N} = \frac{1}{e}$. D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \frac{k_N}{N} = \frac{1}{e}.}$$

16. Soit $N \geq 5$. d'après l'énoncé, $G_N = A_{k_N-1}$. Donc, d'après la question 7.b, on a

$$P(G_N) = \frac{k_N-1}{N} \sum_{k=k_N}^{N} \frac{1}{k-1} = \frac{k_N-1}{N} \sum_{k=k_N-1}^{N-1} \frac{1}{k}.$$

Or, $\ln(\frac{N}{k_N-1}) \leq \sum_{k=k_N-1}^{N-1} \frac{1}{k} \leq \ln(\frac{N}{k_N-3})$. D'où

$$\ln(\frac{N}{k_N}) + \ln(\frac{1}{1-\frac{1}{k_N}}) \leq \sum_{k=k_N-1}^{N-1} \frac{1}{k} \leq \ln(\frac{N}{k_N}) + \ln(\frac{1}{1-\frac{3}{k_N}})$$

D'où

$$\frac{k_N-1}{N}\left(\ln(\frac{N}{k_N})+\ln(\frac{1}{1-\frac{1}{k_N}})\right) \leq \frac{k_N-1}{N}(\sum_{k=k_N-1}^{N-1}\frac{1}{k}) \leq \frac{k_N-1}{N}(\ln(\frac{N}{k_N})+\ln(\frac{1}{1-\frac{3}{k_N}})).$$

Donc

$$(\frac{k_N}{N}-\frac{1}{N})\left(\ln(\frac{N}{k_N})+\ln(\frac{1}{1-\frac{1}{k_N}})\right) \leq \frac{k_N-1}{N}(\sum_{k=k_N-1}^{N-1}\frac{1}{k}) \leq (\frac{k_N}{N}-\frac{1}{N})(\ln(\frac{N}{k_N})+\ln(\frac{1}{1-\frac{3}{k_N}})).$$

Autrement dit,

$$(\frac{k_N}{N}-\frac{1}{N})\left(\ln(\frac{N}{k_N})+\ln(\frac{1}{1-\frac{1}{k_N}})\right) \leq P(G_N) \leq (\frac{k_N}{N}-\frac{1}{N})(\ln(\frac{N}{k_N})+\ln(\frac{1}{1-\frac{3}{k_N}})).$$

D'après les questions 14 et 15, $\lim_{N\to+\infty} k_N = +\infty, \lim_{N\to+\infty}\frac{k_N}{N} = \frac{1}{e}$. En appliquant les calculs usuels sur les limites et par continuité sur $\mathbb{R}^{+\star}$ de ln, on en déduit que les membres gauche et droit de l'inégalité ont comme limite $\frac{1}{e}$ lorsque $N \to +\infty$. Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\underline{\lim_{N\to+\infty} P(G_N) = \frac{1}{e}}$.

17. D'après l'énoncé, $e < 3$. Donc $\frac{1}{e} > \frac{1}{3}$. Or $\lim_{N\to+\infty} P(G_N) = \frac{1}{e}$. On en déduit que pour N assez grand, on a alors $P(G_N) > \frac{1}{3}$. En adoptant la stratégie $\mathcal{S}$, on a bien plu d'une chance sur trois de gagner.

Problème 2

On considère le polynôme $P_t = 4X^5 + 5tX^4 - 4$ où $t \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

1. ***(Informatique)** Écrire une fonction `polynome(t,x)` qui prend en arguments une valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$ et un réel $x \in \mathbb{R}$ puis qui renvoie la valeur de $P_t(x)$.*

   ▶ Par exemple :

```
def polynome(t,x):
    return 4*(x**5)+5*t*(x**4)-4
```

2. *Pour cette question, on fixe $t \in \mathbb{R}$.*

   (a) *Factoriser le polynôme dérivé P_t' dans $\mathbb{C}[X]$. Quelles sont ses racines et leur multiplicité ?*

   ▶ On a :

$$P_t' = 20X^4 + 20tX^3 = \boxed{20X^3(X+t)} = 20(X-0)^3(X-(-t)).$$

   Ainsi, si $t \neq 0$ alors les racines de P_t' sont $\boxed{0 \text{ de multiplicité } 3}$ et $\boxed{-t \text{ de multiplicité } 1}$. Mais si $t = 0$ alors la seule racine de P_t' est $\boxed{0 \text{ de multiplicité } 4}$.

   (b) *En déduire que P_t admet cinq racines simples dans $\mathbb{C}$ si $t \neq 4^{1/5}$.*

   ▶ On a $P_t(0) = -4 \neq 0$ et :

$$P_t(-t) = 4(-t)^5 + 5t(-t)^4 - 4 = -4t^5 + 5t^5 - 4 = t^5 - 4.$$

   Donc :

$$P_t(-t) = 0 \iff t^5 - 4 = 0 \iff t^5 = 4 \iff t = 4^{1/5}.$$

   Ainsi, si $t \neq 4^{1/5}$, les racines de P_t' ne sont pas des racines de P_t. Par conséquent, toutes les racines de P_t sont de multiplicité 1. Puisque P_t est de degré 5, on en déduit d'après le théorème fondamental de l'algèbre que $\boxed{P_t \text{ admet cinq racines simples dans } \mathbb{C}}$.

3. *Déterminer le nombre de racines de P_t dans $\mathbb{C}$ et leur multiplicité dans le cas où $t = 4^{1/5}$.*

▶ Si $t = 4^{1/5}$, on a vu aux questions précédentes que $P_t'(-t) = 0$ et $P_t(-t) = 0$. Par conséquent, $-t$ est une racine de P_t de multiplicité au moins égale à 2.

Attention : on n'a pas encore démontré que la multiplicité de la racine $-t$ est exactement égale à 2. La multiplicité peut être plus grande si les dérivées d'ordre supérieur de P_t s'annulent en $-t$.

De plus, on a :

$$P_t'' = 20 \times 4X^3 + 20t \times 3X^2 = 20X^2(4X + 3t)$$
$$\text{donc} \quad P_t''(-t) = 20(-t)^2(-4t + 3t) = -20t^3 = -20(4^{1/5})^3 = -20 \times 4^{3/5} \neq 0.$$

Par conséquent, $-t$ est une racine de P_t de multiplicité exactement égale à 2. En raisonnant comme à la question précédente, on montre que toutes les autres racines de P_t sont de multiplicité 1. Puisque P_t est de degré 5, on en déduit d'après le théorème fondamental de l'algèbre que $\boxed{P_t \text{ admet quatre racines dans } \mathbb{C} \text{ : trois racines simples et une racine double égale à } -t = -4^{1/5}}$.

4. *Pour cette question, on fixe $t > 0$.*

(a) *Dresser le tableau des variations de la fonction $x \mapsto P_t(x)$.*

▶ On a vu à la question 2(a) que :

$$x \mapsto P_t'(x) = 20x^3(x + t).$$

Or $20 > 0$, $x^3 > 0 \iff x > 0$ et $x + t > 0 \iff x > -t$. Puisque $-t < 0$, on en déduit le tableau des variations suivant :

x	$-\infty$		$-t$		0		$+\infty$
$P_t'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P_t(x)$	$-\infty$	↗	$t^5 - 4$	↘	-4	↗	$+\infty$

car :

- $\lim_{x\to-\infty} P_t(x) = \lim_{x\to-\infty} 4x^5 = -\infty$ à l'aide de l'équivalent $4x^5 + 5tx^4 - 4 \sim_{x\to-\infty} 4x^5$
- $P_t(-t) = t^5 - 4$ en reprenant le calcul de la question 2(b)
- $P_t(0) = -4$
- $\lim_{x\to+\infty} P_t(x) = \lim_{x\to+\infty} 4x^5 = +\infty$ à l'aide de l'équivalent $4x^5 + 5tx^4 - 4 \sim_{x\to+\infty} 4x^5$.

(b) *En déduire le nombre de racines de P_t dans $\mathbb{R}$ en distinguant plusieurs cas.*

▶ La fonction $x \mapsto P_t(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale. On a $-4 < 0$ et

$$t^5 - 4 > 0 \iff t > 4^{1/5} \quad \text{car la fonction } t \mapsto t^{1/5} \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

À l'aide du tableau des variations de la question précédente et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $P_t(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet :

- une seule solution $x_1 \in]0, +\infty[$ si $t^5 - 4 < 0 \iff t < 4^{1/5}$
- deux solutions $x_1 = -t$ et $x_2 \in]0, +\infty[$ si $t^5 - 4 = 0 \iff t = 4^{1/5}$
- trois solutions $x_1 \in] - \infty, -t[$, $x_2 \in] - t, 0[$ et $x_3 \in]0, +\infty[$ si $t^5 - 4 > 0 \iff t > 4^{1/5}$.

Finalement, le nombre de racines de P_t dans $\mathbb{R}$ vaut $\boxed{1 \text{ si } t < 4^{1/5}, 2 \text{ si } t = 4^{1/5} \text{ et } 3 \text{ si } t > 4^{1/5}}$.

Pour la suite de l'énoncé, on note $r(t)$ l'unique racine réelle positive de P_t pour tout $t > 0$.

5. *Justifier que $r(t) \in]0,1[$ pour tout $t > 0$.*

   ▶ Soit $t > 0$. On a :

$$P_t(0) = -4 < 0 \quad \text{et} \quad P_t(1) = 4 + 5t - 4 = 5t > 0.$$

   D'après le tableau des variations de la question 4(a), on en déduit que $\boxed{r(t) \in]0,1[}$.

x	0	$r(t)$	1
$P_t(x)$	-4 ↗	0 ↗	$5t$

6. ***(Informatique)***

   (a) *En utilisant la fonction* `polynome`*, écrire une fonction* `dichotomie1(t,n)` *qui prend en arguments une valeur du paramètre $t > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ puis qui renvoie, à l'aide d'un algorithme de dichotomie, le n-ième terme d'une suite qui converge vers $r(t)$.*

   ▶ On définit deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ par :

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0,\ a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f(a_n)f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0 \\ \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0,\ b_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f(a_n)f(\frac{a_n+b_n}{2}) < 0 \\ b_n & \text{sinon.} \end{cases}$$

   D'après la méthode de dichotomie, les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes et convergent vers une solution de l'équation $P_t(x) = 0$ d'inconnue $x \in [0,1]$. Puisque cette équation admet $r(t)$ comme unique solution d'après le résultat de la question précédente, il suffit donc que la fonction `dichotomie1` renvoie le n-ième terme d'une de ces deux suites. Par exemple :

```
def dichotomie1(t,n):
    a=0
    b=1
    for i in range(n):
        if polynome(t,a)*polynome(t,(a+b)/2)<0:
            b=(a+b)/2
        else:
            a=(a+b)/2
    return a
```

   (b) *Écrire une fonction* `approximation1(t,epsilon)` *qui prend en arguments une valeur du paramètre $t > 0$ et une précision $\varepsilon > 0$ puis qui renvoie une valeur approchée de $r(t)$ à ε près.*

   ▶ De plus, on sait d'après la méthode de dichotomie que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad a_n \leqslant r(t) \leqslant b_n \quad \text{et} \quad b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{1}{2^n}.$$

   On en déduit que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant r(t) - a_n \leqslant b_n - a_n = \frac{1}{2^n} \quad \text{donc} \quad |a_n - r(t)| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

   Ainsi, pour obtenir une valeur approchée de $r(t)$ à ε près, il suffit de renvoyer le terme a_n en choisissant une valeur de $n \geqslant 0$ suffisamment grande pour que $\frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon$. Par exemple :

```
def approximation1(t,epsilon):
    n=0
    while 1/(2**n)>epsilon:
        n=n+1
    return dichotomie1(t,n)
```

On peut également résoudre l'inéquation $\frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon \iff n \geqslant \ln(\frac{1}{\varepsilon})/\ln(2)$. Il suffit donc de choisir pour valeur de n l'entier $\lfloor \ln(\frac{1}{\varepsilon})/\ln(2) \rfloor + 1$. N'oubliez pas la partie entière ! Ce qui donne en Python :

```
import numpy as np
def approximation1(t,epsilon):
    n=int(np.log(1/epsilon)/np.log(2))+1
    return dichotomie1(t,n)
```

7. (a) *On fixe $t_2 > t_1 > 0$ dans cette question. Déterminer le signe de $P_{t_1}(r(t_2))$.*

▶ On a :

$$P_{t_1}(r(t_2)) = 4(r(t_2))^5 + 5t_1(r(t_2))^4 - 4.$$

Or :

$$4(r(t_2))^5 + 5t_2(r(t_2))^4 - 4 = P_{t_2}(r(t_2)) = 0 \quad \text{par définition de } r(t_2).$$

Donc :

$$4(r(t_2))^5 = -5t_2(r(t_2))^4 + 4$$

et :

$$P_{t_1}(r(t_2)) = -5t_2(r(t_2))^4 + 4 + 5t_1(r(t_2))^4 - 4 = 5(t_1 - t_2)(r(t_2))^4.$$

Puisque $t_1 - t_2 < 0$ (car $t_2 > t_1$) et $r(t_2) > 0$ d'après le résultat de la question 5, on en déduit que $\boxed{P_{t_1}(r(t_2)) < 0}$.

(b) *En déduire la monotonie de la fonction $r : t \mapsto r(t)$ sur $]0, +\infty[$.*

▶ On fixe $t_2 > t_1 > 0$. On sait que la fonction $x \mapsto P_{t_1}(x)$ est strictement croissante sur $]0, 1[$ d'après le tableau des variations de la question 4(a). Or $P_{t_1}(r(t_2)) < 0 = P_{t_1}(r(t_1))$ d'après le résultat de la question précédente. Par conséquent, on a montré que $r(t_2) < r(t_1)$.

x	0	$r(t_2)$	$r(t_1)$	1
$P_{t_1}(x)$	-4 ↗	< 0 ↗	$= 0$ ↗	$5t_1$

Puisque ceci est vrai pour tout $(t_1, t_2) \in]0, +\infty[^2$ tels que $t_1 < t_2$, on en déduit que la fonction $\boxed{r : t \mapsto r(t) \text{ est strictement décroissante sur }]0, +\infty[}$.

8. (a) *Justifier que r se prolonge par continuité en 0.*

▶ La fonction r est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ d'après le résultat de la question précédente. De plus, elle est majorée par 1 d'après le résultat de la question 5. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que la limite de $r(t)$ quand t tend vers 0^+ existe et est finie. Par conséquent, $\boxed{r \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$ en posant $r(0) = \lim_{t\to 0^+} r(t)$.

(b) *On note encore r le prolongement obtenu. Déterminer $r(0)$.*

▶ On a pour tout $t > 0$:

$$4(r(t))^5 + 5t(r(t))^4 - 4 = P_t(r(t)) = 0 \quad \text{par définition de } r(t).$$

Puisque $r(0) = \lim_{t\to 0^+} r(t)$ d'après le résultat de la question précédente, on obtient en passant à la limite quand $t \to 0^+$:

$$0 = \lim_{t\to 0^+} 4(r(t))^5 + 5t(r(t))^4 - 4 = 4r(0)^5 + 5 \times 0 \times r(0)^4 - 4 = 4(r(0)^5 - 1).$$

On en déduit que $r(0)^5 = 1$ donc $\boxed{r(0) = 1}$.

(c) Montrer que $r(t) - 1$ est équivalent à $-t/4$ quand t tend vers 0^+.

▶ On a pour tout $t > 0$:

$$4(r(t))^5 + 5t(r(t))^4 - 4 = P_t(r(t)) = 0 \quad \text{par définition de } r(t).$$

Par conséquent :

$$\forall t > 0, \quad -\frac{5}{4}t(r(t))^4 = (r(t))^5 - 1 = \Big(1 + (r(t) - 1)\Big)^5 - 1.$$

Or $\lim_{t\to 0^+} r(t) = r(0) = 1$ d'après le résultat de la question précédente. Donc $-\frac{5}{4}t(r(t))^4$ est équivalent à $-\frac{5}{4}t$ quand t tend vers 0^+. De plus $\lim_{t\to 0^+}(r(t) - 1) = 0$ et donc d'après les équivalents usuels :

$$\Big(1 + (r(t) - 1)\Big)^5 - 1 \underset{t\to 0^+}{\sim} 5(r(t) - 1).$$

Finalement, on a :

$$-\frac{5}{4}t \underset{t\to 0^+}{\sim} -\frac{5}{4}t(r(t)) = \Big(1 + (r(t) - 1)\Big)^5 - 1 \underset{t\to 0^+}{\sim} 5(r(t) - 1) \quad \text{donc} \quad \boxed{r(t) - 1 \underset{t\to 0^+}{\sim} -\frac{t}{4}}.$$

9. (a) Justifier que $\ell = \lim_{t\to+\infty} r(t)$ existe et est finie.

▶ La fonction r est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ d'après le résultat de la question 7(b). De plus, elle est minorée par 0 d'après le résultat de la question 5. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que $\boxed{\ell = \lim_{t\to+\infty} r(t) \text{ existe et est finie}}$.

(b) Montrer que $\ell > 0$ est absurde. En déduire la valeur de ℓ.

▶ On suppose que $\ell > 0$. On a pour tout $t > 0$:

$$4(r(t))^5 + 5t(r(t))^4 - 4 = P_t(r(t)) = 0 \quad \text{par définition de } r(t).$$

Puisque $\lim_{t\to+\infty} = \ell > 0$, on obtient en passant à la limite quand $t \to +\infty$.

$$0 = \lim_{t\to+\infty} \underbrace{4(r(t))^5}_{\to+\infty} + \underbrace{5t(r(t))^4}_{\to 5\ell(+\infty)=+\infty} -4 = +\infty.$$

Ce qui est $\boxed{\text{absurde}}$. On en déduit que $\ell \leqslant 0$. Or on a $r(t) > 0$ pour tout $t > 0$ d'après le résultat de la question 5. En passant à la limite quand $t \to +\infty$, on en déduit que $\ell = \lim_{t\to+\infty} r(t) \geqslant 0$. Finalement, on a montré que $\boxed{\ell = 0}$.

(c) Montrer que $r(t)$ est équivalent à $(4/(5t))^{1/4}$ quand t tend vers $+\infty$.

▶ On a pour tout $t > 0$:

$$4(r(t))^5 + 5t(r(t))^4 - 4 = P_t(r(t)) = 0 \quad \text{par définition de } r(t).$$

Par conséquent :

$$\forall t > 0, \quad \frac{r(t)}{\left(\frac{4}{5t}\right)^{1/4}} = \left(\frac{5t(r(t))^4}{4}\right)^{1/4} = \left(\frac{4 - 4(r(t))^5}{4}\right)^{1/4} = \Big(1 - (r(t))^5\Big)^{1/4}.$$

Or $\lim_{t\to+\infty}(1 - (r(t))^5)^{1/4} = 1$ car $\lim_{t\to+\infty} r(t) = \ell = 0$ d'après le résultat de la question précédente. On en déduit bien que :

$$\boxed{r(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \left(\frac{4}{5t}\right)^{1/4}}.$$

10. *On pose la fonction $f : x \mapsto 4(1-x^5)/(5x^4)$.*

(a) *Montrer que f réalise une bijection de $]0,1]$ vers un intervalle à déterminer.*

▶ La fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $]0,1]$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas (car $5x^4 = 0 \iff x = 0$). On a :

$$\forall x \in]0,1], \quad f'(x) = 4\frac{-5x^4(5x^4) - (1-x^5)20x^3}{(5x^4)^2} = 4\frac{-25x^8 - 20x^3 + 20x^8}{25x^8}$$
$$= -4x^3\frac{x^5+4}{5x^4} < 0 \quad \text{car } x > 0.$$

De plus :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 4\frac{1-x^5}{5x^4} = +\infty \quad \text{et} \quad f(1) = 4\frac{1-1}{5} = 0.$$

On en déduit le tableau des variations de f :

x	0	1
$f(x)$	‖ $+\infty$ ↘	0

Ainsi, f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0,1]$. D'après le théorème de la bijection, on en déduit que $\boxed{f :]0,1] \to [0,+\infty[\text{ est bijective}}$.

(b) *Justifier que r est la bijection réciproque de f et en déduire que r est continue sur $[0,+\infty[$.*

▶ On a pour tout $t > 0$:

$$4(r(t))^5 + 5t(r(t))^4 - 4 = P_t(r(t)) = 0 \quad \text{par définition de } r(t)$$

donc :

$$f(r(t)) = 4\frac{1-(r(t))^5}{5(r(t))^4} = \frac{4-4(r(t))^5}{5(r(t))^4} = \frac{5t(r(t))^4}{5(r(t))^4} = t.$$

On en déduit que $f \circ r = \mathrm{Id}_{]0,+\infty[}$.

> *Attention : cela ne suffit pas à montrer que r est la bijection réciproque de f. Il faut aussi vérifier que $r \circ f = \mathrm{Id}_{]0,1]}$.*

Soit $x \in]0,1]$. Par définition $r(f(x))$ est l'unique racine réelle positive du polynôme $P_{f(x)}$. Or on a $x > 0$ et :

$$P_{f(x)}(x) = 4x^5 + 5f(x)x^4 - 4 = 4x^5 + 20\frac{1-x^5}{5x^4}x^4 - 4 = 4x^5 + 4 - 4x^5 - 4 = 0.$$

Par conséquent $r(f(x)) = x$ donc $r \circ f = \mathrm{Id}_{]0,1]}$. On en déduit que $\boxed{r : [0,+\infty[\to]0,1] \text{ est la bijection réciproque de } f :]0,1] \to [0,+\infty[}$.

> *Au lieu de montrer que $f \circ r = \mathrm{Id}_{]0,+\infty[}$ et $r \circ f = \mathrm{Id}_{]0,1]}$, on peut aussi vérifier que pour tout $t > 0$, l'unique solution de l'équation $f(x) = t$ d'inconnue $x \in]0,1]$ est $x = r(t)$.*

De plus, en reprenant le raisonnement de la question précédente, on sait d'après le théorème de la bijection que la bijection réciproque de $f :]0,1] \to [0,+\infty[$ est continue. Finalement, on a bien montré que $\boxed{r \text{ est continue sur } [0,+\infty[}$.

11. (a) *Justifier que P_t admet également une unique racine réelle positive pour tout $t < 0$.*

▶ Soit $t < 0$. En reprenant les calculs des questions 4(a) et 4(b), on obtient le tableau des variations suivant :

x	$-\infty$		0		$-t$		$+\infty$
$P_t'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P_t(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	t^5-4	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $P_t(x)=0$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$ admet une seule solution $x\in]-t,+\infty[$. Par conséquent, $\boxed{P_t \text{ admet une unique racine réelle qui est positive}}$ car $-t>0$.

On note encore $r(t)$ cette racine pour tout $t<0$.

(b) ***(Informatique)*** *On considère la fonction* `mystere` *suivante.*

```
def mystere(t):
    k=0
    while polynome(t,k)<=0:
        k=k+1
    return k
```

i. Expliquer ce que renvoie la fonction `mystere`.

▶ La fonction `mystere` teste tous les entiers $k\geqslant 0$ les uns après les autres et renvoie la première valeur trouvée telle que $P_t(k)>0$. Autrement dit, la fonction `mystere` renvoie $\boxed{\text{le plus petit entier } k\geqslant 0 \text{ dont l'image par } P_t \text{ est strictement positive}}$.

ii. À l'aide de la fonction `mystere`, *écrire une fonction* `dichotomie2(t,n)` *et une fonction* `approximation2(t,epsilon)` *similaires à celles des questions 6(a) et 6(b) mais qui prennent en argument une valeur du paramètre $t<0$.*

▶ On reprend le raisonnement des questions 6(a) et 6(b) pour l'équation $P_t(x)=0$ d'inconnue $x\in[a,b]$ où $a<b$ sont deux réels tels que $P_t(a)<0$ et $P_t(b)>0$. D'après le tableau des variations de la question 11(a) et le résultat de la question précédente, on peut choisir $a=-t$ et $b=$ `mystere(t)`. Par exemple :

```
def dichotomie2(t,n):
    a=-t
    b=mystere(t)
    for i in range(n):
        if polynome(t,a)*polynome(t,(a+b)/2)<0:
            b=(a+b)/2
        else:
            a=(a+b)/2
    return a
```

On peut aussi choisir `a=0` *ou* `a=mystere-1`.

```
def approximation2(t,epsilon):
    n=0
    while (mystere(t)+t)/(2**n)>epsilon:
        n=n+1
    return dichotomie2(t,n)
```

Attention, si on choisit `a=-t` *et* `b=mystere(t)` *alors on a :*

$$\forall n \geqslant 0, \quad b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{b-a}{2^n} = \frac{\texttt{mystere(t)} + t}{2^n}.$$

Il faut donc modifier l'algorithme de la question 6(b) pour choisir une valeur de $n \geqslant 0$ suffisamment grande pour que $\frac{\texttt{mystere(t)}+t}{2^n} \leqslant \varepsilon$.

(c) À l'aide de la fonction f définie à la question 10, montrer que r est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, puis déterminer $\lim_{t\to-\infty} r(t)$ et un équivalent simple de $r(t)$ quand $t \to -\infty$.

▶ En reprenant le raisonnement de la question 10(a), on obtient que la fonction f est définie et dérivable sur $]0,+\infty[$ avec $f'(x) < 0$ pour tout $x > 0$. Son tableau des variations est :

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

car :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 4\frac{\overbrace{1-x^5}^{\sim -x^5}}{5x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-4x^5}{5x^4} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{4}{5}x = -\infty.$$

Ainsi, d'après le théorème de la bijection, $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est bijective. En reprenant le raisonnement de la question 10(b), on obtient que $f \circ r = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ et $r \circ f = \mathrm{Id}_{]0,+\infty[}$, donc $r : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ est la bijection réciproque de $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$. Par conséquent, $\boxed{r \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$ d'après le théorème de la bijection. De plus, on obtient le tableau des variations suivant :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$r(t)$	$+\infty$	↘	1	↘	0

Donc $\boxed{r \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}}$ et $\boxed{\lim_{t\to-\infty} r(t) = +\infty}$. De plus on a :

$$f(x) = 4\frac{1-x^5}{5x^4} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-4x^5}{5x^4} = -\frac{4}{5}x.$$

À l'aide du changement de variable $x = r(t)$, on en déduit que :

$$t = f(r(t)) \underset{t\to-\infty}{\sim} -\frac{4}{5}r(t) \quad \text{car } \lim_{t\to-\infty} x = +\infty.$$

Finalement, on obtient en multipliant cette équivalent par $-5/4$:

$$\boxed{r(t) \underset{t\to-\infty}{\sim} -\frac{5t}{4}}.$$

DS n$^{\text{o}}$ 7 de mathématiques et d'informatique

durée : 4 heures

Problème 1

Dans tout le problème, les sous-espaces vectoriels considérés sont inclus dans $\mathbb{R}^4$ et on note $0_{\mathbb{R}^4}$ le vecteur nul.

Dans $\mathbb{R}^4$, il existe cinq catégories de sous-espaces vectoriels :

— l'unique sous-espace vectoriel de dimension 0 qui est $\{0_{\mathbb{R}^4}\}$,

— les sous-espaces vectoriels de dimension 1 aussi appelés **droites vectorielles**,

— les sous-espaces vectoriels de dimension 2 aussi appelés **plans vectoriels**,

— les sous-espaces vectoriels de dimension 3,

— et $\mathbb{R}^4$.

On rappelle que l'intersection de deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^4$ est un espace vectoriel de dimension 2 (s'ils sont confondus), 1 (s'ils s'intersectent selon une droite vectorielle) ou bien 0 (si leur intersection contient seulement le vecteur nul).

On présente un problème qui a intéressé le mathématicien Hermann Schubert :

"étant donné E_1, E_2, F_1, F_2 quatre plans vectoriels de $\mathbb{R}^4$ tels que $E_1 \cap E_2$ et $F_1 \cap F_2$ sont égales à des droites vectorielles et les $E_i \cap F_j$ sont réduits à $\{0_{\mathbb{R}^4}\}$, décrire les plans vectoriels V tels que les $V \cap E_i$ et $V \cap F_i$ sont des droites vectorielles."

Autrement dit, E_1, E_2, F_1, F_2 sont des sous-espaces vectoriels de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$ vérifiant les hypothèses suivantes :

$$\begin{array}{l} \dim(E_1 \cap E_2) = \dim(F_1 \cap F_2) = 1, \\ \dim(E_1 \cap F_1) = \dim(E_1 \cap F_2) = \dim(E_2 \cap F_1) = \dim(E_2 \cap F_2) = 0 \end{array} \tag{D}$$

et on cherche les sous-espaces vectoriels V de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$ tels que :

$$\dim(V \cap E_1) = \dim(V \cap E_2) = \dim(V \cap F_1) = \dim(V \cap F_2) = 1. \tag{SC}$$

Ce problème se propose d'étudier un cas particulier du problème de Schubert. Dans la partie 1, on justifie que les E_1, E_2, F_1, F_2 donnés vérifient les hypothèses (D). Puis, dans la partie 2, on construit deux plans vectoriels V_1 et V_2 vérifiant (SC). Enfin, on montre que V_1 et V_2 sont les seuls plans vectoriels vérifiant (SC) dans la partie 3.

Partie 1 : présentation de l'exemple

On pose :

$$E_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x + 2y - z - t = 0 \text{ et } 3x + y + 2z + t = 0\}, \; E_2 = \text{vect}((3,1,2,-1), (-4,0,-1,1)),$$

$$F_1 = \text{vect}((2,-1,1,-2), (1,1,3,1)), \qquad F_2 = \text{vect}((4,-3,2,1), (0,-4,-5,1))$$

$$G = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + 4t = 0 \text{ et } -y + z + t = 0\}.$$

1. (**INFO**) Écrire une fonction `est_dans_E1(L)` qui prend en argument une liste L de réels de longueur 4 et qui renvoie `True` si $(L[0], L[1], L[2], L[3])$ est un élément de E_1 et `False` sinon.

2. Déterminer une base de E_1 et montrer que E_1 est bien un plan vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
3. Montrer que E_2, F_1, F_2 sont bien des plans vectoriels.
4. Montrer que $G = E_2$.
5. Déterminer un système d'équations linéaires (S) tel que pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on ait :

$$(x, y, z, t) \in F_1 \Leftrightarrow (x, y, z, t) \text{ solution de } (S).$$

6. Trouver une base de $E_1 \cap E_2$ et calculer la dimension de $E_1 \cap E_2$. On pourra déterminer les éléments de E_2 vérifiant le système d'équations caractérisant les éléments de E_1.
7. Trouver une base de $F_1 \cap F_2$ et calculer la dimension de $F_1 \cap F_2$.
8. Montrer que $\dim(E_1 \cap F_1) = \dim(E_1 \cap F_2) = \dim(E_2 \cap F_1) = \dim(E_2 \cap F_2) = 0$.
9. Conclure à l'aide des questions précédentes que E_1, E_2, F_1, F_2 vérifient bien les conditions (D).

Partie 2 : construction de solutions

Dans la suite, on pose $e = (-1, 1, 1, 0)$ et $f = (4, 1, 7, 0)$. On a alors $\text{vect}(e) = E_1 \cap E_2$ et $\text{vect}(f) = F_1 \cap F_2$.

10. On pose $V_1 = \text{vect}(e, f)$. Montrer que V_1 est un plan vectoriel et qu'il vérifie les conditions (SC).
11. On pose :

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + 22y - 21z - 17t = 0\}, F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | 27x + 25y - 19z + 5t = 0\}.$$

    Montrer que E et F sont de dimension 3.
12. Montrer que $E_1 \subset E, E_2 \subset E, F_1 \subset F, F_2 \subset F$.
13. On pose $V_2 = E \cap F$.
    (a) Montrer que V_2 est bien un plan vectoriel.
    (b) Soient H un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$ et soient P et Q deux plans vectoriels différents. On suppose que $P \subset H$ et $Q \subset H$ et on note (p_1, p_2) une base de P et (q_1, q_2) une base de Q.
        i. Justifier que $\dim(P \cap Q) \leq 1$.
        ii. Montrer que (p_1, p_2, q_1) ou (p_1, p_2, q_2) est une base de H. Quitte à échanger q_1 et q_2, on suppose que (p_1, p_2, q_1) est une base de H.
        iii. En écrivant q_2 dans la base (p_1, p_2, q_1) montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $q_2 + \lambda q_1 \in P \cap Q$.
        iv. En déduire que $\dim(P \cap Q) = 1$.
    (c) Déduire des questions précédentes que V_2 vérifie (SC).

Partie 3 : analyse du problème

On garde les notations introduites dans la partie 2.
Soit V un plan vectoriel vérifiant (SC). On veut montrer que $V = V_1$ ou $V = V_2$.

14. Justifier qu'il existe v_1, v_2, w_1, w_2 des éléments de $\mathbb{R}^4 \backslash \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ tels que

$$\text{vect}(v_1) = V \cap E_1, \text{vect}(v_2) = V \cap E_2, \text{vect}(w_1) = V \cap F_1, \text{vect}(w_2) = V \cap F_2.$$

15. Montrer que $\text{vect}(v_1, v_2) \subset V \cap E$ et $\text{vect}(w_1, w_2) \subset V \cap F$.
16. (**INFO**) Écrire une fonction Python `est_libre(L,M)` qui prend en arguments deux listes L, M de réels de longueur 4 et qui renvoie `True` si $((L[0], L[1], L[2], L[3]), (M[0], M[1], M[2], M[3]))$ est une famille libre et `False` sinon.

17. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
    (a) (v_1, v_2) est liée,
    (b) e est un élément de V,
    (c) V n'est pas inclus dans F,
    (d) (w_1, w_2) est liée,
    (e) f est un élément de V,
    (f) V n'est pas inclus dans E.
18. En déduire que (v_1, v_2) est une base de V si et seulement si (w_1, w_2) est une base de V.
19. Déduire des questions précédentes que $V = V_1$ ou $V = V_2$.

Problème 2

Ce problème présente une méthode numérique, appelée méthode des trapèzes, permettant de calculer des approximations de la valeur d'une intégrale. Les parties 1 et 2 détaillent cette méthode alors que la partie 3 propose de l'appliquer sur un exemple et de l'implémenter en Python. Seuls les résultats encadrés (qu'on peut admettre si besoin) sont utilisés d'une partie à l'autre.

Partie 1 - Une première approximation

On considère une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$ où $a < b$ sont deux réels fixés. On pose g la fonction affine définie par $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b)$. Le but de cette partie est d'estimer l'erreur commise si on approche $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ par $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ (qui correspond à l'aire d'un trapèze). Pour cela, on pose la fonction :

$$h : x \mapsto f(x) - g(x) - \lambda(x - a)(x - b)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante qui sera fixée à la question 3.

1. (a) Déterminer une expression de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire que $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = (b - a)(f(a) + f(b))/2$.
2. Calculer $\int_a^b (x - a)(x - b)\mathrm{d}x$ et écrire le résultat sous la forme $\mu(b - a)^3$ où $\mu \in \mathbb{R}$ est une constante à déterminer.
3. Montrer qu'on peut choisir la constante $\lambda \in \mathbb{R}$ afin que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$ Dans la suite, on fixe la constante λ de cette façon et on suppose donc que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$.
4. De quelle classe est la fonction h sur $[a, b]$? Justifier que la fonction h admet des primitives sur $[a, b]$. On note H une primitive de h sur $[a, b]$. Que peut-on dire des images $H(a)$ et $H(b)$?
5. (a) Déduire du résultat précédent qu'il existe un réel $c_0 \in]a, b[$ tel que $h(c_0) = 0$.
   (b) Prouver qu'il existe deux réels $(c_1, c_2) \in]a, b[^2$ tels que $c_1 < c_2$ et $h'(c_1) = h'(c_2) = 0$.
   (c) Prouver qu'il existe un réel $c \in]c_1, c_2[$ tel que $f''(c) = 2\lambda$.
6. Déduire des résultats précédents que :

$$\boxed{\exists c \in [a, b], \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2} = -\frac{(b - a)^3}{12} f''(c)}.$$

Partie 2 - La méthode des trapèzes

On considère toujours une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$ où $a < b$ sont deux réels fixés. De plus, on pose un entier $n \geqslant 1$. Le principe de la méthode des trapèzes est de subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles de même longueur sur chacun desquels on va appliquer l'approximation de la partie 1. Plus précisément, on définit $n + 1$ réels notés $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ par :

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b \quad \text{et} \quad a_1 - a_0 = a_2 - a_1 = \cdots = a_n - a_{n-1}$$

et on remarque que $[a, b] = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \cdots \cup [a_{n-1}, a_n] = \bigcup_{k=0}^{n-1} [a_k, a_{k+1}]$.

7. (a) Soit $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$. Déterminer une expression de a_k en fonction de a, b, k et n.
   (b) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2} = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\tfrac{b-a}{n}\right)\right).$$

   Dans la suite, on note $T_n(f)$ le membre de droite de cette égalité, c'est-à-dire :

$$\boxed{T_n(f) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\tfrac{b-a}{n}\right)\right)}.$$

8. (a) Justifier que la fonction $x \mapsto |f''(x)|$ admet un maximum sur $[a,b]$. Dans la suite, on note M la valeur de ce maximum.
   (b) Montrer que :

$$\forall k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}, \quad \left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right| \leqslant \frac{(b-a)^3 M}{12n^3}.$$

9. Déduire des résultats précédents que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3 M}{12n^2}}.$$

10. Quelle est la limite de $T_n(f)$ quand n tend vers $+\infty$?

Partie 3 - Application numérique

Dans cette partie, on propose d'appliquer la méthode des trapèzes pour approcher la valeur de $\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$. On pose donc la fonction $f : x \mapsto \exp(-x^2)$.

11. (a) De quelle classe est la fonction f sur $\mathbb{R}$?
    (b) Prouver que pour tout entier $k \geqslant 0$, il existe un polynôme $P_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(k)}(x) = P_k(x)e^{-x^2}.$$

    (c) Calculer P_0, P_1, P_2 et P_3.
12. Montrer que le maximum de la fonction $x \mapsto |f''(x)|$ sur $[0,1]$ est égal à $M = 2$.
13. **Informatique.** On écrira les fonctions demandées en Python et on utilisera la fonction `exp` de la bibliothèque `numpy`.
    (a) Écrire une fonction `f(x)` qui prend en argument un réel x et renvoie la valeur de e^{-x^2}.
    (b) Écrire une fonction `T(n,a,b)` qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et deux réels $a < b$ puis qui renvoie la valeur de $T_n(f)$.
    (c) Écrire une fonction `approx(epsilon)` qui prend un argument un réel $\varepsilon > 0$ et renvoie une approximation de la valeur de $\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$ à ε près.

Corrigé du DS n° 7 de mathématiques et d'informatique

Problème 1
Énoncé et corrigé de V. Vong

1. Voici la fonction demandée :

```
def est_dans_E1(L) :
    if len(L)==4 :
        a=L[0]+2*L[1]-L[2]-L[3]
        b=3*L[0]+L[1]+2*L[2]+L[3]
        return  (a==0) and (b==0)
    else :
        return
```

2. Donnons une représentation paramétrique de E_1. Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. On a

$$\begin{cases} x+2y-z-t &= 0\\ 3x+y+2z+t &= 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z-t = 0\\ 4x+3y+z \quad = 0\end{cases} \ (L_2\leftarrow L_2+L_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t &= x+2y-z\\ z &= -4x-3y\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t &= 5x+5y\\ z &= -4x-3y\end{cases}$$

On en déduit que $E_1=\{(x,y,-4x-3y,5x+5y),(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.
Donc $E_1=\mathrm{vect}((1,0,-4,5),(0,1,-3,5))$. $((1,0,-4,5),(0,1,-3,5))$ est donc <u>une famille génératrice de E_1</u>.
Montrons que c'est une famille libre. Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^4$ tel que

$$\alpha(1,0,-4,5)+\beta(0,1,-3,5)=(0,0,0,0).$$

D'où

$$(\alpha,\beta,-4\alpha-3\beta,5\alpha+5\beta)=(0,0,0,0)$$

Donc $\alpha=0,\beta=0$. On en déduit que $((1,0,-4,5),(0,1,-3,5))$ est <u>libre</u>.
Il en résulte que $\boxed{((1,0,-4,5),(0,1,-3,5)) \text{ est une base de } E_1}$.
E_1 admettant une base de cardinal 2, on en déduit que E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2. Autrement dit, $\boxed{E_1 \text{ est un plan vectoriel}}$.

3. On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{E}_2=((3,1,2,-1),(-4,0,-1,1))$, $\mathcal{F}_1=((2,-1,1,-2),(1,1,3,1))$ et $\mathcal{F}_2=((4,-3,2,1),(0,-4,-5,1))$. Montrer que E_2,F_1,F_2 sont bien des plans vectoriels revient alors à montrer que les rangs des familles $\mathcal{E}_2,\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$ sont tous égaux à 2. Calculons leur rang à l'aide de la méthode du pivot appliquée à leur matrice représentative dans la base canonique. On a :

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}_2)=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 1 & 0\\ 2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{L_2\leftrightarrow L_1} \begin{pmatrix}\underline{1} & 0\\ 3 & \underline{-4}\\ 2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice étant échelonnée en colonnes et de rang 2, on en déduit que $\mathcal{E}_2$ est de rang 2.
De même,

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} \underline{3} & 0 \\ -1 & \underline{1} \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice étant échelonnée en colonnes et de rang 2, on en déduit que $\mathcal{F}_1$ est de rang 2.
Enfin,

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_2) = \begin{pmatrix} \underline{4} & 0 \\ -3 & \underline{-4} \\ 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice étant échelonnée en colonnes et de rang 2, on en déduit que $\mathcal{F}_2$ est de rang 2.
Des calculs précédents, on en déduit que E_2, F_1, F_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2.

$\boxed{\text{Donc ce sont bien des plans vectoriels.}}$

4. Montrons que $G = E_2$. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$\begin{cases} x + y + 4t &= 0 \\ -y + z + t &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - 4t \\ y = z + t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z - 5t \\ y = z + t \end{cases}.$$

On en déduit que G est égal à $\mathrm{vect}((-1, 1, 1, 0), (-5, 1, 0, 1))$. Ainsi, G est égal à un espace vectoriel engendré par deux éléments de $\mathbb{R}^4$. Donc $\dim(G) \leq 2$. Montrons que $E_2 \subset G$.
Soit $(x, y, z, t) \in E_2$. Il existe alors $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$(x, y, z, t) = (3\alpha - 4\beta, \alpha, 2\alpha - \beta, -\alpha + \beta).$$

Donc

$$x + y + 4t = (3\alpha - 4\beta) + \alpha + 4(-\alpha + \beta) = 4\alpha - 4\beta - 4\alpha + 4\beta = 0$$

et

$$-y + z + t = -(\alpha) + (2\alpha - \beta) + (-\alpha + \beta) = -2\alpha + 2\alpha - \beta + \beta = 0.$$

Donc $(x, y, z, t) \in G$. D'où $E_2 \subset G$. Donc $\dim(E_2) \leq \dim(G)$. Or $\dim(E_2) = 2$. Donc $2 \leq \dim(G)$. Mais $2 \geq \dim(G)$. Il en résulte que $\dim(G) = 2 = \dim(E_2)$.

$\boxed{\text{Il en résulte que } G = E_2}$.

5. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$(x, y, z, t) \in F_1 \Leftrightarrow \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^4, \lambda(2, -1, 1, -2) + \mu(1, 1, 3, 1) = (x, y, z, t)$$

Autrement dit, (x, y, z, t) est un élément de F_1 si et seulement si le système d'équations

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu &= x \\ -\lambda + \mu &= y \\ \lambda + 3\mu &= z \\ -2\lambda + \mu &= t \end{cases}$$

d'inconnu $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ admet des solutions. Résolvons ce système :

$$\begin{cases} 2\lambda+\mu &= x\\ -\lambda+\mu &= y\\ \lambda+3\mu &= z\\ -2\lambda+\mu &= t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda+\mu &= x\\ -\lambda+\mu &= y\\ 4\mu &= y+z\\ 2\mu &= x+t\end{cases} \qquad (L_4\leftarrow L_4+L_1, L_3\leftarrow L_3+L_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda+\mu &= x\\ 3\mu &= 2y+x\\ 4\mu &= y+z\\ 2\mu &= x+t\end{cases} \qquad (L_2\leftarrow 2L_2+L_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda+\mu &= x\\ \mu &= 2y-t\\ 4\mu &= y+z\\ 2\mu &= x+t\end{cases} \qquad (L_2\leftarrow L_2-L_4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda+\mu &= x\\ \mu &= 2y-t\\ 0 &= -7y+z+4t\\ 0 &= x-4y+3t\end{cases} \qquad (L_3\leftarrow L_3-4L_2, L_4\leftarrow L_4-2L_2)$$

De cette étude, on en déduit que $(x,y,z,t)\in F_1$ si et seulement si :

$$\boxed{x-4y+3t=0 \ \text{ et } \ -7y+z+4t=0.}$$

6. Soit $\lambda(3,1,2,-1)+\mu(-4,0,-1,1)$ un élément de E_2. Cet élément est un élément de E_1 si et seulement si :

$$\begin{cases} (3\lambda-4\mu)+2(\lambda)-(2\lambda-\mu)-(-\lambda+\mu) &= 0\\ 3(3\lambda-4\mu)+(\lambda)+2(2\lambda-\mu)+(-\lambda+\mu) &= 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\lambda-4\mu &= 0\\ 13\lambda-13\mu &= 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lambda=\mu$$

En posant $\lambda=\mu=1$, on en déduit que $E_1\cap E_2=\text{vect}((-1,1,1,0))$. Ce vecteur étant seul et non nul, on en déduit que la famille réduite à ce vecteur est une base de $E_1\cap E_2$. Donc $\underline{\dim(E_1\cap E_2)=1}$.

7. Soit $(x,y,z,t)\in F_1\cap F_2$. Par définition, il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tels que

$$\lambda(2,-1,1,-2)+\mu(1,1,3,1)=\alpha(4,-3,2,1)+\beta(0,-4,-5,1)=(x,y,z,t)$$

Résolvons le système linéaire d'inconnus $\lambda, \mu, \alpha, \beta$ correspondant :

$$\begin{cases} 2\lambda + \mu &= 4\alpha \\ -\lambda + \mu &= -3\alpha - 4\beta \\ \lambda + 3\mu &= 2\alpha - 5\beta \\ -2\lambda + \mu &= \alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda + \mu &= 4\alpha \\ -\lambda + \mu &= -3\alpha - 4\beta \\ 4\mu &= -\alpha - 9\beta \\ 2\mu &= 5\alpha + \beta \end{cases} \quad (L_4 \leftarrow L_4 + L_1, L_3 \leftarrow L_3 + L_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda + \mu &= 4\alpha \\ 3\mu &= -2\alpha - 8\beta \\ 4\mu &= -\alpha - 9\beta \\ 2\mu &= 5\alpha + \beta \end{cases} \quad (L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda + \mu &= 4\alpha \\ 3\mu &= -2\alpha - 8\beta \\ 4\mu &= -\alpha - 9\beta \\ 0 &= 11\alpha + 11\beta \end{cases} \quad (L_4 \leftarrow 2L_4 - L_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda + \mu &= 4\alpha \\ 3\mu &= 6\alpha \\ 4\mu &= 8\alpha \\ \beta &= -\alpha \end{cases} \quad \text{(en substituant } \beta \text{ par } -\alpha\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \alpha \\ \mu = 2\alpha \\ \beta = -\alpha \end{cases}$$

Donc $(x, y, z, t) \in F_1 \cap F_2$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$(x, y, z, t) = \alpha(4, -3, 2, 1) - \alpha(0, -4, -5, 1) = \alpha(4, 1, 7, 0).$$

Il en résulte que $\boxed{F_1 \cap F_2 = \mathrm{vect}((4, 1, 7, 0))}$. Ce vecteur étant seul et non nul, on en déduit qu'il forme une famille libre. Étant génératrice de $F_1 \cap F_2$, il en résulte que c'est une base. Donc $\boxed{\dim(F_1 \cap F_2) = 1}$.

8. Montrer que pour tout $(i, j) \in \{1, 2\}^2$, $\dim(E_i \cap F_j) = 0$ revient à montrer que chacune des intersections est réduite à $0_{\mathbb{R}^4}$.
Déterminons $E_1 \cap F_1$. Soit $(x, y, z, t) \in E_1 \cap F_1$.
(x, y, z, t) étant un élément de F_1, il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $(x, y, z, t) = \alpha(2, -1, 1, -2) + \beta(1, 1, 3, 1) = (2\alpha + \beta, -\alpha + \beta, \alpha + 3\beta, -2\alpha + \beta)$.
Or (x, y, z, t) est aussi un élément de E_1. D'où

$$\begin{cases} x + 2y - z - t &= 0 \\ 3x + y + 2z + t &= 0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} (2\alpha + \beta) + 2(-\alpha + \beta) - (\alpha + 3\beta) - (-2\alpha + \beta) &= 0 \\ 3(2\alpha + \beta) + (-\alpha + \beta) + 2(\alpha + 3\beta) + (-2\alpha + \beta) &= 0 \end{cases}$$

Autrement dit,

$$\begin{cases} \alpha - \beta &= 0 \\ 5\alpha + 11\beta &= 0 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} \alpha &= \beta \\ 16\beta &= 0 \end{cases}$$

Donc $\beta = 0$ et $\alpha = 0$. Il en résulte que $(x, y, z, t) = 0_{\mathbb{R}^4}$.

Par conséquent, $\boxed{E_1 \cap F_1 \text{ est réduit à } \{0_{\mathbb{R}^4}\}}$.

Déterminons de la même façon $E_1 \cap F_2$. Soit $(x, y, z, t) = \alpha(4, -3, 2, 1) + \beta(0, -4, -5, 1)$ un élément de $E_1 \cap F_2$. On a alors

$$\begin{cases} (4\alpha) + 2(-3\alpha - 4\beta) - (2\alpha - 5\beta) - (\alpha + \beta) &= 0 \\ 3(4\alpha) + (-3\alpha - 4\beta) + 2(2\alpha - 5\beta) + (\alpha + \beta) &= 0 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} -5\alpha - 4\beta &= 0 \\ 16\alpha - 13\beta &= 0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 16 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice 2×2 étant égal à $5 \times 13 + 4 \times 16 > 0$, on en déduit que la matrice est inversible. En multipliant par l'inverse, on trouve que $\alpha = \beta = 0$. Donc $(x, y, z, t) = 0_{\mathbb{R}^4}$. Donc $\boxed{E_1 \cap F_2 = \{0_{\mathbb{R}^4}\}}$.

G étant égal à E_2, décrire $G \cap F_1$ et $G \cap F_2$ revient à décrire $G \cap F_1$ et $G \cap F_2$.

On procède alors de la même façon que précédemment.

Soit $(x, y, z, t) = \alpha(2, -1, 1, -2) + \beta(1, 1, 3, 1) \in E_2 \cap F_1$. On a donc

$$x + y + 4t = 0 \text{ et } - y + z + t = 0.$$

D'où

$$\begin{cases} (2\alpha + \beta) + (-\alpha + \beta) + 4(-2\alpha + \beta) &= 0 \\ -(-\alpha + \beta) + (\alpha + 3\beta) + (-2\alpha + \beta) &= 0 \end{cases}$$

Donc

$$\begin{cases} -7\alpha + 6\beta &= 0 \\ 3\beta &= 0 \end{cases}$$

D'où $\alpha = \beta = 0$. Il en résulte que (x, y, z, t) est égal à $0_{\mathbb{R}^4}$. Donc $\boxed{E_2 \cap F_1 = \{0_{\mathbb{R}^4}\}}$.

Déterminons $E_2 \cap F_2$. Soit $(x, y, z, t) = \alpha(4, -3, 2, 1) + \beta(0, -4, -5, 1) \in E_2 \cap F_2$.

On a donc

$$4\alpha + (-3\alpha - 4\beta) + 4(\alpha + \beta) = 0 \text{ et } - (-3\alpha - 4\beta) + (2\alpha - 5\beta) + (\alpha + \beta) = 0.$$

D'où

$$5\alpha = 0 \text{ et } - 8\beta = 0.$$

Donc $\alpha = \beta = 0$. Autrement dit, $(x, y, z, t) = 0_{\mathbb{R}^4}$. On en déduit que $\boxed{E_2 \cap F_2 = \{0_{\mathbb{R}^4}\}}$.

9. En résumé, d'après les questions 2 et 3, E_1, E_2, F_1, F_2 sont des plans vectoriels. D'après les questions 6 et 7, on a $\dim(E_1 \cap E_2) = \dim(F_1 \cap F_2) = 1$.
   D'après la question 8, les intersections des $E_i \cap F_j$ sont réduits à $\{0_{\mathbb{R}^4}\}$.
   Par conséquent, E_1, E_2, F_1, F_2 vérifient bien les conditions (D).

10. On pose $V_1 = \text{vect}(e, f)$. Montrons que V_1. est un plan vectoriel. (e, f) étant une famille génératrice de V_1, on en déduit que V_1 est de dimension au plus 2. Vérifions que cette famille est libre. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que
    $$\alpha(-1, 1, 1, 0) + \beta(4, 1, 7, 0) = (0, 0, 0, 0)$$
    D'où $-\alpha + 4\beta = 0$ et $\alpha + \beta = 0$. Donc $\alpha = 4\beta$ et $5\beta = 0$. Il en résulte que $\alpha = \beta = 0$. Donc (e, f) est une famille libre. Par conséquent, (e, f) est une base de V_1 et donc $\boxed{V_1 \text{ est bien un plan vectoriel}}$.
    Montrons que V_1 vérifie les conditions (SC).
    e étant un élément de $E_1 \cap E_2$, les intersections $E_1 \cap F_1$ et $E_1 \cap F_2$ étant réduits à $\{0_{\mathbb{R}^4}\}$, on en déduit que e n'est ni un élément de F_1 ni un élément de F_2. Donc $(V_1 \cap F_1)$ et $(V_1 \cap F_2)$ sont strictement

inclus dans V_1. Donc $\dim(V_1 \cap F_1) < 2$ et $\dim(V_1 \cap F_2) < 2$. De plus, $f \in V_1 \cap F_1$ et $f \in V_1 \cap F_2$. Donc $\mathrm{vect}(f) \subset V_1 \cap F_1$ et $\mathrm{vect}(f) \subset V_1 \cap F_2$. Donc $\dim(V_1 \cap F_1) \geq 1$ et $\dim(V_1 \cap F_2) \geq 1$. Il en résulte que $\boxed{\dim(V_1 \cap F_1) = \dim(V_1 \cap F_2) = 1}$.

De même, en échangeant les rôles de e et f, de E_1 et F_1, de E_2 et F_2, on obtient que :
$\boxed{\dim(V_1 \cap E_1) = \dim(V_1 \cap E_2) = 1}$.

11. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$(x, y, z, t) \in E \Leftrightarrow x = 22y - 21z - 17t$$

et

$$(x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow x = \frac{-25}{27}y + \frac{19}{27}z - \frac{5}{27}t$$

D'où

$$E = \mathrm{vect}((22, 1, 0, 0), (-21, 0, 1, 0), (17, 0, 0, 1)) \text{ et } F = \mathrm{vect}((-\frac{25}{27}, 1, 0, 0), (\frac{19}{27}, 0, 1, 0), (\frac{-5}{27}, 0, 0, 1))$$

Donc E et F sont des espaces vectoriels au plus de dimension 3. Montrons que ces familles génératrices sont bien de rang 3. Pour cela, il suffit de calculer le rang de leur matrice représentative dans la base canonique.

En notant $\mathcal{E} = ((22, 1, 0, 0), (-21, 0, 1, 0), (17, 0, 0, 1))$ et $\mathcal{F} = ((-\frac{25}{27}, 1, 0, 0), (\frac{19}{27}, 0, 1, 0), (\frac{-5}{27}, 0, 0, 1))$, on a alors

$$Mat_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 22 & -21 & 17 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; (L_1 \leftarrow L_1 - 22L_2 + 21L_3 - 17L_4)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; L_4 \leftrightarrow L_1$$

La matrice $Mat_{\mathcal{C}}(\mathcal{E})$ étant de rang 3, on en déduit que $\mathcal{E}$ est de rang 3, donc $\boxed{E \text{ est de dimension 3.}}$

De même,

$$Mat_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} -\frac{25}{27} & \frac{19}{27} & -\frac{5}{27} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; (L_1 \leftarrow L_1 + \tfrac{25}{27}L_2 - \tfrac{19}{27}L_3 + \tfrac{5}{27}L_4)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; L_4 \leftrightarrow L_1$$

La matrice $Mat_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})$ étant de rang 3, on en déduit que $\mathcal{F}$ est de rang 3, donc $\boxed{F \text{ est de dimension 3.}}$

12. D'après la question 2, la famille $B_1 = ((1, 0, -4, 5), (0, 1, -3, 5))$ est une base de E_1. De plus, $1 + 22 \times 0 - 21 \times (-4) - 17 \times 5 = 1 + 84 - 85 = 0$ et $1 \times 0 + 22 \times 1 - 21(-3) - 17 \times 5 = 22 + 63 - 85 = 0$. Donc B_1 est une famille de E. E étant un espace vectoriel, on a donc $\mathrm{vect}(B_1) \subset E$. Autrement dit, $\boxed{E_1 \subset E}$.

En raisonnant de façon similaire pour E_2 :

$$3 + 22 \times 1 - 21 \times 2 - 17(-1) = 25 - 42 + 17 = 0, -4 + 22 \times 0 - 21 \times (-1) - 17 \times 1 = 0.$$

Donc $((3, 1, 2, -1), (-4, 0, -1, 1))$ est une famille de E et donc $\mathrm{vect}((3, 1, 2, -1), (-4, 0, -1, 1))$ est inclus dans E. Autrement dit, $\boxed{E_2 \subset E}$.

De même, pour F_1 :

$$27\times 2+25\times(-1)-19\times 1+5\times(-2)=54-25-19+5=0, 27\times 1+25\times 1-19\times 3+5=57-57=0.$$

Donc une famille génératrice de F_1 est une famille de F. D'où $\boxed{F_1\subset F}$.
Enfin, pour F_2 :

$$27\times 4+25\times(-3)-19\times 2+5\times 1=108-75-38+5=0, 27\times 0+25\times(-4)-19\times(-5)+5=-100+95+5=0.$$

Donc une famille génératrice de F_2 est une famille génératrice de F. D'où $\boxed{F_2\subset F}$.

13. On pose $V_2=E\cap F$.
    (a) Montrons que V_2 est bien un plan vectoriel. Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. (x,y,z,t) est un élément de $E\cap F$ si et seulement si

    $$\begin{cases} x+22y-21z-17t &=0\\ 27x+25y-19z+5t &=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+22y-21z-17t &=0\\ -569y+592z+459t &=0\end{cases} \quad L_2\leftarrow L_2-27L_1$$

    Il en résulte qu'il existe $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que

    $$V_2=\operatorname{vect}((a,b,1,0),(c,d,0,1)).$$

    Donc V_2 est au plus de dimension 2. Montrons que la famille $((a,b,1,0),(c,d,0,1))$ est libre. Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que

    $$\lambda(a,b,1,0)+\mu(c,d,0,1)=(0,0,0,0)$$

    D'où, en regardant la troisième et la quatrième composantes : $\lambda=\mu=0$.
    La famille $((a,b,1,0),(c,d,0,1))$ est donc libre. Elle est aussi génératrice de V_2, il en résulte que :
    $\boxed{V_2 \text{ est bien un plan vectoriel}}$.

    (b) Soient H un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$ et soient P et Q deux plans vectoriels différents. On suppose que $P\subset H$ et $Q\subset H$ et on note (p_1,p_2) une base de P et (q_1,q_2) une base de Q.
        i. P étant de dimension 2, on a $P\cap Q$ au plus de dimension 2. Or P et Q sont différents. Donc $P\cap Q$ est strictement inclus dans P. Donc $\boxed{\dim(P\cap Q)\leq 1}$.
        ii. Supposons que ni (p_1,p_2,q_1) ni (p_1,p_2,q_2) ne sont des bases de H. Il en résulte alors que ces deux familles sont liées. Autrement dit, il existe $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ et $(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\in\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ tels que

        $$\lambda_1p_1+\lambda_2p_2+\lambda_3q_1=0_{\mathbb{R}^4}, \mu p_1+\mu_2p_2+\mu_3q_2=0_{\mathbb{R}^4}.$$

        Or (p_1,p_2) étant une base elle est en particulier libre. Donc nécessairement, $\lambda_3\neq 0, \mu_3\neq 0$. D'où

        $$q_1=-\frac{\lambda_1}{\lambda_3}p_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_3}p_2$$

        et

        $$q_2=-\frac{\mu_1}{\mu_3}p_1-\frac{\mu_2}{\mu_3}p_2.$$

        Donc (q_1,q_2) est une famille de P. Or (q_1,q_2) étant une base de Q, elle est en particulier libre. Or $\operatorname{card}((q_1,q_2))=\dim(P)$. Donc c'est une base de P. Mais c'est aussi une base de Q. D'où $P=Q$, ce qui contredit les hypothèses initiales.
        $\boxed{\text{En conclusion, } (p_1,p_2,q_1) \text{ ou } (p_1,p_2,q_2) \text{ est une base de } H.}$

iii. Par définition, q_2 est un élément de Q. Or Q est inclus dans H. Donc q_2 est un élément de H. (p_1, p_2, q_1) étant une base de H, il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$q_2 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 q_1.$$

D'où

$$q_2 - \alpha_3 q_1 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2.$$

En posant $\lambda = -\alpha_3 q_1$, le vecteur $q_2 + \lambda q_1$ est clairement un élément de Q. De plus, $q_2 + \lambda q_1$ est égal à $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2$ qui est un élément de P.

$\boxed{\text{Donc } q_2 + \lambda q_1 \text{ est un élément de } P \cap Q.}$

iv. On sait que $q_2 + \lambda q_1$ est un élément de $P \cap Q$. De plus,(q_1, q_2) étant une base de Q, $q_2 + \lambda q_1$ est un élément non nul. Donc $(q_2 + \lambda q_1)$ est une famille libre de $P \cap Q$. D'où $\dim(P \cap Q) \geq 1$. Mais on a vu que $\dim(P \cap Q) \leq 1$.

$\boxed{\text{Par conséquent, } \dim(P \cap Q) = 1.}$

(c) On a vu que V_2, E_1 et E_2 sont des plans vectoriels inclus dans E qui est de dimension 3. De plus, e est un élément de $E_1 \cap E_2$ mais n'est pas un élément de F. Donc e n'est pas un élément de V_2. Ainsi, V_2 est différent de E_1 et de E_2.
En appliquant le résultat de la question 13.b.iv, on en déduit que

$$\underline{\dim(V_2 \cap E_1) = 1, \dim(V_2 \cap E_2) = 1.}$$

De même, V_2, F_1, F_2 sont des plans vectoriels inclus dans F qui est de dimension 3. Et f est un élément de $F_1 \cap F_2$ mais n'est pas un élément de E. Donc f n'est pas un élément de V_2. Ainsi, V_2 est différent de F_1 et de F_2. En appliquant le résultat de la question 13.b.iv, on en déduit que

$$\underline{\dim(V_2 \cap F_1) = 1, \dim(V_2 \cap F_2) = 1.}$$

$\boxed{\text{En conclusion, } V_2 \text{ vérifie bien (SC).}}$

14. Les différentes intersections étant de dimension 1, elles admettent donc des bases de cardinal 1. Il existe donc v_1, v_2, w_1, w_2 des vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^4$ tels que :

$$\text{vect}(v_1) = V \cap E_1, \text{vect}(v_2) = V \cap E_2, \text{vect}(w_1) = V \cap F_1, \text{vect}(w_2) = V \cap F_2.$$

15. Par définition, v_1 est un élément de E_1 et v_2 est un élément de E_2. Or E_1 et E_2 sont inclus dans E. Donc v_1 et v_2 sont des éléments de E. D'où $\underline{\text{vect}(v_1, v_2) \text{ est inclus dans } E}$. De plus, par définition v_1 et v_2 sont des éléments de V. Donc $\underline{\text{vect}(v_1, v_2) \text{ est inclus dans } V}$. D'où $\boxed{\text{vect}(v_1, v_2) \text{ est inclus dans } V \cap E.}$
De même, en remplaçant v_i par w_i, E_i par F_i et E par F dans le raisonnement précédent, on en déduit que $\boxed{\text{vect}(w_1, w_2) \text{ est inclus dans } V \cap F.}$

16. Écrivons d'abord une fonction qui vérifie si une liste représente le vecteur nul :

```
def nul (L) :
    if len(L)==4 :
        for x in L :
            if x!=0 :
                return False
        return True
```

Voici la fonction `est_libre` :

```python
def est_libre(L,M) :
    if len(L)==4 and len(M)==4 :
        if nul(L) or nul(M) :
            return False
        else :
            lam=0
            indiceL=0
            mu=0
            indiceM=0
            for i in range(4) :
                if L[i]!=0 :
                    indiceL=i
                    lam=L[i]
                if M[i]!=0 :
                    indiceM=i
                    mu=M[i]
            if indiceM!=indiceL :
                return True
            for i in range(4) :
                if mu*L[i]!=lam*M[i] :
                    return True
            return False
```

17. Pour montrer que ces propositions sont équivalentes, on montre qu'une proposition donnée implique la suivante, et que la dernière implique la première.

    $(a \Rightarrow b)$ Supposons que (v_1, v_2) est une famille liée. Ces deux vecteurs n'étant pas nuls, il en résulte que $\mathrm{vect}(v_1) = \mathrm{vect}(v_2)$. D'où $V \cap E_1 = V \cap E_2$. Or $V \cap E_1$ est de dimension 1. Donc v_1 est un élément de $V \cap E_1$ et de $V \cap E_2$. D'où v_1 est un élément non nul de $E_1 \cap E_2 = \mathrm{vect}(e)$. Donc $\mathrm{vect}(e) = \mathrm{vect}(v_1)$. Il en résulte que e est un élément $V \cap E_1$ et donc de V.

    $(b \Rightarrow c)$ Supposons que e est un élément de V. Comme e n'est pas un élément de F, on en déduit que V n'est pas inclus dans F.

    On montre $(c) \Rightarrow (d)$ par la contraposée. Supposons que (w_1, w_2) est libre. Il s'agit alors d'une famille libre de V qui est de dimension 2. Donc (w_1, w_2) est une base de V. Donc $V = \mathrm{vect}(w_1, w_2)$. Or d'après la question 15, $\mathrm{vect}(w_1, w_2)$ est inclus dans F. Il en résulte que V est inclus dans F.

    $(d \Rightarrow e)$ Supposons que $((w_1, w_2)$ est liée. En raisonnant de la même façon que $a \Rightarrow b$ (on remplace e par f, v_i par w_i et E_i par F_i), on en déduit que $\mathrm{vect}(f) = \mathrm{vect}(w_1) = \mathrm{vect}(w_2)$. Comme $\mathrm{vect}(w_1) \subset V$, on en conclut que f est un élément de V.

    $(e \Rightarrow f)$ Supposons que f est un élément de V. Comme f n'est pas un élément de E, on en déduit que V n'est pas inclus dans E.

    On montre $(f) \Rightarrow (a)$ par la contraposée. En raisonnant de la même façon que pour $(c) \Rightarrow (d)$ (on remplace w_i par v_i et F par E), on en déduit que $V = \mathrm{vect}(v_1, v_2) \subset E$.

18. De l'équivalence entre (a) et (d), on en déduit que

    $$(v_1, v_2) \text{ est libre si et seulement si } (w_1, w_2) \text{ est libre.}$$

    Mais ces familles de V ont le même cardinal que la dimension de V, à savoir 2. Elles sont donc libres si et seulement si ce sont des bases. D'où

    $$\boxed{(v_1, v_2) \text{ est une base de } V \text{ si et seulement si } (w_1, w_2) \text{ est une base de } V.}$$

19. Deux cas peuvent alors se présenter.

— Cas 1 : (v_1, v_2) est une base de V.
Donc (w_1, w_2) est aussi une base de V. Il en résulte alors que $V = \text{vect}(v_1, v_2) \subset E$ et $V = \text{vect}(w_1, w_2) \subset F$. Donc F est inclus dans $E \cap F = V_2$ qui est également de dimension 2. Donc $\boxed{V = V_2}$.

— Cas 2 : (v_1, v_2) est liée.
D'après les différentes équivalences, on en déduit que e et f sont des éléments de V. Donc $V_1 = \text{vect}(e, f) \subset V$. Or V_1 et V ont la même dimension. Donc $\boxed{V = V_1}$.

Problème 2

Ce problème présente une méthode numérique, appelée méthode des trapèzes, permettant de calculer des approximations de la valeur d'une intégrale. Les parties 1 et 2 détaillent cette méthode alors que la partie 3 propose de l'appliquer sur un exemple et de l'implémenter en Python. Seuls les résultats encadrés (qu'on peut admettre si besoin) sont utilisés d'une partie à l'autre.

Partie 1 - Une première approximation

On considère une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$ où $a < b$ sont deux réels fixés. On pose g la fonction affine définie par $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b)$. Le but de cette partie est d'estimer l'erreur commise si on approche $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ par $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ (qui correspond à l'aire d'un trapèze). Pour cela, on pose la fonction :

$$h : x \mapsto f(x) - g(x) - \lambda(x-a)(x-b)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante qui sera fixée à la question 3.

1. (a) *Déterminer une expression de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

▶ La fonction g est affine et vérifie $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b)$ d'après l'énoncé. Son coefficient directeur est donc égal à $(f(b) - f(a))/(b-a)$ et $g(x) = f(a)$ si $x = a$. On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \boxed{g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)}.$$

On peut aussi poser la fonction affine $g : x \mapsto \alpha x + \beta$ et résoudre le système linéaire formé des deux équations $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b)$ d'inconnues $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Mais cette méthode est plus longue.

(b) *En déduire que $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = (b-a)(f(a) + f(b))/2$.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b \left(\frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \right) \mathrm{d}x \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \int_a^b (x-a)\mathrm{d}x + f(a) \int_a^b \mathrm{d}x \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} - ax \right]_a^b + f(a) \Big[x \Big]_a^b \\
&= \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \left(\frac{b^2}{2} - ab - \frac{a^2}{2} + a^2 \right) + f(a) \Big(b-a \Big) \\
&= \frac{f(b) - f(a)}{2(b-a)} \Big(\underbrace{b^2 - 2ab + a^2}_{=(b-a)^2} \Big) + f(a) \Big(b-a \Big) \\
&= \frac{f(b) - f(a)}{2} \Big(b-a \Big) + \frac{2f(a)}{2} \Big(b-a \Big) \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton} \\
&= \Big(f(b) - f(a) + 2f(a) \Big) \frac{b-a}{2} \\
&= \boxed{(b-a)\frac{f(a) + f(b)}{2}}.
\end{aligned}$$

2. *Calculer $\int_a^b (x-a)(x-b)\mathrm{d}x$ et écrire le résultat sous la forme $\mu(b-a)^3$ où $\mu \in \mathbb{R}$ est une constante à déterminer.*

▶ On utilise une intégration par parties en posant les fonctions :

$$\begin{cases} u' : x \mapsto x-a \\ v : x \mapsto x-b \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} u : x \mapsto \frac{(x-a)^2}{2} \\ v' : x \mapsto 1. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme fonctions polynomiales donc on a d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \underbrace{(x-a)(x-b)}_{=u'(x)v(x)} \mathrm{d}x &= \left[\underbrace{\frac{(x-a)^2}{2}(x-b)}_{=u(x)v(x)} \right]_a^b - \int_a^b \underbrace{\frac{(x-a)^2}{2}}_{=u(x)v'(x)} \mathrm{d}x \\
&= 0 - 0 - \frac{1}{2}\left[\frac{(x-a)^3}{3}\right]_a^b \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{(b-a)^3}{3} - 0\right) \\
&= \boxed{-\frac{1}{6}(b-a)^3}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat en posant la constante $\boxed{\mu = -1/6}$.

On peut aussi calculer cette intégrale sans utiliser la formule d'intégration par parties. Par exemple en développant l'expression à intégrer :

$$\int_a^b (x-a)(x-b)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(x^2 - (a+b)x + ab\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - (a+b)\frac{x^2}{2} + abx\right]_a^b = \dots$$

Puis on retrouve la forme demandée à l'aide de la formule du binôme de Newton.

3. *Montrer qu'on peut choisir la constante $\lambda \in \mathbb{R}$ afin que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$ Dans la suite, on fixe la constante λ de cette façon et on suppose donc que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$.*

▶ On cherche une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$. On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse. On a :

$$\begin{aligned}
& \int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \\
\iff & \int_a^b \Big(f(x) - g(x) - \lambda(x-a)(x-b)\Big)\mathrm{d}x = 0 \quad \text{par défintion de la fonction } h \\
\iff & \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \lambda\int_a^b (x-a)(x-b)\mathrm{d}x = 0 \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
\iff & \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{\lambda}{6}(b-a)^3 = 0 \quad \text{d'après les résultats précédents} \\
\iff & \frac{\lambda}{6}(b-a)^3 = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \\
\iff & \lambda = 3\frac{f(a)+f(b)}{(b-a)^2} - \frac{6}{(b-a)^3}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{car } (b-a)^3 \neq 0 \text{ puisque } a < b.
\end{aligned}$$

Synthèse. Puisque la fonction f et les réels $a < b$ sont fixés dans l'énoncé, on peut poser la constante :

$$\boxed{\lambda = 3\frac{f(a)+f(b)}{(b-a)^2} - \frac{6}{(b-a)^3}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}.$$

En reprenant les calculs de l'analyse, on a bien que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$.

On peut aussi rédiger plus rapidement en remarquant que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$ est une équation d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$ de degré 1 par définition de la fonction h et par linéarité de l'intégrale. Elle admet donc une solution qu'il est inutile de calculer pour répondre à la question.

4. *De quelle classe est la fonction h sur $[a,b]$? Justifier que la fonction h admet des primitives sur $[a,b]$. On note H une primitive de h sur $[a,b]$. Que peut-on dire des images $H(a)$ et $H(b)$?*

   ▶ On sait que :
   - f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ d'après l'énoncé,
   - g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a,b]$ comme fonction affine,
   - et $x \mapsto \lambda(x-a)(x-b)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a,b]$ comme fonction polynomiale.

   Par conséquent, $\boxed{h : x \mapsto f(x) - g(x) - \lambda(x-a)(x-b) \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } [a,b]}$ comme somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$. En particulier, elle est continue sur $[a,b]$ donc $\boxed{h \text{ admet des primitives sur } [a,b] \text{ d'après le théorème fondamental de l'analyse}}$. De plus, on a d'après le résultat de la question précédente :

$$0 = \int_a^b h(x)\mathrm{d}x = \Big[H(x)\Big]_a^b = H(b) - H(a) \quad \text{donc} \quad \boxed{H(a) = H(b)}.$$

5. (a) *Déduire du résultat précédent qu'il existe un réel $c_0 \in]a,b[$ tel que $h(c_0) = 0$.*

   ▶ Puisque h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$, on en déduit que sa primitive H est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $[a,b]$. Par conséquent, on a :
   - H est continue sur $[a,b]$,
   - H est dérivable sur $]a,b[$,
   - et $H(a) = H(b)$ d'après le résultat de la question précédente.

   D'après le théorème de Rolle, on en déduit qu'il existe un réel $c_0 \in]a,b[$ tel que $H'(c_0) = 0$ donc tel que $\boxed{h(c_0) = 0}$ car $H' = h$.

   Citez précisément les hypothèses des théorèmes que vous utilisez afin de montrer que vous connaissez votre cours.

   (b) *Prouver qu'il existe deux réels $(c_1, c_2) \in]a,b[^2$ tels que $c_1 < c_2$ et $h'(c_1) = h'(c_2) = 0$.*

   ▶ On a :

$$\begin{aligned} & h(a) = f(a) - g(a) - \lambda(a-a)(a-b) = f(a) - f(a) - 0 = 0 \quad \text{car } g(a) = f(a) \\ \text{et} \quad & h(b) = f(b) - g(b) - \lambda(b-a)(b-b) = f(b) - f(b) - 0 = 0 \quad \text{car } g(b) = f(b). \end{aligned}$$

   Or h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ et $c_0 \in]a,b[$ d'après le résultat de la question précédente. Par conséquent, on a :
   - h est continue sur $[a,c_0]$ et sur $[c_0,b]$,
   - h est dérivable sur $]a,c_0[$ et sur $]c_0,b[$,
   - et $h(a) = h(b) = h(c_0) = 0$ d'après le résultat de la question précédente.

   D'après le théorème de Rolle, on en déduit qu'il existe deux réels $c_1 \in]a,c_0[$ et $c_2 \in]c_0,b[$ tels que $\boxed{h'(c_1) = h'(c_2) = 0}$. De plus, on a $a < c_1 < c_0 < c_2 < b$ donc en particulier $\boxed{(c_1,c_2) \in]a,b[^2}$ et $\boxed{c_1 < c_2}$.

   (c) *Prouver qu'il existe un réel $c \in]c_1,c_2[$ tel que $f''(c) = 2\lambda$.*

   ▶ On sait que h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ et $c_1 < c_2$ appartiennent à $]a,b[$ d'après le résultat de la question précédente. Par conséquent, on a :

— h' est continue sur $[c_1, c_2]$,
— h' est dérivable sur $]c_1, c_2[$,
— et $h'(c_1) = h'(c_2) = 0$ d'après le résultat de la question précédente.

D'après le théorème de Rolle, on en déduit qu'il existe un réel $c \in]c_1, c_2[$ tel que $h''(c) = 0$. Or on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
h(x) &= f(x) - g(x) - \lambda(x-a)(x-b) \\
&= f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right) - \lambda\Big(x^2 - (a+b)x + ab\Big) \\
\text{donc} \quad h'(x) &= f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)} - \lambda\Big(2x - (a+b)\Big) \\
\text{donc} \quad h''(x) &= f''(x) - 2\lambda.
\end{aligned}$$

On a vient de démontrer l'existence d'un réel $c \in]c_1, c_2[$ tel que $f''(c) - 2\lambda = h''(c) = 0$ donc tel que $\boxed{f''(c) = 2\lambda}$.

6. Déduire des résultats précédents que :

$$\boxed{\exists c \in [a,b], \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(c)}.$$

► On sait que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$ d'après le choix de la constante λ fixée à la question 3. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_a^b h(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \Big(f(x) - g(x) - \lambda(x-a)(x-b)\Big)\mathrm{d}x \quad \text{par défintion de la fonction } h \\
&= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \lambda\int_a^b (x-a)(x-b)\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{\lambda}{6}(b-a)^3 \quad \text{d'après les résultats des questions 1(b) et 2.}
\end{aligned}$$

Or $\lambda = f''(c)/2$ d'après le résultat de la question précédente. D'où :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(c)}.$$

De plus, on a $a < c_1 < c < c_2 < b$ donc en particulier $\boxed{c \in [a,b]}$

Partie 2 - La méthode des trapèzes

On considère toujours une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ où $a < b$ sont deux réels fixés. De plus, on pose un entier $n \geqslant 1$. Le principe de la méthode des trapèzes est de subdiviser l'intervalle $[a,b]$ en n sous-intervalles de même longueur sur chacun desquels on va appliquer l'approximation de la partie 1. Plus précisément, on définit $n+1$ réels notés $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ par :

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b \quad \text{et} \quad a_1 - a_0 = a_2 - a_1 = \cdots = a_n - a_{n-1}$$

et on remarque que $[a,b] = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \cdots \cup [a_{n-1}, a_n] = \bigcup_{k=0}^{n-1} [a_k, a_{k+1}]$.

7. (a) *Soit $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$. Déterminer une expression de a_k en fonction de a, b, k et n.*

▶ Puisque l'intervalle $[a,b]$ de longueur $b-a$ est subdivisé en n sous-intervalles de même longueur, la longueur de chacun des sous-intervalles est égale à :

$$a_1 - a_0 = a_2 - a_1 = \cdots = a_n - a_{n-1} = \tfrac{b-a}{n}.$$

Les réels $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ forment donc les $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique de raison $(b-a)/n$ et de premier terme $a_0 = a$. On en déduit que :

$$\boxed{\forall k \in \{0,1,2,\dots,n\}, \quad a_k = a + k\tfrac{b-a}{n}}.$$

(b) *En déduire que :*

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2} = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\tfrac{b-a}{n}\right)\right).$$

▶ On a :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k)\frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b-a}{n}\right) \frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= \frac{b-a}{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(a_{k+1})\right) \quad \text{par linéarité de la somme} \\
&= \frac{b-a}{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) + \sum_{k=1}^{n} f(a_k)\right) \quad \text{à l'aide d'un décalage d'indice dans la deuxième somme} \\
&= \frac{b-a}{2n}\left(f(a_0) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a_k) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a_k) + f(a_n)\right) \quad \text{par associativité de la somme} \\
&= \frac{b-a}{2n}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a_k)\right) \quad \text{car } a_0 = a \text{ et } a_n = b \\
&= \boxed{\frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\tfrac{b-a}{n}\right)\right)} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente.}
\end{aligned}$$

Dans la suite, on note $T_n(f)$ le membre de droite de cette égalité, c'est-à-dire :

$$\boxed{T_n(f) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\tfrac{b-a}{n}\right)\right)}.$$

8. (a) *Justifier que la fonction $x \mapsto |f''(x)|$ admet un maximum sur $[a,b]$. Dans la suite, on note M la valeur de ce maximum.*

▶ On sait que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ d'après l'énoncé. Donc f'' est continue sur $[a,b]$ par définition de la classe $\mathscr{C}^2$. Par conséquent, la fonction $x \mapsto |f''(x)|$ est continue sur le segment $[a,b]$ par composée de fonctions continues. D'après le théorème des bornes, on en déduit qu'elle est bornée et qu'elle atteint ses bornes. En particulier, $\boxed{x \mapsto |f''(x)| \text{ admet un maximum sur } [a,b]}$.

(b) Montrer que :

$$\forall k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}, \quad \left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right| \leqslant \frac{(b-a)^3 M}{12n^3}.$$

▶ Soit $k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$. D'après le résulat de la question 6 de la partie 1, puisque f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur le sous-intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, on sait qu'il existe un réel $c_k \in [a_k, a_{k+1}]$ tel que :

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2} = -\frac{(a_{k+1}-a_k)^3}{12} f''(c_k).$$

Attention : le réel c_k appartient à l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ et donc dépend de l'entier k ! Par conséquent, il est judicieux de le noté c_k et non c puisqu'il sera différent pour chaque valeur de k.

En passant à la valeur absolue, on en déduit que :

$$\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right| = \left|-\frac{(a_{k+1}-a_k)^3}{12} f''(c_k)\right| = \frac{(a_{k+1}-a_k)^3\,|f''(c_k)|}{12}$$

car $a_{k+1} > a_k$. Or :

— $a_{k+1} - a_k = (b-a)/n$ d'après le résultat de la question 7(a),

— et $|f''(c_k)| \leqslant M$ d'après le résultat de la question précédente car $c_k \in [a_k, a_{k+1}] \subset [a,b]$.

On en déduit bien que :

$$\boxed{\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right| \leqslant \frac{(b-a)^3 M}{12n^3}}$$

et ceci est vrai pour tout $k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$.

9. Déduire des résultats précédents que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3 M}{12n^2}}.$$

▶ On a :

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f)\\
&= \int_{a_0}^{a_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\mathrm{d}x - T_n(f) \quad \text{d'après la relation de Chasles}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2} \quad \text{d'après le résultat de la question 7(b)}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right) \quad \text{par linéarité de la somme.}
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient en passant à la valeur absolue :

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f)\right| \\
=&\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right)\right| \\
\leqslant&\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\
\leqslant&\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^3M}{12n^3} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
=&n\frac{(b-a)^3M}{12n^3} = \frac{(b-a)^3M}{12n^2}.
\end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire est la principale justification de ce calcul. Elle doit être citée explicitement.

Finalement, on a bien montré que

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3M}{12n^2}}$$

et ceci est vrai pour tout entier $n \geqslant 1$.

10. *Quelle est la limite de $T_n(f)$ quand n tend vers $+\infty$?*

▶ On a :

$$\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3M}{12n^2}$$

d'après le résultat de la question précédente et la définition de la valeur absolue. Or :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(b-a)^3M}{12n^2} = 0.$$

D'après le théorème de la limite par encadrement, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f)\right| = 0 \quad \text{par conséquent} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} T_n(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x}.$$

Partie 3 - Application numérique

Dans cette partie, on propose d'appliquer la méthode des trapèzes pour approcher la valeur de $\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$. On pose donc la fonction $f : x \mapsto \exp(-x^2)$.

11. (a) *De quelle classe est la fonction f sur $\mathbb{R}$?*

▶ La fonction $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$ comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(b) *Prouver que pour tout entier $k \geqslant 0$, il existe un polynôme $P_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(k)}(x) = P_k(x)e^{-x^2}.$$

▶ On raisonne par récurrence.
Initialisation. Pour $k = 0$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(0)}(x) = f(x) = e^{-x^2} = P_0(x)e^{-x^2} \quad \text{en posant } \boxed{P_0 = 1}.$$

P_0 est bien un polynôme à coefficients réels.
<u>Hérédité</u>. On fixe un entier $k \geqslant 0$ et on suppose qu'il existe un polynôme P_k à coefficients réels tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(k)}(x) = P_k(x)e^{-x^2}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(k+1)}(x) &= (f^{(k)})'(x)\\ &= P_k'(x)e^{-x^2} + P_k(x)\Big(-2xe^{-x^2}\Big)\\ &= \Big(\underbrace{P_k'(x) - 2xP_k(x)}_{=P_{k+1}(x)}\Big)e^{-x^2}\\ &= P_{k+1}(x)e^{-x^2} \quad \text{en posant } \boxed{P_{k+1} = P_k' - 2XP_k}.\end{aligned}$$

P_{k+1} est bien un polynôme à coefficients réels comme somme et produit de polynômes à coefficients réels.

> *N'oubliez pas de justifier que les polynômes que vous posez sont bien des polynômes à coefficients réels.*

<u>Conclusion</u>. D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$$\boxed{\forall k \geqslant 0, \quad \exists P_k \in \mathbb{R}[X], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(k)}(x) = P_k(x)e^{-x^2}}.$$

(c) *Calculer P_0, P_1, P_2 et P_3.*

▶ En reprenant les calculs du raisonnement de la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}&P_0 = \boxed{1},\\ &P_1 = P_0' - 2XP_0 = 0 - 2X = \boxed{-2X},\\ &P_2 = P_1' - 2XP_1 = -2 - 2X(-2X) = \boxed{4X^2 - 2},\\ \text{et} \quad &P_3 = P_2' - 2XP_2 = 8X - 2X(4X^2 - 2) = \boxed{-8X^3 + 12X}.\end{aligned}$$

> *Pensez à utiliser vos calculs précédents pour gagner du temps. Il est beaucoup plus long de dériver trois fois la fonction f et de factoriser chaque dérivée par e^{-x^2}.*

12. *Montrer que le maximum de la fonction $x \mapsto |f''(x)|$ sur $[0,1]$ est égal à $M = 2$.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f'')'(x) &= f^{(3)}(x) \quad \text{par défintion de } f^{(3)}\\ &= P_3(x)e^{-x^2} \quad \text{d'après le résultat de la question 11(b)}\\ &= (-8x^3 + 12x)e^{-x^2} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}\\ &= -8x(x^2 - \tfrac{3}{2})e^{-x^2} = -8x\left(x - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)e^{-x^2}.\end{aligned}$$

Puisque $-\sqrt{\frac{3}{2}} < 0 < 1 < \sqrt{\frac{3}{2}}$, on en déduit le tableau des variations de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		1		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$(f'')'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$			0	$-$	
$f''(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\nearrow$		$\searrow$	

car $f''(0) = P_2(0)e^{-0^2} = -2$ et $f''(1) = P_2(1)e^{-1^2} = (4-2)e^{-1} = 2/e$.

Inutile de perdre du temps à calculer les autres valeurs qui apparaissent dans le tableau de variations, elles ne serviront à rien ensuite puisque l'énoncé considère seulement f'' sur $[0,1]$. On peut même retreindre le tableau des variations au segment $[0,1]$.

Ainsi $f''(x)$ prend toutes les valeurs de -2 à $2/e$ lorsque $x \in [0,1]$. En passant, à la valeur absolue, on en déduit que $|f''(x)|$ prend toutes les valeurs de 0 à 2 lorsque $x \in [0,1]$ car $2/e < 2$ (puisque $e = \exp(1) > \exp(0) = 1$ par stricte croissance de la fonction exponentielle). Par conséquent, le maximum de la fonction $x \mapsto |f''(x)|$ sur $[0,1]$ est égal à $\boxed{M = 2}$.

13. ***Informatique.*** *On écrira les fonctions demandées en Python et on utilisera la fonction* `exp` *de la bibliothèque* `numpy`*.*

(a) *Écrire une fonction* `f(x)` *qui prend en argument un réel x et renvoie la valeur de e^{-x^2}.*

▶ Par exemple :

```
import numpy as np
def f(x):
    return np.exp(-x**2)
```

(b) *Écrire une fonction* `T(n,a,b)` *qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et deux réels $a < b$ puis qui renvoie la valeur de $T_n(f)$.*

▶ Par exemple :

```
def T(n,a,b):
    S=0
    for k in range(1,n):
        S=S+f(a+k*(b-a)/n)
    return ((b-a)/n)*((f(a)+f(b))/2+S)
```

Attention à la fonction `range` *en Python : l'instruction* `range(1,n)` *représente tous les entiers allant de 1 à $n-1$ alors que l'instruction* `range(1,n-1)` *représente tous les entiers allant de 1 à $n-2$.*

(c) *Écrire une fonction* `approx(epsilon)` *qui prend un argument un réel $\varepsilon > 0$ et renvoie une approximation de la valeur de $\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$ à ε près.*

▶ D'après le résultat de la question 9 de la partie 2, on sait que, pour tout $n \geqslant 1$, la valeur de $T(n)(f)$ est une approximation de la valeur de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ à $(b-a)^3M/(12n^2)$ près. Dans l'exemple de cette partie, on a $a = 0$, $b = 1$ et $M = 2$. Il suffit donc de choisir un entier $n \geqslant 1$ tel que :

$$\frac{(b-a)^3M}{12n^2} \leqslant \varepsilon \iff \frac{(1-0)^3 \times 2}{12n^2} \leqslant \varepsilon \iff \frac{1}{6n^2} \leqslant \varepsilon$$

pour que $T_n(f)$ soit une approximation de la valeur de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ à ε près. En Python, on peut par exemple écrire :

```
def approx(epsilon):
    n=1
    while 1/(6*n**2)>epsilon:
        n=n+1
    return T(n,0,1)
```

On peut également résoudre l'inéquation $\frac{1}{6n^2} \leqslant \varepsilon \iff n \geqslant \sqrt{1/(6\varepsilon)}$. *Il suffit donc de choisir pour valeur de* n *l'entier* $\lfloor\sqrt{1/(6\varepsilon)}\rfloor + 1$. *N'oubliez pas la partie entière ! Ce qui donne en Python :*

```
import numpy as np
def approx(epsilon):
    n=int(np.sqrt(1/(6*epsilon)))+1
    return T(n,0,1)
```

DS n$^{\text{o}}$ 8 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

Exercice 1

Pour tout réel $x > 0$, on pose : $I(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{2\mathrm{d}t}{(1+t)^2(1+t^2)}$.

1. Soit $x > 0$.
   (a) En posant $t = \varphi(s)$ où φ est la fonction affine telle que $\varphi(0) = 1/x$ et $\varphi(1) = x$, montrer que :
   $$I(x) = \frac{2x^3(x-1)}{(x+1)} \int_0^1 f_x(s)\mathrm{d}s \quad \text{où} \quad f_x(s) = \frac{1}{(1+(x-1)s)^2(x^2+(1+(x^2-1)s)^2)}.$$
   (b) **[info]** Écrire une fonction `f(x,s)` qui renvoie la valeur de $f_x(s)$.
   (c) **[info]** À l'aide d'une somme de Riemann, écrire une fonction `approxI(x,n)` qui calcule une approximation de la valeur de $I(x)$.

On pose la fonction $g : t \mapsto 2/((1+t)^2(1+t^2))$. Les questions 2, 3 et 4 sont indépendantes.

2. (a) Justifier que g admet des primitives sur $]0, +\infty[$. On note G une primitive de g sur $]0, +\infty[$. De quelle classe est la fonction G sur $]0, +\infty[$? En déduire la classe de la fonction I sur $]0, +\infty[$.
   (b) Calculer la dérivée de la fonction I sur $]0, +\infty[$.
   (c) En déduire une expression simple de $I(x)$ pour tout $x > 0$ (on pourra utiliser la valeur de $I(1)$).
3. (a) Déterminer quatre réels a, b, c et d tels que : $\forall t > 0, \quad g(t) = \dfrac{a}{1+t} + \dfrac{b}{(1+t)^2} + \dfrac{ct+d}{1+t^2}$.
   (b) En déduire une expression simple de $I(x)$ pour tout $x > 0$.
4. (a) À l'aide du changement de variable $u = 1/t$, déterminer une nouvelle expression de I sur $]0, +\infty[$.
   (b) Soit $x > 0$. Calculer $I(x) + I(x)$ puis en déduire une expression simple de $I(x)$.

Exercice 2

On considère l'application $f : (x, y) \mapsto (3x + y, x + 3y)$ et pour tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose :
$$E_\lambda = \left\{ \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\overrightarrow{u}) = \lambda \overrightarrow{u} \right\}.$$

1. Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on rappelle qu'on définit l'application :
   $$P(f) : (x, y) \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k f^{\circ k}(x, y) \quad \text{où} \quad f^{\circ k} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}} \quad (\text{avec } f^{\circ 0} = \mathrm{Id}).$$
   (a) **[info]** Écrire une fonction `composef(k,u)` qui prend en arguments un entier `k` et une liste `u=[`x`,`y`]` puis qui renvoie la liste des composantes de $f^{\circ k}(x, y)$.
   (b) **[info]** Écrire une fonction `polyf(P,u)` qui prend en arguments une liste `P=[`a_0`,`a_1`, ... ,`a_n`]` correspondant aux coefficients d'un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et une liste `u=[`x`,`y`]` puis qui renvoie la liste des composantes de $P(f)(x, y)$.
2. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Justifier que E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
4. Trouver toutes les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ telles que $\dim(E_\lambda) \neq 0$.
5. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{e_4} \in E_4 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ et un vecteur $\overrightarrow{e_2} \in E_2 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ puis justifier que la famille $(\overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_2})$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.
6. Soit $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$. On note $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{(\overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_2})}(\overrightarrow{u})$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_2})$. Calculer $\mathrm{Mat}_{(\overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_2})}(f(\overrightarrow{u}))$ en fonction de a et b.

Exercice 3

On effectue plusieurs tirages avec remise dans une urne contenant $n \geqslant 2$ boules numérotées de 1 à n. Pour chaque entier $i \geqslant 1$, on considère une variable aléatoire X_i égale à 1 si le numéro de la boule tirée au i-ième tirage n'avait jamais été tiré auparavant et égale à 0 sinon. Ainsi, $X_1 = 1$.

1. On rappelle que la commande `random.randint(1,n)`, de la bibliothèque `random`, simule une variable aléatoire de loi uniforme de paramètre `n`.
   (a) **[info]** Écrire une fonction `tirages(n,NbTirages)` qui simule `Nbtirages` tirages dans l'urne et qui renvoie la liste dont le i-ième élément est égal au numéro de la boule tirée au i-ième tirage.
   (b) **[info]** Écrire une fonction `simuleX(n,Nbtirages)` qui simule des tirages dans l'urne et qui renvoie la liste de `Nbtirages` éléments dont le i-ième est égal à X_i.
2. Soit $i \geqslant 1$.
   (a) On note Y_i le numéro de la boule tirée au i-ième tirage. Montrer que :
   $$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \mathrm{P}_{(Y_i=k)}(X_i = 1) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}.$$
   (b) En déduire que :
   $$\mathrm{P}(X_i = 1) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}.$$
   (c) Déterminer la loi de X_i.
3. Pour tout entier $N \geqslant 1$, on pose $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$.
   (a) Déterminer l'espérance de S_N en fonction de n et N.
   (b) Calculer la limite de S_N quand $N \to +\infty$ et discuter la pertinence du résultat.
4. Soient $j > i \geqslant 1$.
   (a) Calculer la probabilité $\mathrm{P}(X_i = 1 \text{ et } X_j = 1)$.
   (b) Déterminer la loi de la variable aléatoire $X_i X_j$.
   (c) En déduire que $\mathrm{E}(X_i X_j) \neq \mathrm{E}(X_i)\mathrm{E}(X_j)$.

Exercice 4

On considère la fonction :
$$f : x \mapsto \frac{x\sqrt{x^4+1}}{x^2+x+1}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et sa classe de régularité sur son ensemble de définition.
2. (a) Étudier le signe des fonctions polynomiales $P_1 : x \mapsto x^6 + 2x^5 + x^4$ et $P_2 : x \mapsto 2x^4 - x^2 + 1$.
   (b) En déduire les variations de f en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 et étudier sa position relative au voisinage de 0.
4. Étudier le comportement asymptotique de f en $+\infty$ et préciser la position relative de la courbe représentative de f par rapport à une éventuelle asymptote au voisinage de $+\infty$. De même en $-\infty$.

Dans la suite de l'exercice, on suppose avoir démontré que $x - 1 \leqslant f(x) \leqslant x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5. Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un ensemble à déterminer. De quelle classe est sa bijection réciproque f^{-1} ?
6. À l'aide des résultats précédents et sans calculs, déterminer la tangente à la courbe représentative de f^{-1} au point d'abscisse 0, les asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$ ainsi que leur position relative. Enfin, montrer que $y \leqslant f^{-1}(y) \leqslant y + 1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
7. (a) **[info]** À l'aide d'un algorithme de dichotomie, écrire une fonction `dichotomie(y,n)` qui calcule une approximation de la solution de l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   (b) **[info]** Écrire une fonction `approxfinverse(y,epsilon)` qui calcule une approximation de la valeur de $f^{-1}(y)$ à `epsilon` > 0 près.

Corrigé du DS n° 8 de mathématiques et d'informatique

Exercice 1

Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$I(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{2\mathrm{d}t}{(1+t)^2(1+t^2)}.$$

1. Soit $x > 0$.

 (a) En posant $t = \varphi(s)$ où φ est la fonction affine telle que $\varphi(0) = 1/x$ et $\varphi(1) = x$, montrer que :

$$I(x) = \frac{2x^3(x-1)}{(x+1)} \int_0^1 f_x(s)\mathrm{d}s \quad \text{où} \quad f_x(s) = \frac{1}{(1+(x-1)s)^2(x^2+(1+(x^2-1)s)^2)}.$$

 ▶ Puisque φ est une fonction affine telle que $\varphi(0) = 1/x$ et $\varphi(1) = x$, φ est de la forme :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \varphi(s) = \left(\frac{x - \frac{1}{x}}{1-0}\right)(s-0) + \frac{1}{x} = \frac{(x^2-1)s+1}{x}.$$

 En particulier, φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. En posant $t = \varphi(s)$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\varphi(s)}{\mathrm{d}s} = \varphi'(s) = \frac{x^2-1}{x} \quad \text{donc} \quad \mathrm{d}t = \left(\frac{x^2-1}{x}\right)\mathrm{d}s.$$

 Ainsi, d'après le théorème de changement de variable dans une intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int_0^1 \frac{2\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\mathrm{d}s}{\left(1+\frac{(x^2-1)s+1}{x}\right)^2\left(1+\left(\frac{(x^2-1)s+1}{x}\right)^2\right)} \\
&= 2\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{\frac{1}{x^2}\left(x+(x^2-1)s+1\right)^2\frac{1}{x^2}\left(x^2+((x^2-1)s+1)^2\right)} \\
&= 2x^4\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{\left(x+1+(x+1)(x-1)s\right)^2\left(x^2+(1+(x^2-1)s)^2\right)} \\
&= 2x^3(x^2-1)\int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{(x+1)^2\left(1+(x-1)s\right)^2\left(x^2+(1+(x^2-1)s)^2\right)} \\
&= \frac{2x^3(x+1)(x-1)}{(x+1)^2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{\left(1+(x-1)s\right)^2\left(x^2+(1+(x^2-1)s)^2\right)} \\
&= \boxed{\frac{2x^3(x-1)}{(x+1)}\int_0^1 f_x(s)\mathrm{d}s}.
\end{aligned}$$

 (b) **[info]** Écrire une fonction `f(x,s)` qui renvoie la valeur de $f_x(s)$.

 ▶ Par exemple :

```
def f(x,s):
    return 1/(((1+(x-1)*s)**2)*(x**2+(1+(x**2-1)*s)**2))
```

(c) **[info]** À l'aide d'une somme de Riemann, écrire une fonction `approxI(x,n)` qui calcule une approximation de la valeur de $I(x)$.

▶ La fonction f_x est continue sur le segment $[0,1]$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions polynomiales. Par conséquent, on a d'après une somme de Riemann :

$$\int_0^1 f_x(s)\mathrm{d}s = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_x(\tfrac{k}{n}).$$

En Python, on peut par exemple écrire :

```
def approxI(x,n):
    S=0
    for k in range(n):
        S=S+f(x,k/n)
    S=S/n
    return (2*(x**3)*(x-1)/(x+1))*S
```

On pose la fonction $g : t \mapsto 2/((1+t)^2(1+t^2))$. Les questions 2, 3 et 4 sont indépendantes.

2. (a) Justifier que g admet des primitives sur $]0,+\infty[$. On note G une primitive de g sur $]0,+\infty[$. De quelle classe est la fonction G sur $]0,+\infty[$? En déduire la classe de la fonction I sur $]0,+\infty[$.

▶ La fonction g est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions polynomiales. D'après le théorème fondamental de l'analyse, on en déduit que $\boxed{g \text{ admet des primitives sur }]0,+\infty[}$. De plus, la fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions polynomiales. Puisque $G' = g$ par définition d'une primitive, on en déduit que $\boxed{G \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]0,+\infty[}$. De plus, on a d'après le théorème fondamental de l'analyse :

$$\forall x>0,\quad I(x) = \int_{1/x}^{x} g(t)\mathrm{d}t = \Big[G(t)\Big]_{1/x}^{x} = G(x) - G(\tfrac{1}{x}).$$

Par conséquent, $\boxed{I \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]0,+\infty[}$ comme somme et composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$.

(b) Calculer la dérivée de la fonction I sur $]0,+\infty[$.

▶ En reprenant l'expression obtenue à la question précédente, on a :

$$\begin{aligned}\forall x>0,\quad I'(x) &= G'(x) - \left(\tfrac{-1}{x^2}\right)G'(\tfrac{1}{x})\\ &= g(x) + \tfrac{1}{x^2} g(\tfrac{1}{x})\\ &= \frac{2}{(1+x)^2(1+x^2)} + \frac{2}{x^2(1+\frac{1}{x})^2(1+(\frac{1}{x})^2)}\\ &= \frac{2}{(1+x)^2(1+x^2)} + \frac{2}{\frac{1}{x^2}(x+1)^2(x^2+1)}\\ &= \frac{2(1+x^2)}{(1+x)^2(1+x^2)}\\ &= \boxed{\frac{2}{(1+x)^2}}.\end{aligned}$$

(c) En déduire une expression simple de $I(x)$ pour tout $x>0$ (on pourra utiliser la valeur de $I(1)$).

▶ On remarque dans le résultat de la question précédente que I' est égale à la dérivée de la fonction $x \mapsto -2/(1+x)$. Puisque I est une primitive de I' sur l'intervalle $]0,+\infty[$, on en déduit que I est de la forme :

$$\forall x>0,\quad I(x) = \frac{-2}{1+x} + C \quad \text{où } C \in \mathbb{R} \text{ est une constante.}$$

En particulier, on a pour $x = 1$:

$$\frac{-2}{2} + C = I(1) = \int_{1/1}^{1} g(t)\mathrm{d}t = 0 \quad \text{donc} \quad C = 1.$$

Finalement, on obtient :

$$\forall x > 0, \quad I(x) = \frac{-2}{1+x} + 1 = \boxed{\frac{x-1}{x+1}}.$$

3. (a) Déterminer quatre réels a, b, c et d tels que :

$$\forall t > 0, \quad g(t) = \frac{a}{1+t} + \frac{b}{(1+t)^2} + \frac{ct+d}{1+t^2}.$$

► Analyse. On cherche $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned}
& g(t) = \frac{a}{1+t} + \frac{b}{(1+t)^2} + \frac{ct+d}{1+t^2} \\
\iff & \frac{2}{(1+t)^2(1+t^2)} = \frac{a(1+t)(1+t^2) + b(1+t^2) + (ct+d)(1+t)^2}{(1+t)^2(1+t^2)} \\
\iff & 2 = a(1+t+t^2+t^3) + b(1+t^2) + (d + (c+2d)t + (2c+d)t^2 + ct^3) \\
\iff & 2 = (a+b+d) + (a+c+2d)t + (a+b+2c+d)t^2 + (a+c)t^3.
\end{aligned}$$

Par identification des coefficients de polynomes, on obtient le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{aligned} a+b+d &= 2 \\ a+c+2d &= 0 \\ a+b+2c+d &= 0 \\ a+c &= 0 \end{aligned}\right. \iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient un système linéaire de rang maximal qui admet pour unique solution :

$$d = 0, \quad c = -1, \quad b = 2 + c + d = 1 \quad \text{et} \quad a = 2 - b - d = 1.$$

Synthèse. On pose $\boxed{a = 1,\ b = 1,\ c = -1 \text{ et } d = 0}$. En reprenant les calculs de l'analyse, on obtient bien que :

$$\forall t > 0, \quad g(t) = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{-t}{1+t^2}.$$

(b) En déduire une expression simple de $I(x)$ pour tout $x > 0$.

► Soit $x > 0$. On a d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int_{1/x}^{x} g(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{1/x}^{x} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{-t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{1/x}^{x} \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t - \int_{1/x}^{x} \frac{-1}{(1+t)^2}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_{1/x}^{x} \frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \Big[\ln|1+t|\Big]_{1/x}^{x} - \left[\frac{1}{1+t}\right]_{1/x}^{x} - \frac{1}{2}\Big[\ln|1+t^2|\Big]_{1/x}^{x} \quad \text{en reconnaissant des primitives usuelles} \\
&= \ln(1+x) - \ln(1+\tfrac{1}{x}) - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln(1+(\tfrac{1}{x})^2) \quad \text{car } x > 0 \\
&= \ln\left(\frac{1+x}{1+\frac{1}{x}}\right) - \frac{1}{1+x} + \frac{x}{x+1} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1+x^2}\right) \\
&= \ln(x) + \frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) \\
&= \boxed{\frac{x-1}{x+1}} \quad \text{car } \ln(\tfrac{1}{x^2}) = \ln(x^{-2}) = -2\ln(x).
\end{aligned}$$

4. (a) À l'aide du changement de variable $u = 1/t$, déterminer une nouvelle expression de I sur $]0, +\infty[$.

► Soit $x > 0$. On pose $u = 1/t \iff t = 1/u = \psi(u)$. On remarque que la fonction $psi : u \mapsto 1/u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ entre $1/x$ et x car $x > 0$. De plus, on a :

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}\psi(u)}{\mathrm{d}u} = \psi'(u) = \frac{-1}{u^2} \quad \text{donc} \quad \mathrm{d}t = \frac{-\mathrm{d}u}{u^2}.$$

Ainsi, d'après le théorème de changement de variable dans une intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int_{1/x}^{x} g(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{x}^{1/x} g(\tfrac{1}{u})\frac{-\mathrm{d}u}{u^2} \\
&= \int_{1/x}^{x} \frac{2}{(1+\frac{1}{u})^2(1+(\frac{1}{u})^2)} \times \frac{\mathrm{d}u}{u^2} \quad \text{en échangeant les bornes de l'intégrale} \\
&= \boxed{\int_{1/x}^{x} \frac{2u^2\mathrm{d}u}{(u+1)^2(u^2+1)}}.
\end{aligned}$$

(b) Soit $x > 0$. Calculer $I(x) + I(x)$ puis en déduire une expression simple de $I(x)$.

▶ On a :

$$\begin{aligned}
2I(x) = I(x) + I(x) &= \underbrace{\int_{1/x}^{x} \frac{2\mathrm{d}t}{(1+t)^2(1+t^2)}}_{\text{définition de } I(x)} + \underbrace{\int_{1/x}^{x} \frac{2t^2\mathrm{d}t}{(1+t)^2(1+t^2)}}_{\text{résultat précédent}} \\
&= \int_{1/x}^{x} \frac{2(1+t^2)\mathrm{d}t}{(1+t)^2(1+t^2)} \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_{1/x}^{x} \frac{2\mathrm{d}t}{(1+t)^2} \\
&= \left[\frac{-2}{1+t}\right]_{1/x}^{x} \quad \text{en reconnaissant une primtive usuelle} \\
&= \frac{-2}{1+x} + \frac{2}{1+\frac{1}{x}} = \frac{-2+2x}{x+1} = 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right).
\end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\boxed{I(x) = \frac{x-1}{x+1}}.$$

Exercice 2

On considère l'application $f : (x, y) \mapsto (3x + y, x + 3y)$ et pour tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose :

$$E_\lambda = \left\{\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2 \mid f\left(\overrightarrow{u}\right) = \lambda\overrightarrow{u}\right\}.$$

1. Pour tout polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on rappelle qu'on définit l'application :

$$P(f) : (x, y) \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k f^{\circ k}(x, y) \quad \text{où} \quad f^{\circ k} = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}} \quad (\text{avec } f^{\circ 0} = \mathrm{Id}).$$

(a) **[info]** Écrire une fonction `composef(k,u)` qui prend en arguments un entier `k` et une liste `u=[`x`,`y`]` puis qui renvoie la liste des composantes de $f^{\circ k}(x, y)$.

▶ Par exemple :

```
def composef(k,u):
    x=u[0]
    y=u[1]
    for i in range(k):
        z=x
        x=3*x+y
        y=z+3*y
    return [x,y]
```

(b) **[info]** Écrire une fonction `polyf(P,u)` qui prend en arguments une liste `P=[`a_0`,`a_1`,`$\ldots$`,`a_n`]` correspondant aux coefficients d'un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et une liste `u=[`x`,`y`]` puis qui renvoie la liste des composantes de $P(f)(x, y)$.

▶ Par exemple :

```
def polyf(P,u):
    x=0
    y=0
    for k in range(len(P)):
        x=x+P[k]*composef(k,u)[0]
        y=y+P[k]*composef(k,u)[1]
    return [x,y]
```

2. Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.

▶ Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{u_1} = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et $\overrightarrow{u_2} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. On a :

$$\begin{aligned} f\Big(\lambda(x_1,y_1)+(x_2,y_2)\Big) &= f\Big(\lambda x_1+x_2, \lambda y_1+y_2\Big) \\ &= \Big(3(\lambda x_1+x_2)+(\lambda y_1+y_2), (\lambda x_1+x_2)+3(\lambda y_1+y_2)\Big) \\ &= \Big(3\lambda x_1+3x_2+\lambda y_1+y_2, \lambda x_1+x_2+3\lambda y_1+3y_2\Big) \\ \text{et} \quad \lambda f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2) &= \lambda\Big(3x_1+y_1, x_1+3y_1\Big)+\Big(3x_2+y_2, x_2+3y_2\Big) \\ &= \Big(\lambda(3x_1+y_1)+(3x_2+y_2), \lambda(x_1+3y_1)+(x_2+3y_2)\Big) \\ &= \Big(3\lambda x_1+\lambda y_1+3x_2+y_2, \lambda x_1+3\lambda y_1+x_2+3y_2\Big). \end{aligned}$$

Ainsi $f(\lambda\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}) = \lambda f(\overrightarrow{u_1})+f(\overrightarrow{u_2})$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{u_1} \in \mathbb{R}^2$ et $\overrightarrow{u_2} \in \mathbb{R}^2$. On en déduit que $\boxed{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ est une application linéaire}}$, donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Justifier que E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

▶ On a $f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$ car f est linéaire d'après le résultat de la question précédente. Donc $\overrightarrow{0} \in E_\lambda$ par définition de E_λ. Soient maintenant $\lambda \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{u_1} \in E_\lambda$ et $\overrightarrow{u_2} \in E_\lambda$. On a :

$$f\Big(\mu\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}\Big) = \mu f\left(\overrightarrow{u_1}\right)+f\left(\overrightarrow{u_2}\right) \quad \text{car } f \text{ est linéaire d'après le résultat de la question précédente.}$$

Or $u_1 \in E_\lambda$ donc $f(\overrightarrow{u_1}) = \overrightarrow{u_1}$ par définition de E_λ. De même, on a $f(\overrightarrow{u_2}) = \overrightarrow{u_2}$ car $u_2 \in E_\lambda$. En reportant dans l'égalité précédente, on obtient :

$$f\Big(\mu\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}\Big) = \mu\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2} \quad \text{donc } \mu\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2} \in E_\lambda \text{ par définition de } E_\lambda.$$

Ainsi $\overrightarrow{0} \in E_\lambda$ et $\mu\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2} \in E_\lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{u_1} \in E_\lambda$ et $\overrightarrow{u_2} \in E_\lambda$. On en déduit que $\boxed{E_\lambda \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^2}$.

On peut aller beaucoup plus vite en remarquant que $E_\lambda = \mathrm{Ker}(f-\lambda\mathrm{Id})$ où $f-\lambda\mathrm{Id}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ comme combinaison linéaire d'endomorphismes.

4. Trouver toutes les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ telles que $\dim(E_\lambda) \neq 0$.

▶ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le sous-espace vectoriel E_λ admet pour représentation cartésienne :

$$\begin{aligned} f\left(\overrightarrow{u}\right) = \lambda\overrightarrow{u} &\iff f(x,y) = \lambda(x,y) \quad \text{en posant } \overrightarrow{u} = (x,y) \\ &\iff (3x+y, x+3y) = (\lambda x, \lambda y) \\ &\iff \begin{cases} 3x+y = \lambda x \\ x+3y = \lambda y \end{cases} \\ &\iff \underbrace{\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice M des coefficients de ce système linéaire admet pour déterminant :

$$\det(M) = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda-2)(\lambda-4).$$

Par conséquent, si $\lambda \neq 2$ et $\lambda \neq 4$ alors la matrice M est inversible, donc de rang maximal, donc le système linéaire homogène admet une unique solution $(x,y) = (0,0) = \overrightarrow{0}$, donc $E_\lambda = \{\overrightarrow{0}\}$, donc $\dim(E_\lambda) = 0$. Par contre, si $\boxed{\lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 4}$ alors M n'est pas inversible, donc de rang non maximal, donc le système linéaire homogène admet une infinité de solutions, donc E_λ contient des vecteurs non nuls, donc $\dim(E_\lambda) \neq 0$.

5. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{e_4} \in E_4 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ et un vecteur $\overrightarrow{e_2} \in E_2 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ puis justifier que la famille $(\overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_2})$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.

► On reprend la représentation cartésienne de E_4 obtenue dans la question précédente :

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{u}) = 4\overrightarrow{u} &\iff \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ &\iff \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On obtient une infinité de solutions qu'on peut exprimer en fonction de l'inconnue auxiliaire y :

$$E_4 = \Big\{(y, y) \mid y \in \mathbb{R}\Big\} = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{e_4})$$

en posant par exemple $\boxed{\overrightarrow{e_4} = (1, 1)}$. De même pour E_2 :

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{u}) = 2\overrightarrow{u} &\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On obtient une infinité de solutions qu'on peut exprimer en fonction de l'inconnue auxiliaire y :

$$E_4 = \Big\{(-y, y) \mid y \in \mathbb{R}\Big\} = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{e_2})$$

en posant par exemple $\boxed{\overrightarrow{e_2} = (-1, 1)}$. Pour savoir si la famille $(\overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_2})$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}^2$, il suffit de calculer son rang. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{rang}(\overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_2}) &= \mathrm{rang}\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{e_4}), \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{e_2})\right) \\ &= \mathrm{rang}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ &= \mathrm{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 \\ 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} \\ &= 2 = \dim(\mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

Ainsi, la famille de deux vecteurs $(\overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_2})$ est libre et génératrice de $\mathbb{R}^2$, donc $\boxed{\text{une base de } \mathbb{R}^2}$.

6. Soit $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$. On note $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{(\overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_2})}(\overrightarrow{u})$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_2})$. Calculer $\mathrm{Mat}_{(\overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_2})}(f(\overrightarrow{u}))$ en fonction de a et b.

► Par définition des coordonnées dans la base $(\overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_2})$, on a : $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{e_4} + b\overrightarrow{e_2}$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{u}) &= f(a\overrightarrow{e_4} + b\overrightarrow{e_2}) \\ &= af(\overrightarrow{e_4}) + bf(\overrightarrow{e_2}) \quad \text{car } f \text{ est linéaire d'après le résultat de la question 2} \\ &= a(4\overrightarrow{e_4}) + b(2\overrightarrow{e_2}) \quad \text{car } \overrightarrow{e_4} \in E_4 \text{ et } \overrightarrow{e_2} \in E_2 \\ &= 4a\overrightarrow{e_4} + 2b\overrightarrow{e_2}. \end{aligned}$$

Par définition des coordonnées dans la base $(\overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_2})$, on en déduit que :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{(\overrightarrow{e_4}, \overrightarrow{e_2})}(f(\overrightarrow{u})) = \begin{pmatrix} 4a \\ 2b \end{pmatrix}}.$$

Exercice 3

On effectue plusieurs tirages avec remise dans une urne contenant $n \geqslant 2$ boules numérotées de 1 à n. Pour chaque entier $i \geqslant 1$, on considère une variable aléatoire X_i égale à 1 si le numéro de la boule tirée au i-ième tirage n'avait jamais été tiré auparavant et égale à 0 sinon. Ainsi, $X_1 = 1$.

1. On rappelle que la commande `random.randint(1,n)`, de la bibliothèque `random`, simule une variable aléatoire de loi uniforme de paramètre `n`.
   (a) **[info]** Écrire une fonction `tirages(n,NbTirages)` qui simule `Nbtirages` tirages dans l'urne et qui renvoie la liste dont le i-ième élément est égal au numéro de la boule tirée au i-ième tirage.
   ▶ Par exemple :

```
import random as rd
def tirages(n,NbTirages):
    Y=[]
    for i in range(NbTirages):
        Y=Y+[rd.randint(1,n)]
    return Y
```

   (b) **[info]** Écrire une fonction `simuleX(n,Nbtirages)` qui simule des tirages dans l'urne et qui renvoie la liste de `Nbtirages` éléments dont le i-ième est égal à X_i.
   ▶ Par exemple :

```
def simuleX(n,NbTirages):
    Y=tirages(n,NbTirages)
    X=[1 for i in range(NbTirages)]
    for i in range(NbTirages):
        for j in range(i):
            if Y[i]==Y[j]:
                X[i]=0
    return X
```

On peut aussi écrire la fonction `simuleX` *sans utiliser la fonction* `tirages`. *Par exemple :*

```
import random as rd
def simuleX(n,NbTirages):
    L=[0 for k in range(n)]
    X=[]
    for i in range(NbTirages):
        Y=rd.randint(1,n)
        if L[Y-1]==0:
            X=X+[1]
        else:
            X=X+[0]
        L[Y-1]=L[Y-1]+1
    return X
```

2. Soit $i \geqslant 1$.
   (a) On note Y_i le numéro de la boule tirée au i-ième tirage. Montrer que :

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad \mathrm{P}_{(Y_i=k)}(X_i = 1) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}.$$

   ▶ Soit $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. On a par définition de la probabilité conditionnelle :

$$\mathrm{P}_{(Y_i=k)}(X_i = 1) = \frac{\mathrm{P}(Y_i = k \text{ et } X_i = 1)}{\mathrm{P}(Y_i = k)}.$$

Or Y_i suit une loi uniforme de paramètre n donc $\mathrm{P}(Y_i = k) = 1/n$. D'autre part, l'événement $X_i = 1$ est l'événement que le numéro tiré au i-ième tirage n'ait jamais été tiré auparavant. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}(Y_i = k \text{ et } X_i = 1)\\
=&\mathrm{P}(Y_1 \neq k \text{ et } Y_2 \neq k \text{ et } \dots \text{ et } Y_{i-1} \neq k \text{ et } Y_i = k)\\
=&\mathrm{P}(Y_1 \neq k)\mathrm{P}(Y_2 \neq k)\dots\mathrm{P}(Y_{i-1} \neq k)\mathrm{P}(Y_i = k) \quad \text{car les tirages sont mutuellement indépendants}\\
=&\underbrace{\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-1}{n}\right)\dots\left(\frac{n-1}{n}\right)}_{i-1 \text{ fois}}\frac{1}{n} \quad \text{car chaque tirage suit une loi uniforme de paramètre } n\\
=&\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}\frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\mathrm{P}_{(Y_i=k)}(X_i = 1) = \frac{\mathrm{P}(Y_i = k \text{ et } X_i = 1)}{\mathrm{P}(Y_i = k)} = \frac{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}\frac{1}{n}}{1/n} = \boxed{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}}.$$

(b) En déduire que :

$$\mathrm{P}(X_i = 1) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}.$$

▶ Puisque l'ensemble des valeurs possibles de Y_i est $Y_i(\Omega) = \{1, 2, \dots, n\}$ (car Y_i suit une loi uniforme de paramètre n), les événements $(Y_i = k)_{k\in\{1,2,\dots,n\}}$ forment un système complet d'événements. Par conséquent, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_i = 1) &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(Y_i = k)\mathrm{P}_{(Y_i=k)}(X_i = 1)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1} \quad \begin{array}{l}\text{car } Y_i \text{ suit une loi uniforme de paramètre } n\\ \text{et d'après le résultat de la question précédente}\end{array}\\
&= n \times \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}\\
&= \boxed{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}}.
\end{aligned}$$

(c) Déterminer la loi de X_i.

▶ L'ensemble des valeurs possibles de X_i est $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$ par définition de X_i. On reconnaît donc une loi de Bernoulli. D'après le résultat de la question précédente, on obtient que $\boxed{X_i \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}}$.

3. Pour tout entier $N \geqslant 1$, on pose $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

(a) Déterminer l'espérance de S_N en fonction de n et N.

▶ On a :

$$\mathrm{E}(S_N) = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{E}(X_i) \quad \text{par linéarité de l'espérance.}$$

Or, pour tout $i \geqslant 1$, X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}$ d'après le résultat de la question précédente. Par conséquent : $\mathrm{E}(X_i) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(S_N) &= \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1} \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{j} && \text{en posant } j = i-1 \text{ (décalage d'indice)} \\
&= \frac{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{N-1+1}}{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)} && \text{en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique} \\
&= \frac{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^{N}}{\frac{1}{n}} \\
&= \boxed{n\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{N}\right)}.
\end{aligned}$$

(b) Calculer la limite de S_N quand $N \to +\infty$ et discuter la pertinence du résultat.

▶ On a $1-\frac{1}{n} \in [0,1[$ car $n \geqslant 1$ donc $\lim_{N\to+\infty}(1-\frac{1}{n})^N = 0$. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \mathrm{E}(S_N) = n}.$$

On remarque que $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ est égale au nombre de numéros tirés au moins une fois après N tirages. Lorsque $N \to +\infty$, il est très probable que les n numéros de l'urne sont tirés au moins une fois chacun, donc que $\boxed{S_N \text{ tend vers } n}$. Le résultat précédent est donc pertinent.

4. Soient $j > i \geqslant 1$.

(a) Calculer la probabilité $\mathrm{P}(X_i = 1 \text{ et } X_j = 1)$.

▶ On modélise l'univers par la liste avec répétitions des j numéros tirés, donc :

$$\mathrm{card}(\Omega) = n^j.$$

Pour calculer $\mathrm{card}(X_i = 1 \text{ et } X_j = 1)$, on compte les possibilités de chaque tirage en les prenant dans l'ordre décroissant :

— pour le j-ième tirage, il y a n numéros possibles,

— puis pour chaque tirage entre le i-ième et le $(j-1)$-ième (ce qui fait $j-1-i+1 = j-i$ tirages), il y a $(n-1)$ numéros possibles car le numéro tiré au j-ième tirage n'a pas été tiré auparavant (car $X_j = 1$),

— puis pour chaque tirage entre le premier et le $(i-1)$-ième (ce qui fait $i-1-1+1 = i-1$ tirages), il y a $(n-2)$ numéros possibles car les numéros tirés aux i-ième et j-ième tirages n'ont pas été tiré auparavant (car $X_i = 1$ et $X_j = 1$).

Ainsi, on a :

$$\mathrm{card}(X_i = 1 \text{ et } X_j = 1) = n(n-1)^{j-i}(n-2)^{i-1}.$$

Finalement, on obtient :

$$\mathrm{P}(X_i = 1 \text{ et } X_j = 1) = \frac{\mathrm{card}(X_i = 1 \text{ et } X_j = 1)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \boxed{\frac{n(n-1)^{j-i}(n-2)^{i-1}}{n^j}}.$$

(b) Déterminer la loi de la variable aléatoire X_iX_j.

▶ L'ensemble des valeurs possibles de X_i et X_j sont $X_i(\Omega) = X_j(\Omega) = \{0, 1\}$ par définition de X_i et X_j. Par conséquent, l'ensemble des valeurs possibles de X_iX_j est aussi $(X_iX_j)(\Omega) = \{0, 1\}$. On reconnaît donc une loi de Bernoulli. D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$\mathrm{P}(X_iX_j = 1) = \mathrm{P}(X_i = 1 \text{ et } X_j = 1) = \frac{n(n-1)^{j-i}(n-2)^{i-1}}{n^j}.$$

Donc $\boxed{X_iX_j \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \frac{n(n-1)^{j-i}(n-2)^{i-1}}{n^j}}$.

(c) En déduire que $\mathrm{E}(X_iX_j) \neq \mathrm{E}(X_i)\mathrm{E}(X_j)$.

▶ D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$\mathrm{E}(X_iX_j) = \frac{n(n-1)^{j-i}(n-2)^{i-1}}{n^j}.$$

D'après le résultat de la question 2(c), on a :

$$\mathrm{E}(X_i)\mathrm{E}(X_j) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{j-1} = \frac{(n-1)^{i+j-2}}{n^{i+j-2}}.$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X_iX_j) - \mathrm{E}(X_i)\mathrm{E}(X_j) &= \frac{n(n-1)^{j-i}(n-2)^{i-1}}{n^j} - \frac{(n-1)^{i+j-2}}{n^{i+j-2}}\\ &= \frac{(n-1)^{j-i}}{n^{i+j-2}}\left(n^{i-1}(n-2)^{i-1} - (n-1)^{2i-2}\right)\\ &= \frac{(n-1)^{j-i}}{n^{i+j-2}}\left(\Big[n(n-2)\Big]^{i-1} - \Big[(n-1)^2\Big]^{i-1}\right)\\ &\neq 0 \quad \text{car } n(n-2) = n^2 - 2n \neq n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2.\end{aligned}$$

On en déduit bien que $\boxed{\mathrm{E}(X_iX_j) \neq \mathrm{E}(X_i)\mathrm{E}(X_j)}$.

En particulier, la covariance de X_i et X_j est non nul :

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathrm{E}(X_iX_j) - \mathrm{E}(X_i)\mathrm{E}(X_j) \neq 0$$

donc X_i et X_j sont corrélées et ne sont pas indépendantes.

Exercice 4

On considère la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{x\sqrt{x^4+1}}{x^2+x+1}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et sa classe de régularité sur son ensemble de définition.

▶ On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x^2 + x + 1 = (x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geqslant \frac{3}{4} > 0,\\ x^4 + 1 \geqslant 1 > 0.\end{cases}$$

Donc la fonction $\boxed{f \text{ est définie et de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$ comme produit, composée et quotient dont le dénominateur ne s'annule pas de fonctions usuelles de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Étudier le signe des fonctions polynomiales $P_1 : x \mapsto x^6 + 2x^5 + x^4$ et $P_2 : x \mapsto 2x^4 - x^2 + 1$.

▶ On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} P_1(x) = x^6 + 2x^5 + x^4 = x^4(x^2 + 2x + 1) = x^4(x+1)^2 \geqslant 0,\\ P_2(x) = 2x^4 - x^2 + 1 = 2((x^2)^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}) - \frac{1}{8} + 1 = 2(x^2 - \frac{1}{4})^2 + \frac{7}{8} > 0.\end{cases}$$

Donc $\boxed{P_1 \text{ et } P_2 \text{ sont positives sur } \mathbb{R}}$.

(b) En déduire les variations de f en précisant les limites aux bornes de son ensemble de définition.

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= \frac{\left(\sqrt{x^4+1} + \frac{x \times 4x^3}{2\sqrt{x^4+1}}\right)(x^2+x+1) - x\sqrt{x^4+1}(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \\
&= \frac{(x^4+1+2x^4)(x^2+x+1) - x(x^4+1)(2x+1)}{\sqrt{x^4+1}(x^2+x+1)^2} \\
&= \frac{(3x^6+3x^5+3x^4+x^2+x+1) - (2x^6+x^5+2x^2+x)}{\sqrt{x^4+1}(x^2+x+1)^2} \\
&= \frac{x^6+2x^5+3x^4-x^2+1}{\sqrt{x^4+1}(x^2+x+1)^2} \\
&= \frac{P_1(x)+P_2(x)}{\sqrt{x^4+1}(x^2+x+1)^2}.
\end{aligned}$$

Or on a montré à la question précédente que $P_1(x) \geqslant 0$ et $P_2(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc que $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$. De plus, on a à l'aide des équivalents usuels :

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x\sqrt{x^4}}{x^2} = x \quad \text{et de même} \quad f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} x.$$

Donc $\boxed{f(x) \text{ tend vers } +\infty \text{ quand } x \to +\infty \text{ et vers } -\infty \text{ quand } x \to -\infty}$.

3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 et étudier sa position relative au voisinage de 0.

▶ On a à l'aide des développements limités usuels :

$$\begin{aligned}
f(x) =& x(1+x^4)^{1/2}\frac{1}{1+(x+x^2)} = x(1+h_1)^{1/2}\frac{1}{1+h_2} \\
&\text{en posant } h_1 = x^4 \text{ et } h_2 = x+x^2 \text{ donc } \lim_{x\to 0} h_1 = \lim_{x\to 0} h_2 = 0 \\
=& x\left(1+\tfrac{1}{2}h_1 - \tfrac{1}{8}h_1^2 + \underset{h_1\to 0}{o}(h_1^2)\right)\left(1-h_2+h_2^2+\underset{h_2\to 0}{o}(h_2^2)\right) \\
=& x\left(1+\tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{1}{8}x^8 + \underset{x\to 0}{o}(x^8)\right)\left(1-(x+x^2)+(x+x^2)^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\
=& x\left(1+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\left(1-x+\underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\
=& x - x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3).
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{y = x}$ est l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 et que $\boxed{\text{cette tangente est au-dessus de la courbe}}$ au voisinage de 0.

4. Étudier le comportement asymptotique de f en $+\infty$ et préciser la position relative de la courbe représentative de f par rapport à une éventuelle asymptote au voisinage de $+\infty$. De même en $-\infty$.

► On a :

$$\begin{aligned}
f(x) =& f(\tfrac{1}{h}) \quad \text{en posant } h = \tfrac{1}{x} \text{ donc } \lim_{x\to+\infty} h = 0\\
=& \frac{\frac{1}{h}\sqrt{(\frac{1}{h})^4+1}}{(\frac{1}{h})^2+\frac{1}{h}+1} = \frac{\sqrt{1+h^4}}{h(1+h+h^2)} = \frac{1}{h}(1+h^4)^{1/2}\frac{1}{1+(h+h^2)}\\
=& \frac{1}{h}\left(1+\tfrac{1}{2}h^4+\underset{h\to0}{o}(h^4)\right)\left(1-(h+h^2)+(h+h^2)^2-(h+h^2)^3+\underset{h\to0}{o}(h^3)\right)\\
& \text{en reprenant les calculs de la question précédente}\\
=& \frac{1}{h}\left(1+\underset{h\to0}{o}(h^3)\right)\left(1-h+2h^3-h^3+\underset{h\to0}{o}(h^3)\right)\\
=& \frac{1}{h}-1+h^2+\underset{h\to0}{o}(h^2) = x-1+\frac{1}{x^2}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).
\end{aligned}$$

On en déduit que la courbe représentative de f admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $\boxed{y = x - 1}$ et que $\boxed{\text{cette asymptote est en-dessous de la courbe}}$ au voisinage de $+\infty$. En reprenant les mêmes calculs en $-\infty$, on obtient exactement les $\boxed{\text{mêmes résultats en } -\infty}$.

Dans la suite de l'exercice, on suppose avoir démontré que $x - 1 \leqslant f(x) \leqslant x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5. Justifier que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un ensemble à déterminer. De quelle classe est sa bijection réciproque f^{-1} ?

► La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ d'après le résultat de la question 1 et strictement croissante sur cet intervalle d'après le résultat de la question 2(b). D'après le théorème de la bijection, on en déduit que $\boxed{f \text{ est bijective}}$ de $\mathbb{R}$ vers l'intervalle :

$$\Big]\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\Big[= \boxed{]-\infty,+\infty[} \quad \text{d'après les résultats de la question 2(b).}$$

D'autre part, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ d'après le résultat de la question 1 et $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$ d'après le résultat de la question 2(b). On en déduit que $\boxed{f^{-1} \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]-\infty,+\infty[}$.

N'oubliez pas de vérifier que la dérivée de f ne s'annule pas pour justifier que sa bijection réciproque est bien dérivable (si la dérivée de f s'annule alors sa bijection réciproque présente des tangentes verticales).

6. À l'aide des résultats précédents et sans calculs, déterminer la tangente à la courbe représentative de f^{-1} au point d'abscisse 0, les asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$ ainsi que leur position relative. Enfin, montrer que $y \leqslant f^{-1}(y) \leqslant y + 1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

► La courbe représentative de f^{-1} est la symétrique de la courbe représentative de f par rapport à la droite d'équation $y = x$. On en déduit donc que :

— $\boxed{y = x}$ est aussi l'équation de la tangente à la courbe représentative de f^{-1} au point d'abscisse 0 et $\boxed{\text{cette tangente est en-dessous de la courbe}}$ au voisinage de 0,

— la courbe représentative de f^{-1} admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $\boxed{y = x + 1}$ (symétrique à la droite d'équation $y = x - 1$) et $\boxed{\text{cette asymptote est au-dessus de la courbe}}$ au voisinage de $+\infty$,

— $\boxed{\text{de même en } -\infty}$.

Soit $y \in \mathbb{R}$. On pose $x = f^{-1}(y)$ donc $f(x) = y$. D'après l'énoncé, on a supposé que :

$$x - 1 \leqslant f(x) \leqslant x \quad \text{donc} \quad f^{-1}(y) - 1 \leqslant y \leqslant f^{-1}(y).$$

On en déduit bien que $\boxed{y \leqslant f^{-1}(y) \leqslant y + 1}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

7. (a) **[info]** À l'aide d'un algorithme de dichotomie, écrire une fonction `dichotomie(y,n)` qui calcule une approximation de la solution de l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

▶ D'après ce qu'on a démontré aux questions précédentes, pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution $x = f^{-1}(y)$ qui appartient à l'intervalle $[y, y+1]$ sur lequel la fonction f est continue et strictement croissante. On définit donc deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ par :

$$(a_0, b_0) = (y, y+1) \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0, \quad (a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} (a_n, \frac{a_n+b_n}{2}) \text{ si } f(\frac{a_n+b_n}{2}) > y \\ (\frac{a_n+b_n}{2}, b_n) \text{ sinon.} \end{cases}$$

D'après la méthode de dichotomie, on sait alors que les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes et convergent vers la solution $f^{-1}(y)$. En Python, on peut par exemple écrire :

```
def dichotomie(y,n):
    a=y
    b=y+1
    for i in range(n):
        c=(a+b)/2
        if c*(c**4+1)**(1/2)/(c**2+c+1)>y:
            b=c
        else:
            a=c
    return a
```

(b) **[info]** Écrire une fonction `approxfinverse(y,epsilon)` qui calcule une approximation de la valeur de $f^{-1}(y)$ à `epsilon` > 0 près.

▶ D'après la méthode de dichotomie, en reprenant les notations de la question précédente, on sait aussi que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad a_n \leqslant f^{-1}(y) \leqslant b_n \quad \text{et} \quad b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{1}{2^n}.$$

Pour obtenir une approximation de $f^{-1}(y)$ à $\varepsilon > 0$ près, il suffit donc de choisir un entier $n \geqslant 0$ tel que $\frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon$. En Python, on peut par exemple écrire :

```
def approxfinverse(y,epsilon):
    n=0
    while 1/(2**n)>epsilon:
        n=n+1
    return dichotomie(y,n)
```