Sujets et corrigés des DS
de mathématiques et d'informatique

BCPST1A lycée Hoche 2022-2023

Sébastien Godillon

Table des matières

DS n$^{\text{o}}$ 1 de mathématiques

durée : 3 heures

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-7}{4-x}$. Déterminer les ensembles suivants :

$$\mathscr{E}_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) \in]2,4]\right\} \quad \text{et} \quad \mathscr{E}_2 = \left\{f(x) \;\middle|\; x \in]5,13[\right\}.$$

Problème 1

Pour toute partie A de $\mathbb{R}$ et tout réel $a \in A$, on dit que a est **un point isolé** de A si la propriété suivante est vérifiée :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad A \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[= \{a\}. \tag{$*$}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que n est un point isolé de $\mathbb{N}$.
2. Existe-t-il un point de $\mathbb{Z}$ qui n'est pas isolé ? Justifier.
3. (a) Écrire la négation de la propriété $(*)$.

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que x n'est pas un point isolé de $\mathbb{R}$.
4. (a) Dans cette question, on fixe un rationnel $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ où $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, un réel $\varepsilon > 0$, et un entier $n \in \mathbb{N}$ supérieur à $2/\varepsilon$. Montrer que :

   $$0 < \left| r - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon \quad \text{où} \quad r = \frac{np+q}{nq} \in \mathbb{Q}.$$

   (b) En déduire qu'aucun point de $\mathbb{Q}$ n'est isolé.
5. (a) Soit $B = [1,2] \cup \{0\}$. Prouver que 0 est le seul point isolé de B.

   (b) Soit $C = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$. Prouver que 0 est le seul point non isolé de C.
6. Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in A$. Démontrer que a est un point isolé de A si et seulement si la propriété suivante est vérifiée :

   $$\exists \varepsilon > 0, \quad A \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon] = \{a\}. \tag{$**$}$$

Exercice 2

Déterminer la partie entière du réel $\alpha = 3\sqrt{5} + \sqrt{10}$ en justifiant votre réponse.

Exercice 3

Résoudre l'inéquation suivante d'inconnue x réelle :

$$\left|2x^2-5x-3\right| \leqslant x^2+3.$$

Problème 2

On munit l'ensemble $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$ d'une nouvelle opération appelée **somme parallèle**, notée $/\!/$, et définie pour tout $a>0$ et tout $b>0$ par :

$$a /\!/ b = \frac{ab}{a+b}.$$

1. Justifier la réponse à chacune des questions suivantes.
   (a) La somme parallèle est-elle commutative ?
   (b) La somme parallèle est-elle associative ?
   (c) La somme parallèle admet-elle un élément neutre ?
2. Montrer que le produit est distributif sur la somme parallèle.

Pour la suite de l'énoncé, on fixe $t \in \mathbb{R}$ et on pose $E_t = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x+y=t\}$.

3. Soient $a>0$ et $b>0$.
   (a) Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + b(t-x)^2$.
   (b) En déduire que :
   $$\inf\left\{ax^2+by^2 \,\middle|\, (x,y) \in E_t\right\} = (a /\!/ b)t^2.$$
   Cette borne inférieure est-elle le plus petit élément ?
4. Soient $a_1>0$, $a_2>0$, $b_1>0$ et $b_2>0$. À l'aide du résultat de la question précédente, montrer que :
   $$(a_1 /\!/ b_1)t^2 + (a_2 /\!/ b_2)t^2 \leqslant \big((a_1+a_2) /\!/ (b_1+b_2)\big)t^2.$$
5. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 2$ et tous réels strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$, on a :
   $$(a_1 /\!/ b_1) + (a_2 /\!/ b_2) + \cdots + (a_n /\!/ b_n) \leqslant (a_1+a_2+\cdots+a_n) /\!/ (b_1+b_2+\cdots+b_n).$$

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 6 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 3\big(2u_{n+1} - 3u_n\big).$$

Montrer qu'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = (an+b)c^n$.

Corrigé du DS n° 1 de mathématiques

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-7}{4-x}$. Déterminer les ensembles suivants :

$$\mathscr{E}_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; f(x) \in]2,4]\right\} \quad \text{et} \quad \mathscr{E}_2 = \left\{f(x) \;\middle|\; x \in]5,13[\right\}.$$

► La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{4\}, \quad f'(x) = \frac{2x(4-x)-(x^2-7)\times(-1)}{(4-x)^2} = \frac{-x^2+8x-7}{(4-x)^2}.$$

On reconnaît au numérateur un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = 8^2 - 4\times(-1)\times(-7) = 36 > 0$. Donc le numérateur s'annule en $(-8+\sqrt{36})/(-2) = 1$ et en $(-8-\sqrt{36})/(-2) = 7$. De plus, il est strictement positif sur $]1,7[$ et strictement négatif sur $]-\infty,1[\cup]7,+\infty[$. Puisque $(4-x)^2 > 0$ pour tout $x \neq 4$, on en déduit le tableau des variations de f.

x	$-\infty$	$-2-3\sqrt{3}$	-5	1	3	$-2+3\sqrt{3}$	4	5	7	13	$+\infty$
$f'(x)$		$-$		0		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	4	2	-2	2	4	$+\infty \;\|\|\; -\infty$	-18	-14	-18	$-\infty$

car :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-\frac{7}{x}}{\frac{4}{x}-1} = +\infty \qquad f(1) = \frac{1^2-7}{4-1} = -2 \qquad \lim_{x\to4^-} f(x) = \lim_{x\to4^-} \frac{x^2-7}{4-x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\frac{7}{x}}{\frac{4}{x}-1} = -\infty \qquad f(7) = \frac{7^2-7}{4-7} = -14 \qquad \lim_{x\to4^+} f(x) = \lim_{x\to4^+} \frac{x^2-7}{4-x} = -\infty$$

On a $f(5) = \dfrac{5^2-7}{4-5} = -18$ et $f(13) = \dfrac{13^2-7}{4-13} = \dfrac{162}{-9} = -18$. On déduit du tableau des variations de f que :

$$\mathscr{E}_2 = \left\{f(x) \mid x \in]5,13[\right\} = \boxed{]-18,-14]}.$$

Soyez précis avec les bornes des intervalles : -18 est exclus car $]5,13[$ est un intervalle ouvert mais -14 est inclus car $7 \in]5,13[$.

Pour déterminer $\mathscr{E}_1$, on résout les deux équations suivantes :

- $f(x) = 2 \iff \dfrac{x^2-7}{4-x} = 2 \iff x^2-7 = 2(4-x) \iff x^2+2x-15 = 0$
  On obtient une équation du second degré de discriminant $\Delta = 2^2 - 4\times1\times(-15) = 64 > 0$ qui admet pour solutions $(-2+\sqrt{64})/2 = 3$ et $(-2-8)/2 = -5$.

- $f(x)=4 \iff \dfrac{x^2-7}{4-x}=4 \iff x^2-7=4(4-x) \iff x^2+4x-23=0$
  On obtient une équation du second degré de discriminant $\Delta = 4^2-4\times 1\times(-23) = 108 > 0$ qui admet pour solutions $(-4+\sqrt{108})/2 = (-4+\sqrt{4\times 9\times 3})/2 = (-4+6\sqrt{3})/2 = -2+3\sqrt{3}$ et $(-4-\sqrt{108})/2 = -2-3\sqrt{3}$.

De plus, $\frac{25}{9} < 3 < 4$ donc $\frac{5}{3} < \sqrt{3} < 2$ (car la fonction racine carrée est strictement croissante), par conséquent $-2+3\sqrt{3} \in]3,4[$ et $-2-3\sqrt{3} \in]-8,-7[$.

Il faut savoir encadrer rapidement des expressions avec des racines afin de les placer correctement dans un tableau des signes ou des variations. Ici, on a besoin de justifier que :

$$-2-3\sqrt{3} < -5 < 1 < 3 < -2+3\sqrt{3} < 4.$$

On déduit du tableau des variations de f que :

$$\mathscr{E}_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in]2,4]\right\} = \boxed{\left[-2-3\sqrt{3}, -5\right[\cup \left]3, -2+3\sqrt{3}\right]}.$$

Problème 1

*Pour toute partie A de $\mathbb{R}$ et tout réel $a \in A$, on dit que a est **un point isolé** de A si la propriété suivante est vérifiée :*

$$\exists \varepsilon > 0, \quad A \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[= \{a\}. \qquad (*)$$

1. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que n est un point isolé de $\mathbb{N}$.*

   ▶ Pour montrer que n est un point isolé de $\mathbb{N}$, il suffit de prouver que la propriété $(*)$ est vérifiée, c'est-à-dire que :
   $$\exists \varepsilon > 0, \quad \mathbb{N} \cap]n-\varepsilon, n+\varepsilon[= \{n\}.$$
   On raisonne par analyse-synthèse.
   Analyse. On cherche un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{N} \cap]n-\varepsilon, n+\varepsilon[= \{n\}$. Si $\varepsilon > 1$, alors les entiers $n-1$ et $n+1$ appartiennent à l'intervalle $]n-\varepsilon, n+\varepsilon[$ et donc $\mathbb{N} \cap]n-\varepsilon, n+\varepsilon[\neq \{n\}$. Par contre, si $\varepsilon < 1$, alors l'intervalle $]n-\varepsilon, n+\varepsilon[$ ne contient pas d'autres entiers que n et donc $\mathbb{N} \cap]n-\varepsilon, n+\varepsilon[= \{n\}$.
   Synthèse. On pose $\boxed{\varepsilon = \frac{1}{2}}$. Alors $\mathbb{N} \cap]n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}[= \{n\}$ car $\frac{1}{2} < 1$. On a bien trouvé un réel $\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{N} \cap]n-\varepsilon, n+\varepsilon[= \{n\}$. Par conséquent, la propriété $(*)$ est vérifiée et donc $\boxed{n \text{ est un point isolé de } \mathbb{N}}$.

2. *Existe-t-il un point de $\mathbb{Z}$ qui n'est pas isolé ? Justifier.*

   ▶ Soit $n \in \mathbb{Z}$. En raisonnant comme à la question précédente, on a $\mathbb{Z} \cap]n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}[= \{n\}$ donc n est un point isolé de $\mathbb{Z}$. Puisque ceci est vrai pour n'importe quel entier $n \in \mathbb{Z}$, on en déduit que tous les points de $\mathbb{Z}$ sont isolés, et donc qu'$\boxed{\text{il n'existe pas de point de } \mathbb{Z} \text{ qui n'est pas isolé}}$.

3. (a) *Écrire la négation de la propriété $(*)$.*

   ▶ On a :
   $$\begin{aligned} &\operatorname{non}\left(\exists \varepsilon > 0, \quad A \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[= \{a\}\right) \\ \iff &\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad A \cap]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\neq \{a\}}. \end{aligned}$$

   (b) *Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que x n'est pas un point isolé de $\mathbb{R}$.*

   ▶ Pour montrer que x n'est pas un point isolé de $\mathbb{R}$, il suffit de prouver que la propriété $(*)$ n'est pas vérifiée, donc que sa négation est vérifiée, c'est-à-dire, d'après le résultat de la question précédente, que :
   $$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{R} \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\neq \{x\}.$$

On commence donc par fixer un réel $\varepsilon > 0$. On a :

$$\mathbb{R} \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[=]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\neq \{x\} \quad \text{car }]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\text{ contient une infinité de réels.}$$

Puisque ceci est vrai pour n'importe quel réel $\varepsilon > 0$, on a bien montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{R} \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\neq \{x\}.$$

Par conséquent, la négation de la propriété $(*)$ est vérifiée et donc $\boxed{x \text{ n'est pas un point isolé de } \mathbb{R}}$.

4. (a) *Dans cette question, on fixe un rationnel $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ où $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, un réel $\varepsilon > 0$, et un entier $n \in \mathbb{N}$ supérieur à $2/\varepsilon$. Montrer que :*

$$0 < \left| r - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon \quad \text{où} \quad r = \frac{np+q}{nq} \in \mathbb{Q}.$$

▶ On a :

$$\left| r - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{np+q}{nq} - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{np+q-np}{nq} \right| = \left| \frac{q}{nq} \right| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \quad \text{car } n \text{ est positif.}$$

Or $n \geqslant 2/\varepsilon > 0$ donc $\dfrac{1}{n} > 0$ et $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{2/\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. On en déduit bien que :

$$\boxed{0 < \left| r - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon}.$$

(b) *En déduire qu'aucun point de $\mathbb{Q}$ n'est isolé.*

▶ Puisque $\left| r - \frac{p}{q} \right| < \varepsilon$ d'après le résultat de la question précédente, on en déduit, d'après les propriétés de la valeur absolue, que $r \in]\frac{p}{q} - \varepsilon, \frac{p}{q} + \varepsilon[$. De plus, $r \in \mathbb{Q}$ et $r \neq \frac{p}{q}$ (car $\left| r - \frac{p}{q} \right| > 0$ d'après le résultat de la question précédente). Par conséquent, l'intervalle $]\frac{p}{q} - \varepsilon, \frac{p}{q} + \varepsilon[$ contient au moins deux rationnels différents : $\frac{p}{q}$ et r. Puisque ceci est vrai pour n'importe quel réel $\varepsilon > 0$, on a montré que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{Q} \cap \left] \tfrac{p}{q} - \varepsilon, \tfrac{p}{q} + \varepsilon \right[\neq \{\tfrac{p}{q}\}.$$

Par conséquent, la négation de la propriété $(*)$ est vérifiée et donc $\frac{p}{q}$ n'est pas un point isolé de $\mathbb{Q}$. Puisque ceci est vrai pour n'importe quel rationnel $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on en déduit que tous les points de $\mathbb{Q}$ ne sont pas isolés, et donc qu'$\boxed{\text{aucun point de } \mathbb{Q} \text{ n'est isolé}}$.

5. (a) *Soit $B = [1,2] \cup \{0\}$. Prouver que 0 est le seul point isolé de B.*

▶ On a $[1,2] \cap]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[= \emptyset$ donc $B \cap]0 - \frac{1}{2}, 0 + \frac{1}{2}[= \{0\}$. Ainsi, on a trouvé un réel $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ tel que $B \cap]0-\varepsilon, 0+\varepsilon[= \{0\}$. On en déduit que $\boxed{0 \text{ est un point isolé de } B}$. Montrons que c'est le seul, c'est-à-dire que les autres points de B ne sont pas isolés. Soit x un autre point de B, donc $x \in [1,2]$. On fixe un réel $\varepsilon > 0$. Alors l'ensemble $[1,2] \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ contient une infinité de réels, donc $B \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\neq \{x\}$. Puisque ceci est vrai pour tout réel $\varepsilon > 0$, on en déduit que x n'est pas un point isolé de B. Puisque ceci est vrai pour tout $x \in [1,2]$, on en déduit finalement que $\boxed{0 \text{ est le seul point isolé de } B}$.

(b) *Soit $C = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$. Prouver que 0 est le seul point non isolé de C.*

▶

Question difficile même si pas différente des précédentes. Mais il faut déjà avoir bien compris les questions précédentes, plus simples, avant de l'aborder.

On fixe un réel $\varepsilon > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ supérieur à $2/\varepsilon$. On a $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{2/\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ donc :

$$\frac{1}{n} \in]0-\varepsilon, 0+\varepsilon[.$$

Autrement dit, $C \cap]0-\varepsilon, 0+\varepsilon[\neq \{0\}$ pour tout $\varepsilon > 0$. On en déduit que $\boxed{\text{0 n'est pas un point isolé de } C}$. Montrons que c'est le seul, c'est-à-dire que les autres points de C sont isolés. Soit $\frac{1}{n}$ un autre point de C, où $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé. On raisonne par analyse-synthèse.
<u>Analyse</u>. On cherche un réel $\varepsilon > 0$ tel que $C \cap]\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon[= \{\frac{1}{n}\}$. Puisque $\frac{1}{n+1}$ est l'élément de C qui précède $\frac{1}{n}$, il faut que ε soit plus petit que la distance entre $\frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire :

$$\varepsilon < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

De même, puis que $\frac{1}{n-1}$ est l'élément de C qui suit $\frac{1}{n}$, il faut que ε soit plus petit que la distance entre $\frac{1}{n-1}$ et $\frac{1}{n}$, c'est-à-dire :

$$\varepsilon < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n-1)}{(n-1)n} = \frac{1}{(n-1)n}.$$

Il suffit donc que :

$$\varepsilon < \min\left(\frac{1}{n(n+1)}, \frac{1}{(n-1)n}\right) = \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{car } n(n+1) > (n-1)n.$$

<u>Synthèse</u>. On pose $\boxed{\varepsilon = \frac{1}{2n(n+1)}}$. D'après les calcul de l'analyse, on a :

$$C \cap \left]\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon\right[= \left\{\frac{1}{n}\right\}.$$

On en déduit que $\frac{1}{n}$ est un point isolé de C. Puisque ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a bien montré que $\boxed{\text{0 est le seul point non isolé de } C}$.

6. *Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in A$. Démontrer que a est un point isolé de A si et seulement si la propriété suivante est vérifiée :*

$$\exists \varepsilon > 0, \quad A \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon] = \{a\}. \tag{$**$}$$

► Pour ne pas confondre la variable muette ε dans la propriété $(*)$ et la variable muette ε dans la propriété $(**)$, on utilise des notations différentes. Montrons que :

$$\begin{aligned} &\exists \varepsilon_1 > 0, \quad A \cap]a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1[= \{a\} \\ \iff &\exists \varepsilon_2 > 0, \quad A \cap [a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2] = \{a\}. \end{aligned}$$

On raisonne par double implication.
<u>1re implication $\Leftarrow$</u>. On suppose qu'il existe un réel $\varepsilon_2 > 0$ tel que $A \cap [a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2] = \{a\}$. On cherche un réel $\varepsilon_1 > 0$ tel que $A \cap]a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1[= \{a\}$. Or :

$$\{a\} \subset A \cap]a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2[\subset A \cap [a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2] = \{a\}.$$

Donc $A \cap]a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2[= \{a\}$. Par conséquent, il suffit de poser $\boxed{\varepsilon_1 = \varepsilon_2}$.
<u>2e implication $\Rightarrow$</u>. On suppose qu'il existe un réel $\varepsilon_1 > 0$ tel que $A \cap]a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1[= \{a\}$. On cherche un réel $\varepsilon_2 > 0$ tel que $A \cap [a-\varepsilon_2, a+\varepsilon_2] = \{a\}$.

Attention : contrairement à la première implication, il ne suffit pas de poser $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$. En effet, si $a-\varepsilon_1 \in A$ ou si $a+\varepsilon_1 \in A$, on a $A \cap]a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1[= \{a\}$ mais $A \cap [a-\varepsilon_1, a+\varepsilon_1] \neq \{a\}$. Il faut donc choisir un ε_2 plus petit.

Or :
$$\{a\} \subset A \cap \left[a - \frac{\varepsilon_1}{2}, a + \frac{\varepsilon_1}{2}\right] \subset A \cap]a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1[= \{a\}.$$
Donc $A \cap [a - \frac{\varepsilon_1}{2}, a + \frac{\varepsilon_1}{2}] = \{a\}$. Par conséquent, il suffit de poser $\boxed{\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{2}}$.

Conclusion. Pour double implication, on a montré que les propriétés $(*)$ et $(**)$ sont équivalentes, et donc que $\boxed{a \text{ est un point isolé de } A \text{ si et seulement si la propriété } (**) \text{ est vérifiée}}$.

Exercice 2

Déterminer la partie entière du réel $\alpha = 3\sqrt{5} + \sqrt{10}$ en justifiant votre réponse.

► Par définition de la partie entière, on cherche l'entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant \alpha < n + 1$. On raisonne par analyse-synthèse.

Trouver les parties entières de $\sqrt{5}$ et $\sqrt{10}$ ne suffit pas. En effet, on a :
$$\left\lfloor \sqrt{5} \right\rfloor \leqslant \sqrt{5} < \left\lfloor \sqrt{5} \right\rfloor + 1 \quad \text{et} \quad \left\lfloor \sqrt{10} \right\rfloor \leqslant \sqrt{10} < \left\lfloor \sqrt{10} \right\rfloor + 1$$
$$\text{donc} \quad \underbrace{3\left\lfloor \sqrt{5} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{10} \right\rfloor}_{=n} \leqslant \underbrace{3\sqrt{5} + \sqrt{10}}_{=\alpha} < \underbrace{3\left\lfloor \sqrt{5} \right\rfloor + 3 + \left\lfloor \sqrt{10} \right\rfloor + 1}_{=n+4 \neq n+1}.$$
Il faut donc chercher des encadrements de la forme :
$$n_1 \leqslant \sqrt{5} < n_1 + \varepsilon_1 \quad \text{et} \quad n_2 \leqslant \sqrt{10} < n_2 + \varepsilon_2$$
tels que $3n_1 + n_2 = n$ et $3n_1 + 3\varepsilon_1 + n_2 + \varepsilon_2 = n + 1$. Puisqu'on veut $3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1$, il suffit par exemple de chercher des encadrements tels que $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{4}$.

Analyse. On cherche un encadrement de $\sqrt{5}$ de la forme :
$$n_1 \leqslant \sqrt{5} < n_1 + \frac{1}{4} \quad \text{donc} \quad 4n_1 \leqslant 4\sqrt{5} < 4n_1 + 1.$$
Puisque la fonction carrée est strictement croissante sur $[0, +\infty[$, on veut que :
$$(4n_1)^2 \leqslant \underbrace{\left(4\sqrt{5}\right)^2}_{=16\times 5=80} < (4n_1 + 1)^2.$$
Or $8^2 = 64 < 80 < 81 = 9^2$. Il suffit donc de prendre $4n_1 = 8$, c'est-à-dire $n_1 = 2$. De même, on cherche un encadrement de $\sqrt{10}$ de la forme :
$$n_2 \leqslant \sqrt{10} < n_2 + \frac{1}{4} \quad \text{donc} \quad 4n_2 \leqslant 4\sqrt{10} < 4n_2 + 1 \quad \text{donc} \quad (4n_2)^2 \leqslant \underbrace{\left(4\sqrt{10}\right)^2}_{=16\times 10=160} < (4n_2 + 1)^2.$$
Or $12^2 = 144 < 160 < 169 = 13^2$. Il suffit donc de prendre $4n_2 = 12$, c'est-à-dire $n_2 = 3$.

Synthèse. Puisque $64 < 80 < 81$, on a d'après la stricte croissance de la fonction racine carrée :
$$8 < 4\sqrt{5} < 9 \quad \text{donc} \quad 2 < \sqrt{5} < \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}.$$
De même, puisque $144 < 160 < 169$, on a :
$$12 < 4\sqrt{10} < 13 \quad \text{donc} \quad 3 < \sqrt{10} < \frac{13}{4} = 3 + \frac{1}{4}.$$

Par conséquent :

$$\underbrace{3\times 2+3}_{=9} < 3\sqrt{5}+\sqrt{10} < \underbrace{3\times\left(2+\frac{1}{4}\right)+\left(3+\frac{1}{4}\right)}_{=9+1=10}.$$

Ainsi, on a montré que $9 \leqslant \alpha < 10$. On en déduit que $\boxed{\lfloor\alpha\rfloor = 9}$.

Exercice 3

Résoudre l'inéquation suivante d'inconnue x réelle :

$$\left|2x^2-5x-3\right| \leqslant x^2+3.$$

► On commence par déterminer le signe de l'expression $2x^2-5x-3$ pour se débarrasser de la valeur absolue. On reconnaît un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = (-5)^2-4\times 2\times(-3) = 49 > 0$. Il admet donc deux racines : $(5+\sqrt{49})/4 = (5+7)/4 = 3$ et $(5-\sqrt{49})/4 = -1/2$. D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-1/2$		3		$+\infty$
$2x^2-5x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On raisonne par disjonction des cas.
<u>1^{er} cas : $x \in]-\infty,-1/2] \cup [3,+\infty[$</u>. Alors :

$$\begin{aligned}\Big|\underbrace{2x^2-5x-3}_{\geqslant 0}\Big| \leqslant x^2+3 &\iff 2x^2-5x-3 \leqslant x^2+3\\ &\iff x^2-5x-6 \leqslant 0.\end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = (-5)^2-4\times(-6) = 49 > 0$. Il admet donc deux racines : $(5+\sqrt{49})/2 = (5+7)/2 = 6$ et $(5-\sqrt{49})/2 = -1$. Puisqu'il est négatif entre ses deux racines, on en déduit que l'ensemble des solutions dans ce cas est :

$$\big(]-\infty,-1/2]\cup[3,+\infty[\big)\cap[-1,6] = \boxed{[-1,-1/2]\cup[3,6]}.$$

<u>2^e cas : $x \in [-1/2,3]$</u>. Alors :

$$\begin{aligned}\Big|\underbrace{2x^2-5x-3}_{\leqslant 0}\Big| \leqslant x^2+3 &\iff -(2x^2-5x-3) \leqslant x^2+3\\ &\iff 0 \leqslant 3x^2-5x\\ &\iff 3x\left(x-\frac{5}{3}\right) \geqslant 0.\end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme du second degré qui admet deux racines : 0 et $5/3$. Puisqu'il est négatif entre ses deux racines, on en déduit que l'ensemble des solutions dans ce cas est :

$$[-1/2,3]\cap\big(]-\infty,0]\cup[5/3,+\infty[\big) = \boxed{[-1/2,0]\cup[5/3,3]}.$$

<u>Conclusion</u>. Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\big([-1,-1/2]\cup[3,6]\big)\cup\big([-1/2,0]\cup[5/3,3]\big) = \boxed{[-1,0]\cup[5/3,6]}.$$

Problème 2

On munit l'ensemble $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ d'une nouvelle opération appelée ***somme parallèle****, notée $/\!/$, et définie pour tout $a > 0$ et tout $b > 0$ par :*

$$a /\!/ b = \frac{ab}{a+b}.$$

1. *Justifier la réponse à chacune des questions suivantes.*

   (a) *La somme parallèle est-elle commutative ?*

   ▶ Soient $a > 0$ et $b > 0$. On a :

   $$a/\!/b = \frac{ab}{a+b} = \frac{ba}{b+a} = b/\!/a \quad \text{par commutativité de la somme et du produit des nombres réels..}$$

   On en déduit que $\boxed{\text{la somme parallèle est commutative}}$.

   (b) *La somme parallèle est-elle associative ?*

   ▶ Soient $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$. On a :

   $$\begin{aligned}(a /\!/ b) /\!/ c &= \left(\frac{ab}{a+b}\right) /\!/ c \\ &= \frac{\left(\frac{ab}{a+b}\right) c}{\left(\frac{ab}{a+b}\right) + c} \\ &= \frac{\frac{abc}{a+b}}{\frac{ab + c(a+b)}{a+b}} \\ &= \frac{abc}{ab+ac+bc}.\end{aligned}$$

   De même, on a :

   $$\begin{aligned}a /\!/ (b /\!/ c) &= a /\!/ \left(\frac{bc}{b+c}\right) \\ &= \frac{a\left(\frac{bc}{b+c}\right)}{a + \left(\frac{bc}{b+c}\right)} \\ &= \frac{\frac{abc}{b+c}}{\frac{a(b+c)+bc}{b+c}} \\ &= \frac{abc}{ab+ac+bc}.\end{aligned}$$

   Par conséquent :

   $$(a /\!/ b) /\!/ c = \frac{abc}{ab+ac+bc} = a /\!/ (b /\!/ c).$$

   On en déduit que $\boxed{\text{la somme parallèle est associative}}$.

   (c) *La somme parallèle admet-elle un élément neutre ?*

▶ Soit $a > 0$. Si $b > 0$ est un élément neutre, alors :

$$\begin{aligned} a /\!\!/ b = a &\iff \frac{ab}{a+b} = a \\ &\iff ab = a(a+b) \\ &\iff ab = a^2 + ab \\ &\iff 0 = a^2 \\ &\iff a = 0 \quad \text{ce qui est absurde car } a > 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\text{la somme parallèle n'admet pas d'élément neutre}}$.

2. *Montrer que le produit est distributif sur la somme parallèle.*

▶ Soient $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$. On a :

$$\begin{aligned} a(b /\!\!/ c) &= a\left(\frac{bc}{b+c}\right) \\ &= \frac{abc}{b+c}. \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} (ab) /\!\!/ (ac) &= \frac{abac}{ab+ac} \\ &= \frac{a(abc)}{a(b+c)} \\ &= \frac{abc}{b+c}. \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$a(b /\!\!/ c) = \frac{abc}{b+c} = (ab) /\!\!/ (ac).$$

On en déduit que $\boxed{\text{le produit est distributif sur la somme parallèle}}$.

Pour la suite de l'énoncé, on fixe $t \in \mathbb{R}$ et on pose $E_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y = t\}$.

3. *Soient $a > 0$ et $b > 0$.*

   (a) *Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + b(t - x)^2$.*

   ▶ On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) &= ax^2 + b(t-x)^2 \\ &= ax^2 + b(t-x)^2 \\ &= ax^2 + b(t^2 - 2tx + x^2) \\ &= (a+b)x^2 - 2btx + bt^2. \end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme du second degré, de coefficient dominant $a + b > 0$. Donc f admet un minimum en

$$x_{\min} = \frac{-(-2bt)}{2(a+b)} = \frac{bt}{a+b}$$

qui vaut :

$$\begin{aligned}
f(x_{\min}) &= f\left(\frac{bt}{a+b}\right) \\
&= (a+b)\left(\frac{bt}{a+b}\right)^2 - 2bt\left(\frac{bt}{a+b}\right) + bt^2 \\
&= \frac{b^2t^2}{a+b} - \frac{2b^2t^2}{a+b} + \frac{bt^2(a+b)}{a+b} \\
&= \frac{b^2t^2 - 2b^2t^2 + abt^2 + b^2t^2}{a+b} \\
&= \frac{abt^2}{a+b} = \left(\frac{ab}{a+b}\right)t^2 = (a /\!/ b)t^2.
\end{aligned}$$

On en déduit le tableau des variations de f.

x	$+\infty$		$\frac{bt}{a+b}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$(a /\!/ b)t^2$	$\nearrow$	$+\infty$

(b) En déduire que :

$$\inf\left\{ax^2+by^2 \,\middle|\, (x,y)\in E_t\right\} = (a /\!/ b)t^2.$$

Cette borne inférieure est-elle le plus petit élément ?

▶ Si $(x,y)\in E_t$, on a $x+y=t$ donc $y=t-x$. Par conséquent :

$$\forall (x,y)\in E_t, \quad ax^2+by^2 = ax^2+b(t-x)^2 = f(x).$$

On en déduit que :

$$\left\{ax^2+by^2 \,\middle|\, (x,y)\in E_t\right\} = \left\{f(x) \,\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\}.$$

Or :

$$\left\{f(x) \,\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\} = \left[(a /\!/ b)t^2, +\infty\right[\quad \text{d'après le résultat de la question précédente.}$$

Par conséquent :

$$\inf\left\{ax^2+by^2 \,\middle|\, (x,y)\in E_t\right\} = \inf\left[(a /\!/ b)t^2, +\infty\right[= \boxed{(a /\!/ b)t^2}.$$

De plus, on a vu à la question précédente que le minimum de f est atteint pour $x_{\min} = \frac{bt}{a+b}$. Donc cette borne inférieure est atteinte pour $(x,y) = (\frac{bt}{a+b}, t - \frac{bt}{a+b}) \in E_t$. On en déduit que $\boxed{\text{cette borne inférieure est le plus petit élément}}$.

4. Soient $a_1>0$, $a_2>0$, $b_1>0$ et $b_2>0$. À l'aide du résultat de la question précédente, montrer que :

$$(a_1 /\!/ b_1)t^2 + (a_2 /\!/ b_2)t^2 \leqslant \big((a_1+a_2) /\!/ (b_1+b_2)\big)t^2.$$

▶

Question difficile mais classique. Il faut bien avoir compris la définition de la borne inférieure (le plus grand des minorants), prendre son temps pour trouver des inégalités les unes après les autres, et raisonner dans le bon ordre.

D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$(a_1 /\!/ b_1)t^2 = \inf\left\{a_1x^2 + b_1y^2 \,\middle|\, (x, y) \in E_t\right\}.$$

Puisque la borne inférieure est le plus grand des minorants, $(a_1 /\!/ b_1)t^2$ est un minorant particulier. Donc :

$$\forall (x, y) \in E_t, \quad (a_1 /\!/ b_1)t^2 \leqslant a_1x^2 + b_1y^2.$$

En raisonnant de même, on a :

$$\forall (x, y) \in E_t, \quad (a_2 /\!/ b_2)t^2 \leqslant a_2x^2 + b_2y^2.$$

En sommant ces deux inégalités, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E_t, \quad (a_1 /\!/ b_1)t^2 + (a_2 /\!/ b_2)t^2 &\leqslant \left(a_1x^2 + b_1y^2\right) + \left(a_2x^2 + b_2y^2\right) \\ &= (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)y^2. \end{aligned}$$

On en déduit que $(a_1 /\!/ b_1)t^2 + (a_2 /\!/ b_2)t^2$ est un minorant de l'ensemble des $(a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)y^2$ pour n'importe quelles valeurs des paramètres $(x, y) \in E_t$. Or le plus grand minorant de cet ensemble est égal, d'après le résultat de la question précédente, à :

$$\inf\left\{(a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)y^2 \,\middle|\, (x, y) \in E_t\right\} = \big((a_1 + a_2) /\!/ (b_1 + b_2)\big)t^2.$$

Puisque ce plus grand minorant est supérieur ou égal au minorant $(a_1 /\!/ b_1)t^2 + (a_2 /\!/ b_2)t^2$, on a bien montré que :

$$\boxed{(a_1 /\!/ b_1)t^2 + (a_2 /\!/ b_2)t^2 \leqslant \big((a_1 + a_2) /\!/ (b_1 + b_2)\big)t^2}.$$

5. *Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 2$ et tous réels strictement positifs $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$, on a :*

$$(a_1 /\!/ b_1) + (a_2 /\!/ b_2) + \cdots + (a_n /\!/ b_n) \leqslant (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) /\!/ (b_1 + b_2 + \cdots + b_n).$$

► Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $P(n)$ l'assertion :

«pour tous réels strictement positifs $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$,
$(a_1 /\!/ b_1) + (a_2 /\!/ b_2) + \cdots + (a_n /\!/ b_n) \leqslant (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) /\!/ (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$».

On raisonne par récurrence.
Initialisation. Pour $n = 2$, on fixe des réels strictement positifs a_1, a_2 et b_1, b_2. Montrons que :

$$(a_1 /\!/ b_1) + (a_2 /\!/ b_2) \leqslant (a_1 + a_2) /\!/ (b_1 + b_2).$$

On sait d'après le résultat de la question précédente que :

$$(a_1 /\!/ b_1)t^2 + (a_2 /\!/ b_2)t^2 \leqslant \big((a_1 + a_2) /\!/ (b_1 + b_2)\big)t^2$$

où t était un réel quelconque fixé. En particulier pour $t = 1$, on en déduit bien que $P(2)$ est vraie.
Hérédité. On fixe un entier $n \geqslant 2$ et on suppose que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n + 1)$ est vraie. On commence par fixer des réels strictement positifs $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}$ et $b_1, b_2, \dots, b_n, b_{n+1}$. Montrons que :

$$(a_1 /\!/ b_1) + (a_2 /\!/ b_2) + \cdots + (a_n /\!/ b_n) + (a_{n+1} /\!/ b_{n+1}) \leqslant (a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}) /\!/ (b_1 + b_2 + \cdots + b_n + b_{n+1}).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on sait déjà que :

$$(a_1 /\!/ b_1) + (a_2 /\!/ b_2) + \cdots + (a_n /\!/ b_n) \leqslant (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) /\!/ (b_1 + b_2 + \cdots + b_n).$$

En additionnant $a_{n+1} /\!\!/ b_{n+1}$ de chaque côté de l'inégalité, on en déduit :

$$\begin{aligned}&(a_1 /\!\!/ b_1) + (a_2 /\!\!/ b_2) + \cdots + (a_n /\!\!/ b_n) + (a_{n+1} /\!\!/ b_{n+1})\\ \leqslant\,& \underbrace{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}_{=a_1'} /\!\!/ \underbrace{(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)}_{=b_1'} + (\underbrace{a_{n+1}}_{=a_2'} /\!\!/ \underbrace{b_{n+1}}_{=b_2'}).\end{aligned}$$

On pose $a_1' = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $b_1' = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, $a_2' = a_{n+1}$ et $b_2' = b_{n+1}$. En raisonnant comme dans l'initialisation, on peut montrer :

$$(a_1' /\!\!/ b_1') + (a_2' /\!\!/ b_2') \leqslant (a_1' + a_2') /\!\!/ (b_1' + b_2').$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}&\underbrace{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)}_{=a_1'} /\!\!/ \underbrace{(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)}_{=b_1'} + (\underbrace{a_{n+1}}_{=a_2'} /\!\!/ \underbrace{b_{n+1}}_{=b_2'})\\ \leqslant\,& \underbrace{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1})}_{=a_1'+a_2'} /\!\!/ \underbrace{(b_1 + b_2 + \cdots + b_n + b_{n+1})}_{b_1'+b_2'}.\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}&(a_1 /\!\!/ b_1) + (a_2 /\!\!/ b_2) + \cdots + (a_n /\!\!/ b_n) + (a_{n+1} /\!\!/ b_{n+1})\\ \leqslant\,&(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) /\!\!/ (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + (a_{n+1} /\!\!/ b_{n+1})\\ \leqslant\,&(a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}) /\!\!/ (b_1 + b_2 + \cdots + b_n + b_{n+1}).\end{aligned}$$

Par transitivité de l'inégalité, on en déduit que $P(n+1)$ est vraie. On a donc bien montré :

$$\forall n \geqslant 2, \quad P(n) \implies P(n+1).$$

Conclusion. D'après le principe de récurrence simple, on en déduit que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 2$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{pour tout entier } n \geqslant 2 \text{ et tous réels strictement positifs } a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ et } b_1, b_2, \ldots, b_n,\\ (a_1 /\!\!/ b_1) + (a_2 /\!\!/ b_2) + \cdots + (a_n /\!\!/ b_n) \leqslant (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) /\!\!/ (b_1 + b_2 + \cdots + b_n).\end{array}}$$

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 6 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 3\big(2u_{n+1} - 3u_n\big).$$

Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = (an + b)c^n$.

▶ On raisonne par analyse-synthèse pour déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

- Analyse. Si $u_n = (an + b)c^n$ pour tout entier $n \geqslant 0$, alors on a en particulier pour $n = 0$:

$$0 = u_0 = (a \times 0 + b)c^0 = b \quad \text{donc} \quad b = 0.$$

De même, on a pour $n = 1$:

$$6 = u_1 = (a \times 1 + b)c^1 = ac \quad \text{donc} \quad a = \frac{6}{c}.$$

De plus, on a pour $n = 2$:

$$u_2 = 3\big(2u_1 - 3u_0\big) = 3(12 - 0) = 36,$$

par conséquent :

$$36 = u_2 = (a \times 2 + b)c^2 = \left(\frac{6}{c} \times 2 + 0\right) c^2 = 12c \quad \text{donc} \quad c = \frac{36}{12} = 3 \quad \text{et} \quad a = \frac{6}{3} = 2.$$

On peut également vérifier ses résultats avec $n = 3$. D'une part :

$$u_3 = 3\big(2u_2 - 3u_1\big) = 3(72 - 18) = 162$$

et d'autre part :

$$(a \times 3 + b)c^3 = (2 \times 3 + 0)3^3 = 6 \times 27 = 162.$$

Par contre, ceci n'est pas une preuve que le résultat est vraie pour toutes les valeurs de l'entier $n \geqslant 0$. Il faut le démontrer dans la synthèse.

- Synthèse. On pose $\boxed{a = 2,\ b = 0 \text{ et } c = 3}$. Montrons par récurrence double que $u_n = 2n \times 3^n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

  — *Initialisation.* On a :

  $$2 \times 0 \times 3^0 = 0 = u_0 \quad \text{et} \quad 2 \times 1 \times 3^1 = 6 = u_1$$

  donc la récurrence double est initialisée.

  — *Hérédité.* On suppose que $u_n = 2n \times 3^n$ et $u_{n+1} = 2(n+1) \times 3^{n+1}$ pour un entier $n \geqslant 0$ fixé. Alors :

  $$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3\big(2u_{n+1} - 3u_n\big) \quad \text{d'après la relation de récurrence de l'énoncé} \\ &= 3\big(2 \times 2(n+1) \times 3^{n+1} - 3 \times 2n \times 3^n\big) \quad \text{d'après les hypothèses de récurrence} \\ &= 3\big(4(n+1) \times 3 - 6n\big) \times 3^n \quad \text{en factorisant par } 3^n \\ &= \big(12n + 12 - 6n\big) \times 3 \times 3^n \\ &= \big(6n + 12\big) \times 3^{n+1} \\ &= \big(2n + 4\big) \times 3 \times 3^{n+1} \quad \text{en factorisant par } 3 \\ &= 2(n+2) \times 3^{n+2} \quad \text{en factorisant par } 2. \end{aligned}$$

  Par conséquent, on a montré que si $u_n = 2n \times 3^n$ et $u_{n+1} = 2(n+1) \times 3^{n+1}$ alors $u_{n+2} = 2(n+2) \times 3^{n+2}$. De plus, cette implication est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

  — *Conclusion.* D'après le principe de récurrence double, on en déduit que

  $$\boxed{\forall n \geqslant 0,\ u_n = 2n \times 3^n}.$$

Finalement, on a bien trouvé $\boxed{(a, b, c) = (2, 0, 3)}$ tel que $u_n = (an + b)c^n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

DS n° 2 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

Exercice 1

Résoudre l'équation suivante d'inconnue x réelle :

$$\left\lfloor 2x+\sqrt{3x-5}\right\rfloor = 4.$$

Exercice 2

On utilisera seulement le langage Python en indiquant soigneusement les indentations utilisées.

1. Écrire une fonction `absolue` qui prend en argument un réel et qui renvoie sa valeur absolue.
2. On considère la fonction ci-dessous.

```
def riddle(x):
    if x>=0:
        n=0
        while n+1<x:
            n=n+1
        return n
    else:
        n=0
        while n-1>x:
            n=n-1
        return n
```

   (a) Que renvoie la commande `riddle(0)` ?
   (b) Que renvoient les commandes `riddle(3.14)` et `riddle(-3.14)` ?
   (c) Que renvoient les commandes `riddle(99.9)` et `riddle(-99.9)` ?
   (d) Que renvoient les commandes `riddle(5)` et `riddle(-5)` ?
   (e) Que renvoient les commandes `riddle(42)` et `riddle(-42)` ?
   (f) Corriger la fonction `riddle` pour écrire une fonction `floor` qui prend en argument un réel et qui renvoie sa partie entière.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=\dfrac{3u_n+4}{u_n^2+1}$ pour tout $n\geqslant 0$. Écrire une fonction `suite` qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie le terme u_n.

Exercice 3

Soit $\theta\in\mathbb{R}$.

1. Simplifier $\dfrac{1}{2}\cos(\theta)-\dfrac{2}{3}\sin(\theta)$.
2. Linéariser $\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)$.
3. Factoriser $\cos(57\theta)-\cos(27\theta)$.

Problème 1

Le but de ce problème est de simplifier l'expression de la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3x-x^3}{2}\right).$$

1. Soit $y \in [-1,1]$. Rappeler la définition de $\arcsin(y)$.
2. On pose la fonction $g : x \mapsto \dfrac{3x-x^3}{2}$.
   (a) Dresser le tableau des variations de g en précisant les images de -2 et $+2$.
   (b) En déduire l'ensemble de définition de f.
3. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.
   (b) Trouver deux constantes réelles $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ telles que : $\forall x \in [-2,2],\ \sin(a\arcsin(bx)) = g(x)$.
4. Dans cette question, on fixe $x \in [-1,1]$.
   (a) À l'aide du cercle trigonométrique, déterminer un encadrement de $3\arcsin(x/2)$.
   (b) Déduire des résultats précédents que $f(x) = \arcsin(x/2)$.
5. Soit $x \in]1,2]$. En vous inspirant de la question précédente, montrer que $f(x) = \dfrac{\pi}{3} - \arcsin(x/2)$.
6. Déterminer une expression similaire pour $f(x)$ lorsque $x \in [-2,-1[$.

Exercice 4

Écrire le nombre complexe suivant sous forme algébrique :

$$\left(\frac{6+\sqrt{6}+i\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)}{4\sqrt{3}+i2\sqrt{6}}\right)^{43}.$$

Problème 2

Le but de ce problème est de résoudre l'équation suivante d'inconnue z complexe :

$$\overline{z} = z^2 - 3z + 7. \tag{E1}$$

1. (a) Montrer que (E1) n'admet pas de solutions réelles.
   (b) (E1) admet-elle des solutions imaginaires pures ?
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que z est solution de (E1) si et seulement si $\overline{z}$ aussi.
3. Soit $z \in \mathbb{C}$ une solution de (E1). Montrer qu'alors z est solution de l'équation suivante :

$$z = z^4 - 6z^3 + 20z^2 - 33z + 35. \tag{E2}$$

4. (a) Vérifier que $z_1 = 2 + i\sqrt{3}$ est solution de de (E2). Qu'en est-il de $z_2 = 2 - i\sqrt{3}$?
   (b) Déterminer une équation du second degré, notée (E3), dont les solutions sont z_1 et z_2.
5. Trouver deux constantes réelles $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad z^4 - 6z^3 + 20z^2 - 34z + 35 = \left(z^2 - 4z + 7\right)\left(z^2 + az + b\right).$$

6. Résoudre (E2).
7. En déduire les solutions de (E1).

Corrigé du DS n° 2 de mathématiques et d'informatique

Exercice 1

Résoudre l'équation suivante d'inconnue x réelle :

$$\left\lfloor 2x + \sqrt{3x-5} \right\rfloor = 4.$$

► Puisque la fonction racine carrée est définie sur $[0, +\infty[$, l'équation est bien définie pour les valeurs de l'inconnue qui vérifient $3x - 5 \geqslant 0 \iff \boxed{x \geqslant \frac{5}{3}}$. D'après la définition de la partie entière, on a :

$$\begin{aligned}(E) : \left\lfloor 2x + \sqrt{3x-5} \right\rfloor = 4 &\iff 4 \leqslant 2x + \sqrt{3x-5} < 5 \\ &\iff \Big(\underbrace{\sqrt{3x-5} \geqslant 4 - 2x}_{1^{\text{re}} \text{ inéquation}} \text{ et } \underbrace{\sqrt{3x-5} < 5 - 2x}_{2^{\text{e}} \text{ inéquation}} \Big).\end{aligned}$$

Attention avant d'élever au carré pour simplifier la racine : il faut d'abord isoler la racine d'un côté de l'inéquation (sinon elle ne se simplifie pas) puis vérifier que l'autre côté de l'inéquation est positif pour pouvoir utiliser la croissance de la fonction carrée sur $[0, +\infty[$.

- 1^{re} inéquation. On a : $4 - 2x \geqslant 0 \iff x \leqslant 2$. On raisonne par disjonction de cas.
  - *1^{er}cas* : $x \in \left[\frac{5}{3}, 2\right]$. Alors :

$$\begin{aligned}\sqrt{3x-5} \geqslant 4 - 2x &\iff 3x - 5 \geqslant (4-2x)^2 \\ &\qquad \text{car la fonction carrée est strictement croissante sur } [0, +\infty[\\ &\iff 3x - 5 \geqslant 16 - 16x + 4x^2 \\ &\iff 4x^2 - 19x + 21 \leqslant 0.\end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = (-19)^2 - 4 \times 4 \times 21 = 25 > 0$

N'hésitez pas à poser vos calculs au brouillon et utiliser les identités remarquables pour gagner du temps :

$$19^2 = (20-1)^2 = 400 - 40 + 1 = 361$$

$$\text{et} \quad 4 \times 4 \times 21 = 16(20+1) = 320 + 16 = 336$$

qui admet pour racines $(19 + \sqrt{25})/8 = 3$ et $(19 - \sqrt{25})/8 = 7/4$. On a le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$\frac{7}{4}$		2		3		$+\infty$
$4x^2 - 19x + 21$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

On en déduit que dans le cas où $x \in \left[\frac{5}{3}, 2\right]$:

$$\sqrt{3x-5} \geqslant 4 - 2x \iff x \in \left[\tfrac{7}{4}, 2\right].$$

— *2e cas* : $x \in]2,+\infty[$. Alors la 1re inéquation est toujours vérifiée car $\sqrt{3x-5} \geqslant 0$ et $4-2x<0$.

— *Conclusion de la 1re inéquation.* On en déduit que :

$$\sqrt{3x-5} \geqslant 4-2x \iff x \in \left[\tfrac{7}{4},2\right] \cup]2,+\infty[= \boxed{\left[\tfrac{7}{4},+\infty\right[}.$$

- <u>2e inéquation</u>. On a : $5-2x \geqslant 0 \iff x \leqslant \frac{5}{2}$. On raisonne par disjonction de cas.

— *1er cas* : $x \in \left[\frac{5}{3},\frac{5}{2}\right]$. Alors :

$$\begin{aligned}\sqrt{3x-5} < 5-2x &\iff 3x-5<(5-2x)^2\\ & \text{car la fonction carrée est strictement croissante sur } [0,+\infty[\\ &\iff 3x-5<25-20x+4x^2\\ &\iff 4x^2-23x+30>0.\end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme du second degré de discriminant $\Delta=(-23)^2-4\times4\times30=49>0$ qui admet pour racines $(23+\sqrt{49})/8=15/4$ et $(23-\sqrt{49})/8=2$. On a le tableau des signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		2		$\frac{5}{2}$		$\frac{15}{4}$		$+\infty$
$4x^2-23x+30$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

On en déduit que dans le cas où $x \in \left[\frac{5}{3},\frac{5}{2}\right]$:

$$\sqrt{3x-5}<5-2x \iff x \in \left[\tfrac{5}{3},2\right[.$$

— *2e cas* : $x \in \left]\frac{5}{2},+\infty\right[$. Alors la 2e inéquation n'est jamais vérifiée car $\sqrt{3x-5} \geqslant 0$ et $5-2x<0$.

— *Conclusion de la 2e inéquation.* On en déduit que :

$$\sqrt{3x-5}<5-2x \iff x \in \left[\tfrac{5}{3},2\right[\cup \emptyset = \boxed{\left[\tfrac{5}{3},2\right[}.$$

- <u>Conclusion.</u> Finalement, l'ensemble des solutions de (E_3) est :

$$\left[\tfrac{7}{4},+\infty\right[\cap \left[\tfrac{5}{3},2\right[= \boxed{\left[\tfrac{7}{4},2\right[}.$$

Exercice 2

On utilisera seulement le langage Python en indiquant soigneusement les indentations utilisées.

1. *Écrire une fonction* `absolue` *qui prend en argument un réel et qui renvoie sa valeur absolue.*

   ► Par exemple :

```
def absolue(x):
    if x>=0:
        return x
    else:
        return -x
```

2. *On considère la fonction ci-dessous.*

```python
def riddle(x):
    if x>=0:
        n=0
        while n+1<x:
            n=n+1
        return n
    else:
        n=0
        while n-1>x:
            n=n-1
        return n
```

(a) *Que renvoie la commande* `riddle(0)` *?*

▶ Si `x=0` alors le test `if` est vérifié (car `x>=0`) mais pas la condition `while` (car `n=0` donc `n+1=1` est supérieur à `x=0`). Ainsi, la valeur de `n` n'est pas changée et $\boxed{\texttt{riddle(0)} \text{ renvoie } \texttt{0}}$.

(b) *Que renvoient les commandes* `riddle(3.14)` *et* `riddle(-3.14)` *?*

▶ Si `x=3.14` alors on obtient en appliquant pas à pas la fonction `riddle` :

- `x` est positif donc le test `if` est vérifié, on continue sans lire ce qui se trouve après `else`,
- `n` prend la valeur `0`,
- `n+1=1` est strictement inférieur à `x` donc la condition `while` est vérifiée, on continue,
- `n` prend la valeur `n+1=1`,
- `n+1=2` est strictement inférieur à `x` donc la condition `while` est vérifiée, on continue,
- `n` prend la valeur `n+1=2`,
- `n+1=3` est strictement inférieur à `x` donc la condition `while` est vérifiée, on continue,
- `n` prend la valeur `n+1=3`,
- `n+1=4` est supérieur à `x` donc la condition `while` n'est pas vérifiée, on sort de la boucle,
- on renvoie `n=3`.

Donc $\boxed{\texttt{riddle(3.14)} \text{ renvoie } \texttt{3}}$. De même, on obtient si `x=-3.14` :

- `x` est strictement négatif donc le test `if` n'est pas vérifié, on va directement à ce qui se trouve après `else` sans lire ce qui se trouve avant,
- `n` prend la valeur `0`,
- `n-1=-1` est strictement supérieur à `x` donc la condition `while` est vérifiée, on continue,
- `n` prend la valeur `n-1=-1`,
- `n-1=-2` est strictement supérieur à `x` donc la condition `while` est vérifiée, on continue,
- `n` prend la valeur `n-1=-2`,
- `n-1=-3` est strictement supérieur à `x` donc la condition `while` est vérifiée, on continue,
- `n` prend la valeur `n-1=-3`,
- `n-1=-4` est inférieur à `x` donc la condition `while` n'est pas vérifiée, on sort de la boucle,
- on renvoie `n=-3`.

Donc $\boxed{\texttt{riddle(-3.14)} \text{ renvoie } \texttt{-3}}$.

(c) *Que renvoient les commandes* `riddle(99.9)` *et* `riddle(-99.9)` *?*

▶ En généralisant le fonctionnement de la fonction `riddle` détaillé à la question précédente, on obtient que $\boxed{\texttt{riddle(99.9)} \text{ renvoie } \texttt{99}}$ et que $\boxed{\texttt{riddle(-99.9)} \text{ renvoie } \texttt{-99}}$.

On reconnaît la partie entière lorsque `x` *est positif car* $\lfloor 3{,}14 \rfloor = 3$ *et* $\lfloor 99{,}9 \rfloor = 99$. *Par contre,* $\lfloor -3{,}14 \rfloor = -4 \neq -3$ *et* $\lfloor -99{,}9 \rfloor = -100 \neq -99$ *donc on reconnaît* $\lfloor \texttt{x} \rfloor + 1$ *lorsque* `x` *est strictement négatif.*

(d) *Que renvoient les commandes* `riddle(5)` *et* `riddle(-5)` *?*

▶ Si `x=5` alors, en reprenant le fonctionnement de la fonction `riddle` détaillé à la question 2(b), la condition `while` ne sera pas vérifiée lorsque `n=4` car `n+1=5` est égal à `x`. Donc $\boxed{\texttt{riddle(5)}\text{ renvoie }\texttt{4}}$. De même, si `x=-5`, la condition `while` ne sera pas vérifiée lorsque `n=-4` car `n-1=-5` est égal à `x`. Donc $\boxed{\texttt{riddle(-5)}\text{ renvoie }\texttt{-4}}$.

(e) *Que renvoient les commandes* `riddle(42)` *et* `riddle(-42)` *?*

▶ En généralisant le fonctionnement de la fonction `riddle` détaillé à la question 2(b), on obtient que $\boxed{\texttt{riddle(42)}\text{ renvoie }\texttt{41}}$ et que $\boxed{\texttt{riddle(-42)}\text{ renvoie }\texttt{-41}}$.

On reconnaît toujours $\lfloor \mathtt{x} \rfloor + 1$ lorsque `x` est strictement négatif. Par contre, on reconnaît $\lfloor \mathtt{x} \rfloor - 1$ lorsque `x` est un entier strictement positif (et $\lfloor \mathtt{x} \rfloor$ lorsque `x` est un réel strictement positif qui n'est pas entier).

(f) *Corriger la fonction* `riddle` *pour écrire une fonction* `floor` *qui prend en argument un réel et qui renvoie sa partie entière.*

▶ Par exemple :

```
def floor(x):
    if x>=0:
        n=0
        while n+1<=x:
            n=n+1
        return n
    else:
        n=0
        while n>x:
            n=n-1
        return n
```

Pour trouver cette fonction, il faut bien comprendre les erreurs observées aux questions précédentes ($\lfloor \mathtt{x} \rfloor + 1$ au lieu de $\lfloor \mathtt{x} \rfloor$ lorsque `x` est strictement négatif et $\lfloor \mathtt{x} \rfloor - 1$ au lieu de $\lfloor \mathtt{x} \rfloor$ lorsque `x` est un réel strictement positif qui n'est pas entier) puis de trouver ce qu'il faut changer dans la fonction `riddle` (la condition `n>x` au lieu de `n-1>x` lorsque `x` est strictement négatif et la condition `n+1<=x` au lieu de `n+1<x` lorsque `x` est positif). N'hésitez pas à faire des essais de modification de la fonction `riddle` puis à vérifier vos essais avec des exemples comme aux questions précédentes. On peut également retrouver les modifications à effectuer à l'aide de la définition de la partie entière $\mathtt{n} = \lfloor \mathtt{x} \rfloor$:

$$\lfloor \mathtt{x} \rfloor \leqslant \mathtt{x} < \lfloor \mathtt{x} \rfloor + 1.$$

Ainsi, lorsque `x` est positif, on continue la boucle `while` tant que $\mathtt{x} < \mathtt{n} + 1$ n'est pas vérifiée, c'est-à-dire tant que `n+1<=x`. De même, lorsque `x` est strictement négatif, on continue la boucle `while` tant que $\mathtt{n} \leqslant \mathtt{x}$ n'est pas vérifiée, c'est-à-dire tant que `n>x`.

3. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 4}{u_n^2 + 1}$ pour tout $n \geqslant 0$. Écrire une fonction* `suite` *qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie le terme u_n.*

▶ Par exemple :

```
def suite(n):
    u=1
    for i in range(n):
        u=(3*u+4)/(u**2+1)
    return u
```

Exercice 3

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

1. *Simplifier* $\dfrac{1}{2}\cos(\theta) - \dfrac{2}{3}\sin(\theta)$.

▶ On cherche deux réels r et φ tels que :

$$\frac{1}{2}\cos(\theta) - \frac{2}{3}\sin(\theta) = r\cos(\theta+\varphi).$$

D'après la formule d'addition du cosinus, on a :

$$r\cos(\theta+\varphi) = r\Big(\cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi)\Big) = \underbrace{r\cos(\varphi)}_{=1/2}\cos(\theta) - \underbrace{r\sin(\varphi)}_{=2/3}\sin(\theta).$$

Ainsi, on veut que $r\cos(\varphi) = 1/2$ et que $r\sin(\varphi) = 2/3$. Or :

$$\big(r\cos(\varphi)\big)^2 + \big(r\sin(\varphi)\big)^2 = r^2\big(\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)\big) = r^2 \quad \text{d'après le théorème de Pythagore.}$$

On en déduit que :

$$r^2 = \big(r\cos(\varphi)\big)^2 + \big(r\sin(\varphi)\big)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{4}{9} = \frac{25}{36}.$$

Il suffit par exemple de choisir :

$$r = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}.$$

Par conséquent, on veut que :

$$\frac{5}{6}\cos(\varphi) = \frac{1}{2} \iff \cos(\varphi) = \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad \frac{5}{6}\sin(\varphi) = \frac{2}{3} \iff \sin(\varphi) = \frac{4}{5}.$$

D'après le cercle trigonométrique, on a :

$$\cos(\varphi) = \frac{3}{5} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \left(\varphi = \arccos\left(\tfrac{3}{5}\right) + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \varphi = -\arccos\left(\tfrac{3}{5}\right) + 2k\pi\right)$$

$$\text{et} \quad \sin(\varphi) = \frac{4}{5} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \left(\varphi = \arcsin\left(\tfrac{4}{5}\right) + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \varphi = \pi - \arcsin\left(\tfrac{4}{5}\right) + 2k\pi\right).$$

De plus, les valeurs $-\arccos\left(\frac{3}{5}\right) + 2k\pi$ ne conviennent pas car $\sin(\varphi) = \frac{4}{5} > 0$, et les valeurs $\pi - \arcsin\left(\frac{4}{5}\right) + 2k\pi$ ne conviennent pas car $\cos(\varphi) = \frac{3}{5} > 0$. On en déduit que :

$$\exists k \in \mathbb{Z},\ \varphi = \arccos\left(\tfrac{3}{5}\right) + 2k\pi = \arcsin\left(\tfrac{4}{5}\right) + 2k\pi.$$

Aidez vous d'un schéma du cercle trigonométrique pour ces raisonnements de résolution d'équations trigonométriques.

Il suffit par exemple de choisir $k = 0$ et donc $\varphi = \arccos\left(\frac{3}{5}\right) = \arcsin\left(\frac{4}{5}\right)$. Finalement, on obtient que :

$$\boxed{\frac{1}{2}\cos(\theta) - \frac{2}{3}\sin(\theta) = \frac{5}{6}\cos\left(\theta + \arccos\left(\tfrac{3}{5}\right)\right)}.$$

2. *Linéariser* $\cos^3(\theta)\sin^2(\theta)$.

▶ On utilise les formules d'Euler :

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}.$$

Donc :

$$\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 = \frac{-1}{32}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^3\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^2 \quad \text{car } i^2=-1.$$

De plus, on a pour tous nombres complexes a et b :

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \quad \text{car les propriétés de calculs dans } \mathbb{C} \text{ sont les mêmes que ceux dans } \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}\text{et} \quad (a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) = (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.\end{aligned}$$

Nous apprendrons bientôt à calculer beaucoup plus rapidement $(a+b)^n$ pour toute puissance entière $n \geqslant 2$.

En remplaçant a par $e^{i\theta}$ et b par $e^{-i\theta}$ ou par $-e^{-i\theta}$, on obtient :

$$\begin{aligned}\cos^3(\theta)\sin^2(\theta) &= \frac{-1}{32}\left(e^{i3\theta}+3e^{i\theta}+3e^{-i\theta}+e^{-i3\theta}\right)\left(e^{i2\theta}-2+e^{-i2\theta}\right)\\
&= \frac{-1}{32}\left(e^{i5\theta}-2e^{i3\theta}+e^{i\theta}+3e^{i3\theta}-6e^{i\theta}+3e^{-i\theta}\right.\\
&\qquad\qquad \left.+3e^{i\theta}-6e^{-i\theta}+3e^{-i3\theta}+e^{-i\theta}-2e^{-i3\theta}+e^{-i5\theta}\right)\\
&= \frac{-1}{32}\Big(\underbrace{e^{i5\theta}+e^{-i5\theta}}_{=2\cos(5\theta)}+\underbrace{e^{i3\theta}+e^{-i3\theta}}_{=2\cos(3\theta)}-2\underbrace{\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)}_{=2\cos(\theta)}\Big)\\
&= \frac{-1}{32}\big(2\cos(5\theta)+2\cos(3\theta)-4\cos(\theta)\big) \quad \text{d'après les formules d'Euler}\\
&= \boxed{\frac{-1}{16}\cos(5\theta)-\frac{1}{16}\cos(3\theta)+\frac{1}{8}\cos(\theta)}.\end{aligned}$$

3. *Factoriser $\cos(57\theta)-\cos(27\theta)$.*

▶ On a :

$$\cos(57\theta)-\cos(27\theta) = \mathrm{Re}\big(e^{i57\theta}-e^{i27\theta}\big) \quad \text{car } e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta).$$

De plus, on a en utilisant une factorisation par l'angle moitié :

$$\begin{aligned}e^{i57\theta}-e^{i27\theta} &= e^{i42\theta}\big(e^{i15\theta}-e^{-i15\theta}\big) \quad \text{car } \frac{57+27}{2}=42,\ 57-42=15 \text{ et } 27-42=-15\\
&= e^{i42\theta}2i\sin(15\theta) \quad \text{d'après les formules d'Euler}\\
&= \big(\cos(42\theta)+i\sin(42\theta)\big)2i\sin(15\theta)\\
&= 2i\cos(42\theta)\sin(15\theta)-2\sin(42\theta)\sin(15\theta) \quad \text{car } i^2=-1\\
&= \underbrace{-2\sin(15\theta)\sin(42\theta)}_{\text{partie réelle}}+i\underbrace{2\sin(15\theta)\cos(42\theta)}_{\text{partie imaginaire}}.\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\cos(57\theta)-\cos(27\theta) = \boxed{-2\sin(15\theta)\sin(42\theta)}.$$

Problème 1

Le but de ce problème est de simplifier l'expression de la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3x-x^3}{2}\right).$$

1. *Soit $y \in [-1,1]$. Rappeler la définition de $\arcsin(y)$.*

   ▶ $\boxed{\theta = \arcsin(y) \text{ est l'unique solution appartenant à } [-\pi/2, \pi/2] \text{ de l'équation } \sin(\theta) = y}$.

2. *On pose la fonction $g : x \mapsto \dfrac{3x - x^3}{2}$.*

   (a) *Dresser le tableau des variations de g en précisant les images de -2 et $+2$.*

   ▶ $g : x \mapsto \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^3$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale (de degré 3). On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x^2 = \frac{3}{2}(1 - x^2) = \frac{3}{2}(1-x)(1+x).$$

   On en déduit le tableau des variations de g :

x	$-\infty$	-2		-1		1		2	$+\infty$
$1-x$			$+$		$+$	0	$-$		
$1+x$			$-$	0	$+$		$+$		
$g'(x)$			$-$	0	$+$	0	$-$		
$g(x)$	$+\infty$ ↘	1	↘	-1	↗	1	↘	-1	↘ $-\infty$

   car $g(-2) = \frac{3\times(-2)-(-8)}{2} = 1$, $g(-1) = \frac{-3+1}{2} = -1$, $g(1) = \frac{3-1}{2} = 1$ et $g(2) = \frac{3\times 2 - 8}{2} = -1$.

   On peut aussi remarquer que g est une fonction impaire car :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(-x) = \frac{3(-x) - (-x^3)}{2} = \frac{-3x + x^3}{2} = -\frac{3x - x^3}{2} = -g(x).$$

   On en déduit que la courbe représentative de g est symétrique par rapport à l'origine (en particulier $g(0) = 0$) et qu'il suffit donc d'étudier les variations de g sur $[0, +\infty[$ (puis de compléter sur $]-\infty, 0[$ par symétrie)

   .

   (b) *En déduire l'ensemble de définition de f.*

   ▶ Puisque la fonction arcsinus est définie sur $[-1,1]$, $f(x) = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3x-x^3}{2}\right)$ est défini si et seulement si $g(x) = \frac{3x-x^3}{2}$ appartient à $[-1,1]$. Par conséquent, l'ensemble de définition de f est égal à :

$$\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in [-1,1]\} = \boxed{[-2,2]} \quad \text{d'après le tableau des variations de la question précédente.}$$

3. (a) *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$.*

   ▶ On sait que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ d'après le calcul effectué dans la question 2 de l'exercice 2. Donc :

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) &= \big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)^3 \quad \text{d'après la formule de Moivre} \\
&= \cos^3(\theta) + 3\cos^2(\theta) i \sin(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) - i\sin^3(\theta) \\
&= \underbrace{\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta)}_{\text{partie réelle}} + i\,\underbrace{3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta)}_{\text{partie imaginaire}}.
\end{aligned}$$

   On en déduit que $\sin(3\theta) = 3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta)$.

On peut aussi retrouver ce résultat avec les formules d'addition de cosinus et sinus mais c'est plus long. Ce n'est pas fini : l'énoncé demande seulement des $\sin(\theta)$, il faut donc se débarrasser du $\cos^2(\theta)$.

On sait que $\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$ d'après le théorème de Pythagore, donc :

$$\sin(3\theta)=3\big(1-\sin^2(\theta)\big)\sin(\theta)-\sin^3(\theta)=\boxed{3\sin(\theta)-4\sin^3(\theta)}.$$

(b) *Trouver deux constantes réelles $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ telles que : $\forall x\in[-2,2],\ \sin(a\arcsin(bx))=g(x)$.*

▶ On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse. On cherche a et b telles que pour tout $x\in[-2,2]$:

$$\sin(a\arcsin(bx))=g(x)=\frac{3x-x^3}{2}=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}x^3.$$

Essayons avec $a=3$ pour pouvoir utiliser le résultat de la question précédente :

Pensez à utiliser les questions précédentes. Il y a toujours une logique dans l'ordre de progression des questions d'un problème.

$$\begin{aligned}\sin(3\arcsin(bx))&=3\sin(\arcsin(bx))-4\sin^3(\arcsin(bx))\\&=3bx-4(bx)^3\quad\text{car }\sin(\arcsin(bx))=bx\text{ par définition de }\arcsin(bx)\\&=\underbrace{3b}_{=3/2}x-\underbrace{4b^3}_{=1/2}x^3.\end{aligned}$$

Il suffit donc que $3b=3/2$ et $4b^3=1/2$. Or :

$$3b=\frac{3}{2}\iff b=\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad 4b^3=\frac{1}{2}\iff b^3=\frac{1}{8}\iff b=\frac{1}{2}.$$

Vérifiez bien les deux équations obtenues pour b. Si on avait obtenu des valeurs de b différentes, on aurait dû poursuivre l'analyse (par exemple en testant d'autres valeurs de a).

Synthèse. On pose $\boxed{a=3}$ et $\boxed{b=1/2}$. D'après les calculs effectués en analyse, on a bien :

$$\forall x\in[-2,2],\quad\boxed{\sin\left(3\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right)=g(x)}.$$

4. *Dans cette question, on fixe $x\in[-1,1]$.*

(a) *À l'aide du cercle trigonométrique, déterminer un encadrement de $3\arcsin(x/2)$.*

▶ Puisque $x\in[-1,1]$, on a $x/2\in[-1/2,1/2]$. D'après les valeurs remarquables de la fonction sinus, on sait que $\arcsin(1/2)=\pi/6$ et $\arcsin(-1/2)=-\pi/6$. En reportant ces valeurs sur le cercle trigonométrique, on en déduit que :

$$-\frac{\pi}{6}\leqslant\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\leqslant\frac{\pi}{6}\quad\text{donc}\quad\underbrace{-\frac{3\pi}{6}}_{=-\pi/2}\leqslant 3\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\leqslant\underbrace{\frac{3\pi}{6}}_{=\pi/2}.$$

Aidez vous d'un schéma du cercle trigonométrique !

On en déduit que $\boxed{3\arcsin(x/2)\in[-\pi/2,\pi/2]}$.

(b) *Déduire des résultats précédents que $f(x) = \arcsin(x/2)$.*

▶ On a montré à la question 3(b) que $\theta = 3\arcsin(x/2)$ est une solution de l'équation $\sin(\theta) = g(x)$. De plus, on a montré à la question précédente que cette solution appartient à $[-\pi/2, \pi/2]$. Or on sait, par définition de arcsinus (rappelée à la question 1), que $\arcsin(g(x))$ est l'unique solution appartenant à $[-\pi/2, \pi/2]$ de cette équation. On en déduit que $3\arcsin(x/2) = \arcsin(g(x))$. Par conséquent :

$$\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3}\arcsin(g(x)) = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3x - x^3}{2}\right) = f(x).$$

On en déduit bien que $\boxed{f(x) = \arcsin(x/2)}$ lorsque $x \in [-1, 1]$.

5. *Soit $x \in]1, 2]$. En vous inspirant de la question précédente, montrer que $f(x) = \frac{\pi}{3} - \arcsin(x/2)$.*

▶ On raisonne comme à la question précédente. $\theta = 3\arcsin(x/2)$ est toujours une solution de l'équation $\sin(\theta) = g(x)$ d'après le résultat de la question 3(b). Par contre, puisque $x \in]1, 2]$, on a $x/2 \in]1/2, 1]$ et donc $\arcsin(x/2) \in]\pi/6, \pi/2]$ d'après le cercle trigonométrique. On en déduit que cette solution appartient à $]\pi/2, 3\pi/2]$ et donc que $3\arcsin(x/2) = \pi - \arcsin(g(x))$ d'après le cercle trigonométrique. Par conséquent :

$$f(x) = \frac{1}{3}\arcsin(g(x)) = \frac{1}{3}\left(\pi - 3\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \boxed{\frac{\pi}{3} - \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{lorsque } x \in]1, 2].$$

6. *Déterminer une expression similaire pour $f(x)$ lorsque $x \in [-2, -1[$.*

▶ On raisonne comme aux deux questions précédentes. Puisque $x \in [-2, -1[$, on a $x/2 \in [-1, -1/2[$ et donc $\arcsin(x/2) \in [-\pi/2, -\pi/6[$ d'après le cercle trigonométrique. On en déduit que $3\arcsin(x/2)$ appartient à $[-3\pi/2, -\pi/2[$ et donc que $3\arcsin(x/2) = -\pi - \arcsin(g(x))$ d'après le cercle trigonométrique. Par conséquent :

$$f(x) = \frac{1}{3}\arcsin(g(x)) = \frac{1}{3}\left(-\pi - 3\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\right) = \boxed{\frac{-\pi}{3} - \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{lorsque } x \in [-2, -1[.$$

Ce résultat est cohérent avec celui de la question 5. En effet, puisque g, et donc f, sont des fonctions impaires, on a pour $x \in [-2, -1[$:

$$f(x) = -f(\underbrace{-x}_{\in]1,2]}) = -\left(\frac{\pi}{3} - \arcsin\left(\frac{-x}{2}\right)\right) = \frac{-\pi}{3} - \arcsin\left(\frac{x}{2}\right).$$

Exercice 4

Écrire le nombre complexe suivant sous forme algébrique :

$$\left(\frac{6 + \sqrt{6} + i\left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)}{4\sqrt{3} + i2\sqrt{6}}\right)^{43}.$$

▶ On commence par simplifier le nombre complexe sous la puissance :

$$\begin{aligned}
\frac{6 + \sqrt{6} + i\left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)}{4\sqrt{3} + i2\sqrt{6}} &= \frac{\left(6 + \sqrt{6} + i\left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)\right)\left(4\sqrt{3} - i2\sqrt{6}\right)}{\left(4\sqrt{3} + i2\sqrt{6}\right)\left(4\sqrt{3} - i2\sqrt{6}\right)} \\
&= \frac{24\sqrt{3} - i12\sqrt{6} + 4\sqrt{18} - i2\sqrt{36} + i12\sqrt{6} + 6\sqrt{12} - i8\sqrt{9} - 4\sqrt{18}}{16 \times 3 + 4 \times 6} \\
&= \frac{\left(24\sqrt{3} + 12\sqrt{2} + 12\sqrt{3} - 12\sqrt{2}\right) + i\left(-12\sqrt{6} - 12 + 12\sqrt{6} - 24\right)}{72} \\
&= \frac{36\sqrt{3} - i36}{72} = \frac{\sqrt{3} - i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \\
&= \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) = e^{-i\pi/6}.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\left(\frac{6+\sqrt{6}+i\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)}{4\sqrt{3}+i2\sqrt{6}}\right)^{43} = \left(e^{-i\pi/6}\right)^{43} = e^{-i\pi 43/6} = e^{-i\pi(42+1)/6} = e^{-i7\pi} \times e^{-i\pi/6}$$

$$= -1 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) \quad \text{d'après les valeurs remarquables sur le cercle trigonométrique}$$

$$= \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}}.$$

Problème 2

Le but de ce problème est de résoudre l'équation suivante d'inconnue z complexe :

$$\overline{z} = z^2 - 3z + 7. \tag{E1}$$

1. (a) *Montrer que (E1) n'admet pas de solutions réelles.*

▶ On raisonne par l'absurde en supposant que (E1) admet une solution réelle qu'on note $z = x$. Puisque $x \in \mathbb{R}$, on a $\overline{z} = x$ et donc :

$$x = x^2 - 3x + 7 \quad \text{par conséquent} \quad x^2 - 4x + 7 = 0.$$

Ainsi, x est solution d'une équation du second degré dont le discriminant est égal à :

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 7 = -12 < 0.$$

Cette équation n'admet donc pas de solution réelle ce qui contredit l'existence de x. Par l'absurde, on en déduit que $\boxed{\text{(E1) n'admet pas de solutions réelles}}$.

(b) *(E1) admet-elle des solutions imaginaires pures ?*

▶ Soit z une solution imaginaire pure de (E1). Donc z est de la forme $z = iy$ où $y \in \mathbb{R}$. On a $\overline{z} = -iy$ et donc :

$$-iy = (iy)^2 - 3(iy) + 7 = -y^2 - i3y + 7 \quad \text{par conséquent} \quad \left(-y^2 + 7\right) + i\underbrace{(y - 3y)}_{=-2y} = 0.$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire, on en déduit que $-y^2 + 7 = 0$ et $-2y = 0$. La deuxième équation donne $y = 0$ et on obtient une absurdité en réinjectant cette valeur dans la première équation car $-0^2 + 7 = 7 \neq 0$. En raisonnant par l'absurde comme à la question précédente, on en déduit que $\boxed{\text{(E1) n'admet pas de solutions imaginaires pures}}$.

2. *Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que z est solution de (E1) si et seulement si $\overline{z}$ aussi.*

▶ On raisonne par double implication.

$\Longrightarrow$ On suppose que z est solution de (E1). Donc :

$$\overline{z} = z^2 - 3z + 7.$$

D'après les propriétés du conjugué, on a :

$$\overline{\overline{z}} = \overline{z^2 - 3z + 7} = \overline{z^2} - \underbrace{\overline{3z}}_{=\overline{3}\times\overline{z}} + \overline{7} = \overline{z}^2 - 3\overline{z} + 7.$$

Ainsi, on a bien montré que $\overline{z}$ est solution de (E1).

$\Longleftarrow$ On suppose que $\overline{z}$ est solution de (E1). En raisonnant comme pour l'implication précédente, on peut montrer que $\overline{\overline{z}} = z$ est solution de (E1).

<u>Conclusion</u>. Par double implication, en déduit que :

$$\boxed{z \text{ est solution de (E1)} \iff \overline{z} \text{ est solution de (E1)}}.$$

L'argument clef de cette réponse est que $\overline{z^2-3z+7}=\overline{z}^2-3\overline{z}+7$. Plus généralement, on peut montrer que si P est un polynôme à coefficients réels, alors $\overline{P(z)}=P\left(\overline{z}\right)$ pour tout $z\in\mathbb{C}$.

3. *Soit $z\in\mathbb{C}$ une solution de (E1). Montrer qu'alors z est solution de l'équation suivante :*

$$z=z^4-6z^3+20z^2-33z+35. \tag{E2}$$

▶ On a :

$$\begin{aligned}
z &= \overline{\overline{z}} \quad \text{par propriété du conjugué}\\
&= \overline{z^2-3z+7} \quad \text{car } z \text{ est solution de (E1)}\\
&= \overline{z}^2-3\overline{z}+7 \quad \text{par propriétés du conjugué}\\
&= \left(z^2-3z+7\right)^2-3\left(z^2-3z+7\right)+7\\
&= \left(z^4-3z^3+7z^2-3z^3+9z^2-21z+7z^2-21z+49\right)-3z^2+9z-21+7\\
&= z^4-6z^3+20z^2-33z+35.
\end{aligned}$$

On a bien montré que $\boxed{z \text{ est solution de (E2)}}$.

4. (a) *Vérifier que $z_1=2+i\sqrt{3}$ est solution de de (E2). Qu'en est-il de $z_2=2-i\sqrt{3}$?*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2+i\sqrt{3},\\
z_1^2 &= \left(2+i\sqrt{3}\right)^2=4+4i\sqrt{3}-3=1+i4\sqrt{3},\\
z_1^3 &= z_1^2\times z_1=\left(1+i4\sqrt{3}\right)\left(2+i\sqrt{3}\right)=2+i\sqrt{3}+i8\sqrt{3}-4\sqrt{9}=-10+i9\sqrt{3},\\
z_1^4 &= \left(z_1^2\right)^2=\left(1+i4\sqrt{3}\right)^2=1+i8\sqrt{3}-48=-47+i8\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
& z_1^4-6z_1^3+20z_1^2-33z_1+35\\
=& -47+i8\sqrt{3}-6\left(-10+i9\sqrt{3}\right)+20\left(1+i4\sqrt{3}\right)-33\left(2+i\sqrt{3}\right)+35\\
=& -47+i8\sqrt{3}+60-i54\sqrt{3}+20+i80\sqrt{3}-66-i33\sqrt{3}+35\\
=& 2+i\sqrt{3}=z_1.
\end{aligned}$$

On a bien vérifié que $\boxed{z_1 \text{ est solution de (E2)}}$. De plus, on a d'après les propriétés du conjugué :

$$z_2=\overline{z_1}=\overline{z_1^4-6z_1^3+20z_1^2-33z_1+35}=\overline{z_1}^4-6\overline{z_1}^3+20\overline{z_1}^2-33\overline{z_1}+35=z_2^4-6z_2^3+20z_2^2-33z_2+35.$$

Donc $\boxed{z_2 \text{ est aussi solution de (E2)}}$.

Ne perdez pas de temps en calculs inutiles. Ici les propriétés du conjugué permet d'éviter de refaire les mêmes calculs avec z_2 que ceux avec z_1.

(b) *Déterminer une équation du second degré, notée (E3), dont les solutions sont z_1 et z_2.*

▶ On sait que z_1 et z_2 sont solutions d'une équation du second degré de la forme :

$$z_2-Sz+P=0 \quad \text{où} \quad \begin{cases} S=z_1+z_2=z_1+\overline{z_1}+2\mathrm{Re}\left(z_1\right)=4,\\ P=z_1z_2=z_1\overline{z_1}=\left|z_1\right|^2=2^2+\left(\sqrt{3}\right)^2=7.\end{cases}$$

L'équation obtenue est donc :

$$\boxed{z^2-4z+7=0}. \tag{E3}$$

5. *Trouver deux constantes réelles $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que :*

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad z^4-6z^3+20z^2-34z+35=\left(z^2-4z+7\right)\left(z^2+az+b\right).$$

▶ On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse. On cherche $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ telles que pour tout $z\in\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} z^4-6z^3+20z^2-34z+35 &= \left(z^2-4z+7\right)\left(z^2+az+b\right)\\ &= z^4+az^3+bz^2-4z^3-4az^2-4b+7z^2+7az+7b\\ &= z^4+(a-4)\,z^3+(b-4a+7)\,z^2+(-4b+7a)+7b. \end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de degré 3, on obtient que $a-4=-6$ donc $a=-2$; et en identifiant les coefficients constants, on obtient que $7b=35$ donc $b=5$.
Synthèse. On pose $\boxed{a=-2}$ et $\boxed{b=5}$. D'après les calculs de l'analyse, on a pour tout $z\in\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \left(z^2-4z+7\right)\left(z^2+az+b\right) &= z^4+\underbrace{(a-4)}_{=-2-4}z^3+\underbrace{(b-4a+7)}_{=5+8+7}z^2+\underbrace{(-4b+7a)}_{-20-14}+\underbrace{7b}_{=35}\\ &= z^4-6z^3+20z^2-34z+35. \end{aligned}$$

On peut également vérifier les coefficients de degré 2 et 1 dans l'analyse. Dans ce cas, il est inutile de perdre du temps à le refaire dans la synthèse.

Finalement, on a montré que :

$$\boxed{\forall z\in\mathbb{C},\quad z^4-6z^3+20z^2-34z+35=\left(z^2-4z+7\right)\left(z^2-2z+5\right)}.$$

6. *Résoudre (E2).*

▶ On a :

$$\begin{aligned} \text{(E2)} &\iff z=z^4-6z^3+20z^2-33z+35\\ &\iff z^4-6z^3+20z^2-34z+35=0\\ &\iff \left(z^2-4z+7\right)\left(z^2-2z+5\right)\quad \text{d'après le résultat de la question précédente}\\ &\iff z^2-4z+7=0 \quad\text{ou}\quad z^2-2z+5=0\quad \text{par intégrité.} \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} z^2-4z+7=0 &\iff \text{(E3)}\\ &\iff z=z_1\quad\text{ou}\quad z=z_2\quad\text{d'après le résultat de la question 4(b)}\\ &\iff z=2+i\sqrt{3}\quad\text{ou}\quad z=2-i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Inutile de perdre du temps à calculer le discriminant pour résoudre cette équation du second degré. Pensez à utiliser les résultats des questions précédentes.

Pour la deuxième équation, on reconnaît une équation du second degré dont le discriminant est égal à :

$$\Delta=(-2)^2-4\times1\times5=-16<0.$$

On obtient donc deux solutions complexes conjuguées :

$$z^2-2z+5=0\iff z=\frac{-(-2)+i\sqrt{|-16|}}{2}=\frac{2+i\overbrace{\sqrt{16}}^{=4}}{2}=1+2i\quad\text{ou}\quad z=1-2i.$$

Finalement, on en déduit que (E2) admet quatre solutions :

$$\boxed{\text{(E2)}\iff z\in\left\{2+i\sqrt{3},2-i\sqrt{3},1+2i,1-2i\right\}}.$$

7. *En déduire les solutions de (E1).*

▶

Attention à la logique de l'énoncé : à la question 3, on a seulement montré que :

$$z \text{ est solution de (E1)} \implies z \text{ est solution de (E2)}.$$

Mais la réciproque est fausse en générale. Autrement dit, on a seulement démontré que l'ensemble des solutions de (E1) est inclus dans l'ensemble des quatre solutions de (E2). Il suffit donc de vérifier si chacune des quatre solutions de (E2) est bien une solution de (E1).

D'après les résultats des questions précédentes, on a montré que l'ensemble des solutions de (E1) est inclus dans $\left\{2+i\sqrt{3}, 2-i\sqrt{3}, 1+2i, 1-2i\right\}$. Or :

$$\begin{aligned}\left(2+i\sqrt{3}\right)^2 - 3\left(2+i\sqrt{3}\right) + 7 &= 1 + 4i\sqrt{3} - 6 - i3\sqrt{3} + 7 \quad \text{d'après les calculs de la question 4(a)} \\ &= 2 + i\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Donc $2+i\sqrt{3}$ est solution de (E1). On en déduit que $2-i\sqrt{3} = \overline{2+i\sqrt{3}}$ est aussi solution de (E1) d'après le résultat de la question 2. De même :

$$(1+2i)^2 - 3(1+2i) + 7 = 1 + 4i - 4 - 3 - 6i + 7 = 1 - 2i \neq 1 + 2i.$$

Donc $1+2i$ n'est pas solution de (E1). On en déduit que $1-2i = \overline{1+2i}$ n'est également pas solution de (E1) d'après le résultat de la question 2. Finalement :

$$\boxed{\text{(E1)} \iff z \in \left\{2+i\sqrt{3}, 2-i\sqrt{3}\right\}}.$$

DS n$^{\text{o}}$ 3 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

Problème 1

On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes définie par :

$$z_0 = 1 + i \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = (-1 + 9i)z_n + (8 + 4i)\overline{z_n}.$$

1. **[Informatique]** En Python, on modélisera chaque nombre complexe par la 2-liste de ses parties réelle et imaginaire. Par exemple, le nombre complexe $4 + 2i$ est représenté par la liste `[4,2]`, et la liste `[3,-1]` correspond au nombre complexe $3 - i$.
   (a) Écrire une fonction `conjugue(L)` qui prend en argument une liste `L` représentant un nombre complexe z, et qui renvoie la liste représentant son conjugué $\overline{z}$.
   (b) Écrire une fonction `somme(L,M)` qui prend en argument deux listes `L` et `M` représentant deux nombres complexes z et w, et qui renvoie la liste représentant leur somme $z + w$.
   (c) Écrire une fonction `produit(L,M)` qui prend en argument deux listes `L` et `M` représentant deux nombres complexes z et w, et qui renvoie la liste représentant leur produit zw.
   (d) En réutilisant les fonctions des questions précédentes, écrire une fonction `suite(n)` qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie la liste représentant le nombre complexe z_n.
   (e) Que renvoie la fonction ci-dessous ?

```
def mystere():
    n=1
    L=suite(n)
    while L[0]!=L[1]:
        n=n+1
        L=suite(n)
    return n
```

2. **[Mathématiques]** Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note x_n la partie réelle de z_n et y_n sa partie imaginaire.
   (a) Calculer x_0, y_0, x_1 et y_1.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $x_{n+1} = 7x_n - 5y_n$ et déterminer une expression similaire pour y_{n+1}.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $x_{n+2} = -2x_{n+1} - 2x_n$ et déterminer une expression similaire pour y_{n+2}.
   (d) Calculer les termes généraux des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (e) En déduire une expression de z_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice

Dans cet exercice, on fixe un réel $\lambda > 0$ et on considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$u_1 = \lambda \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = \frac{3\lambda u_n}{u_n + \lambda}.$$

1. On pose la fonction $f : x \mapsto 3\lambda x/(x + \lambda)$.
   (a) Dresser le tableau des variations de f sur son ensemble de définition noté $\mathscr{D}_f$.
   (b) Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \in \mathscr{D}_f$.
   (c) À l'aide des résultats précédents, tracer sur un même graphique : la droite d'équation $y = x$, l'allure de la courbe représentative de f, et les premiers termes de $(u_n)_{n\geqslant 1}$. Quelles conjectures peut-on formuler pour la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$?

2. Montrer que $\lambda \leqslant u_n < u_{n+1} < 2\lambda$ pour tout $n \geqslant 1$.
3. On définit une suite auxiliaire $(a_n)_{n\geqslant 1}$ par $a_n = 1/u_n$ pour tout $n \geqslant 1$.
   (a) Montrer que $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est arithmético-géométrique.
   (b) Calculer le terme général de $(a_n)_{n\geqslant 1}$.
   (c) En déduire une expression de u_n en fonction de n, pour tout $n \geqslant 1$.

Problème 2

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles, indexées à partir de 0, on définit une nouvelle suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \tag{1}$$

On appelle $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le **produit de convolution** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si dans la formule ci-desus on prend $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n$, on parle simplement du produit de convolution de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec elle-même.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer
$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k) \tag{2}$$
   (b) On considère la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $\forall n \in \mathbb{N}$, $e_n = n$. Calculer le produit de convolution de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec elle-même.
2. Soit un nombre $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = a^n$. Calculer le produit de convolution de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec elle-même.
3. Soit un autre nombre $b \in \mathbb{R}$, de même on considère la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $\beta_n = b^n$. Montrer que le produit de convolution de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \begin{cases} (n+1)a^n & \text{si } a = b \\ \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} & \text{si } a \neq b \end{cases} \tag{3}$$
4. On définit la suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \epsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4}$$
   Montrer que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le produit de convolution de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n$.
5. Pour deux nombres $(c, d) \in \mathbb{R}^2$, on définit les suites $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \gamma_n = \frac{c^n}{n\,!} \quad \delta_n = \frac{d^n}{n\,!} \tag{5}$$
   Montrer que, pour leur produit de convolution $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \frac{(c+d)^n}{n\,!} \tag{6}$$
6. **[Informatique]** On souhaite écrire un programme Python permettant de vérifier une partie des calculs précédents. On note plutôt avec $i \in \mathbb{N}$ l'indice des suites (ce n'est qu'une variable muette) et pour un nombre n donné, on représente une suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ par une liste `L` contenant les $n+1$ premiers termes de la suite, c'est à dire les termes u_0, u_1, …, u_n. Ainsi `L[i]` est exactement le terme u_i et cela pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$. Par exemple si $n = 5$ alors la suite $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est représentée par la liste `[0, 1, 2, 3, 4, 5]` et la suite $(\delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est représentée par `[1, 0, 0, 0, 0, 0]`.
   (a) Écrire une fonction `epsilon(n)` qui prend en argument un nombre `n` et qui renvoie la liste des $n+1$ premiers termes de la suite $(\epsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de la question 4.

(b) Écrire une fonction `e(n)` qui prend en argument un nombre `n` et qui renvoie la liste des $n+1$ premiers termes de la suite $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de la question 1b.

(c) On considère la fonction suivante, prenant deux arguments (des nombres) `c` et `n` :

```
def manquedeserieux(c, n):
    L = [0] * n
    L[0] = c
    for i in range(1, n):
        L[i] = L[i-1] * c / (i+1)
    return L
```

i. Si on suppose que la variable `c` est un nombre, que renvoie `manquedeserieux(c, 2)` ? Et `manquedeserieux(c, 3)` ?

ii. Corriger la fonction pour écrire une fonction `gamma(c, n)` qui renvoie la liste des $n+1$ premiers termes de la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la question 5 avec le paramètre c.

(d) Écrire une fonction `convole(L, M, n)`, qui prend en argument un entier `n` et deux listes `L`, `M` de taille (au moins) $n+1$ et qui renvoie le terme w_n du produit de convolution $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(e) Utiliser la fonction précédente pour écrire une fonction `convolution(L, M, n)` qui prend en argument deux listes `L`, `M` représentant les $n+1$ premiers termes de suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et qui renvoie une liste représentant les $n+1$ premiers termes de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est leur produit de convolution.

7. On souhaite montrer que le produit de convolution est commutatif. Pour cela on fixe des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ leur produit de convolution. De même on note $(w'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le produit de convolution de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = w'_n$.
8. On souhaite montrer que le produit de convolution est associatif. Pour cela on fixe trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'une part on forme le produit de convolution $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le produit de convolution de $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'autre part, on forme d'abord le produit de convolution $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(z_n)_{n_in\mathbb{N}}$, puis on forme le produit de convolution $(w'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = w'_n$.
9. Le produit de convolution admet-il un élément neutre ?

Corrigé du DS n° 3 de mathématiques et d'informatique

Problème 1

On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes définie par :

$$z_0 = 1+i \quad \textit{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = (-1+9i)z_n + (8+4i)\overline{z_n}.$$

1. ***[Informatique]** En Python, on modélisera chaque nombre complexe par la 2-liste de ses parties réelle et imaginaire. Par exemple, le nombre complexe $4+2i$ est représenté par la liste* `[4,2]`*, et la liste* `[3,-1]` *correspond au nombre complexe $3-i$.*

   (a) *Écrire une fonction* `conjugue(L)` *qui prend en argument une liste* `L` *représentant un nombre complexe z, et qui renvoie la liste représentant son conjugué $\overline{z}$.*

   ▶

   Pour rappel : $\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z)$ *donc* $\mathrm{Re}(\overline{z}) = \mathrm{Re}(z)$ *et* $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$.

   Par exemple :

```
def conj(L):
    x=L[0]
    y=-L[1]
    return [x,y]
```

   (b) *Écrire une fonction* `somme(L,M)` *qui prend en argument deux listes* `L` *et* `M` *représentant deux nombres complexes z et w, et qui renvoie la liste représentant leur somme $z+w$.*

   ▶

   Pour rappel :

$$\begin{aligned} z+w &= (\mathrm{Re}(z)+i\mathrm{Im}(z)) + (\mathrm{Re}(w)+i\mathrm{Im}(w)) \\ &= (\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(w)) + i\,(\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(w)) \end{aligned}$$

$$\textit{donc} \quad \mathrm{Re}(z+w) = \mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(w) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Im}(z+w) = \mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(w).$$

   Par exemple :

```
def somme(L,M):
    x=L[0]+M[0]
    y=L[1]+M[1]
    return [x,y]
```

   (c) *Écrire une fonction* `produit(L,M)` *qui prend en argument deux listes* `L` *et* `M` *représentant deux nombres complexes z et w, et qui renvoie la liste représentant leur produit zw.*

   ▶

Pour rappel :

$$\begin{aligned} zw &= (\mathrm{Re}(z)+i\mathrm{Im}(z))\,(\mathrm{Re}(w)+i\mathrm{Im}(w)) \\ &= \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(w)+i\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(w)+i\mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(w)-\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w) \\ &= (\mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(w)-\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w))+i\,(\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(w)+\mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(w)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textit{donc} \quad \mathrm{Re}(zw) &= \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(w)-\mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w) \\ \textit{et} \quad \mathrm{Im}(zw) &= \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(w)+\mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(w). \end{aligned}$$

Par exemple :

```
def produit(L,M):
    x=L[0]*M[0]-L[1]*M[1]
    y=L[0]*M[1]+L[1]*M[0]
    return [x,y]
```

(d) *En réutilisant les fonctions des questions précédentes, écrire une fonction* `suite(n)` *qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie la liste représentant le nombre complexe z_n.*

▶ Par exemple :

```
def suite(n):
    L=[1,1]
    for i in range(n):
        L=somme(produit([-1,9],L),produit([8,4],conj(L)))
    return L
```

(e) *Que renvoie la fonction ci-dessous ?*

```
def mystere():
    n=1
    L=suite(n)
    while L[0]!=L[1]:
        n=n+1
        L=suite(n)
    return n
```

▶ La fonction `mystere` commence par initialiser la variable `n` avec la valeur 1 et la liste `L` représentant le nombre complexe z_n, donc z_1. Ensuite, la fonction `mystere` teste si `L[0]` est différent de `L[1]`, c'est-à-dire si la partie réelle de z_n est différente de la partie imaginaire de z_n.

— Si les parties réelle et imaginaire de z_n sont différentes, alors la fonction `mystere` ajoute 1 à la valeur de `n`, donc la variable `n` prend la valeur entière suivante, et recalcule la liste `L` représentant le nombre complexe z_n pour cette nouvelle valeur de n. Puis la fonction `mystere` teste à nouveau si les parties réelles et imaginaires de z_n sont différentes pour cette nouvelle valeur de n. Tant que les parties réelles et imaginaires de z_n sont différentes, la fonction `mystere` réitère ces opérations.

— Dès que les parties réelles et imaginaires de z_n ne sont plus différentes, donc qu'elles sont égales, la fonction `mystere` s'arrête et renvoie la valeur de la variable `n`.

Ainsi, la fonction `mystere` renvoie $\boxed{\text{le plus petit entier } n \geqslant 1 \text{ tel que les parties réelle et imaginaire de } z_n \text{ sont égales}}$.

D'après l'énoncé, on a :

$$\begin{aligned}
z_0 &= 1+i,\\
z_1 &= (-1+9i)z_0 + (8+4i)\overline{z_0} = (-1+9i)(1+i) + (8+4i)(1-i)\\
&= (-10+8i) + (12-4i) = 2+4i,\\
z_2 &= (-1+9i)z_1 + (8+4i)\overline{z_1} = (-1+9i)(2+4i) + (8+4i)(2-4i)\\
&= (-38+14i) + (32-24i) = -6-10i,\\
z_3 &= (-1+9i)z_2 + (8+4i)\overline{z_2} = (-1+9i)(-6-10i) + (8+4i)(-6+10i)\\
&= (96-44i) + (-88+56i) = 8+12i,\\
z_4 &= (-1+9i)z_3 + (8+4i)\overline{z_3} = (-1+9i)(8+12i) + (8+4i)(8-12i)\\
&= (-116+60i) + (112-64i) = -4-4i.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction `mystere` renvoie $\boxed{4}$.

2. ***[Mathématiques]*** *Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note x_n la partie réelle de z_n et y_n sa partie imaginaire.*

   (a) *Calculer x_0, y_0, x_1 et y_1.*

   ▶ On a d'après l'énoncé :

$$z_0 = 1+i \quad \text{donc} \quad \boxed{x_0 = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{y_0 = 1},$$

$$\begin{aligned}
\text{et} \quad z_1 &= (-1+9i)z_0 + (8+4i)\overline{z_0} = (-1+9i)(1+i) + (8+4i)(1-i)\\
&= (-10+8i) + (12-4i) = 2+4i \quad \text{donc} \quad \boxed{x_1 = 2} \quad \text{et} \quad \boxed{y_1 = 4}.
\end{aligned}$$

   (b) *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $x_{n+1} = 7x_n - 5y_n$ et déterminer une expression similaire pour y_{n+1}.*

   ▶ On a d'après l'énoncé :

$$\begin{aligned}
z_{n+1} &= (-1+9i)z_n + (8+4i)\overline{z_n}\\
&= (-1+9i)(x_n+iy_n) + (8+4i)(x_n - iy_n) \quad \text{car } z_n = x_n + iy_n\\
&= (-x_n - 9y_n) + i(9x_n - y_n) + (8x_n + 4y_n) + i(4x_n - 8y_n)\\
&= \underbrace{(7x_n - 5y_n)}_{=x_{n+1}} + i\underbrace{(13x_n - 9y_n)}_{=y_{n+1}}.
\end{aligned}$$

   Puisque $z_{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}$, on en déduit que $\boxed{x_{n+1} = 7x_n - 5y_n}$ et $\boxed{y_{n+1} = 13x_n - 9y_n}$.

   (c) *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $x_{n+2} = -2x_{n+1} - 2x_n$ et déterminer une expression similaire pour y_{n+2}.*

   ▶ On déduit du premier résultat de la question précédente que :

$$y_n = \frac{x_{n+1} - 7x_n}{-5} = -\frac{1}{5}x_{n+1} + \frac{7}{5}x_n.$$

   Puisque cette relation est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi que :

$$y_{n+1} = -\frac{1}{5}x_{n+2} + \frac{7}{5}x_{n+1}.$$

   En réinjectant ces expressions dans le deuxième résultat de la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{5}x_{n+2} + \frac{7}{5}x_{n+1} = 13x_n - 9\left(-\frac{1}{5}x_{n+1} + \frac{7}{5}x_n\right)\\
\text{donc} \quad &-x_{n+2} + 7x_{n+1} = 65x_n + 9x_{n+1} - 63x_n\\
\text{donc} \quad &x_{n+2} = (7-9)x_{n+1} + (63-65)x_n = \boxed{-2x_{n+1} - 2x_n}.
\end{aligned}$$

De même, on déduit du deuxième résultat de la question précédente que :

$$x_n = \frac{y_{n+1} + 9y_n}{13} = \frac{1}{13}y_{n+1} + \frac{9}{13}y_n.$$

Puis on obtient en réinjectant cette expression dans le premier résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{13}y_{n+2} + \frac{9}{13}y_{n+1} = 7\left(\frac{1}{13}y_{n+1} + \frac{9}{13}y_n\right) - 5y_n \\ \text{donc} \quad & y_{n+2} + 9y_{n+1} = 7y_{n+1} + 63y_n - 65y_n \\ \text{donc} \quad & y_{n+2} = (7-9)y_{n+1} + (63-65)y_n = \boxed{-2y_{n+1} - 2y_n}. \end{aligned}$$

(d) *Calculer les termes généraux des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

► D'après les résultats de la question précédente, on reconnaît des suites récurrentes linéaires d'ordre deux. On commence donc par résoudre l'équation caractéristique d'inconnue $q \in \mathbb{C}$:

$$q^2 = -2q - 2 \iff q^2 + 2q + 2 = 0.$$

On reconnaît une équation du second degré à coefficients réels dont le discriminant est égal à $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times 1 = -4 < 0$. L'équation caractéristique admet donc deux racines complexes conjugués :

$$q_1 = \frac{-2 + i\sqrt{|\Delta|}}{2} = -1 + i \quad \text{et} \quad q_2 = \overline{q_1} = -1 - i.$$

On écrit ces racines sous forme exponentielle. On cherche $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $q_1 = \rho e^{i\theta}$ (et donc $q_2 = \overline{q_1} = \rho e^{-i\theta}$). On a pour le module :

$$\rho = |q_1| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Par conséquent :

$$-1 + i = q_1 = \rho e^{i\theta} = \sqrt{2}(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = \sqrt{2}\cos(\theta) + i\sqrt{2}\sin(\theta).$$

En identifiant les parties réelle et imaginaire, on en déduit qu'on cherche un argument θ tel que :

$$\cos(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

D'après les valeurs remarquables du cercle trigonométrique, on peut choisir l'argument $\theta = \frac{3\pi}{4}$. Finalement, les deux solutions de l'équation caractéristique sont :

$$\boxed{q_1 = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}} \quad \text{et} \quad \boxed{q_2 = \sqrt{2}e^{-i3\pi/4}}.$$

Par conséquent, il existe quatre constantes réelles A, B, C et D telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(A\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right) + B\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)\right) \\ y_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(C\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right) + D\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)\right). \end{cases}$$

Pour déterminer ces quatre constantes, on utilise les premières termes de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire les résultats de la question 2(a).

$$1 = x_0 = \underbrace{\left(\sqrt{2}\right)^0}_{=1}\left(A\underbrace{\cos(0)}_{=1} + B\underbrace{\sin(0)}_{=0}\right) = A \quad \text{donc} \quad \boxed{A = 1},$$

$$2 = x_1 = \underbrace{\left(\sqrt{2}\right)^1}_{=\sqrt{2}}\left(\underbrace{A}_{=1}\underbrace{\cos\left(\tfrac{3\pi}{4}\right)}_{=-\sqrt{2}/2} + B\underbrace{\sin\left(\tfrac{3\pi}{4}\right)}_{=\sqrt{2}/2}\right) = -1 + B \quad \text{donc} \quad \boxed{B = 3},$$

$$1 = y_0 = \underbrace{\left(\sqrt{2}\right)^0}_{=1} \left(C \underbrace{\cos(0)}_{=1} + D \underbrace{\sin(0)}_{=0}\right) = C \quad \text{donc} \quad \boxed{C = 1},$$

$$4 = y_1 = \underbrace{\left(\sqrt{2}\right)^1}_{=\sqrt{2}} \left(\underbrace{C}_{=1} \underbrace{\cos\left(\tfrac{3\pi}{4}\right)}_{=-\sqrt{2}/2} + D \underbrace{\sin\left(\tfrac{3\pi}{4}\right)}_{=\sqrt{2}/2}\right) = -1 + D \quad \text{donc} \quad \boxed{D = 5}.$$

Finalement, on obtient que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right) + 3\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)\right) \\ y_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right) + 5\sin\left(\frac{3\pi}{4}n\right)\right). \end{cases}}$$

(e) *En déduire une expression de z_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

▶ Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $z_n = x_n + iy_n$, on a d'après le résultat de la question précédente :

$$\boxed{z_n = \left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\tfrac{3\pi}{4}n\right) + 3\sin\left(\tfrac{3\pi}{4}n\right)\right) + i\left(\sqrt{2}\right)^n \left(\cos\left(\tfrac{3\pi}{4}n\right) + 5\sin\left(\tfrac{3\pi}{4}n\right)\right)}.$$

Exercice

Dans cet exercice, on fixe un réel $\lambda > 0$ et on considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$u_1 = \lambda \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = \frac{3\lambda u_n}{u_n + \lambda}.$$

1. *On pose la fonction $f : x \mapsto 3\lambda x/(x+\lambda)$.*

(a) *Dresser le tableau des variations de f sur son ensemble de définition noté $\mathscr{D}_f$.*

▶ On a :

$$f(x) = \frac{3\lambda x}{x+\lambda} \text{ est défini } \iff x + \lambda = 0 \iff x = -\lambda.$$

Donc f est définie et dérivable sur $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-\lambda\}}$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, on a d'après la formule de dérivée d'un quotient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\lambda\}, \quad f'(x) = \frac{3\lambda \times (x+\lambda) - 3\lambda x \times 1}{(x+\lambda)^2} = \frac{3\lambda^2}{(x+\lambda)^2} > 0.$$

Par conséquent, f est strictement croissante sur $]-\infty, -\lambda[$ et sur $]-\lambda, +\infty[$.

> *Attention : f n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{-\lambda\}$! Le théorème «si f' est positive sur I alors f est croissante sur I» est vrai seulement si I est un intervalle, alors qu'ici $\mathbb{R} \setminus \{-\lambda\} =]-\infty, -\lambda[\cup]-\lambda, +\infty[$ n'est pas un intervalle*

. De plus, on a :

— $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3\lambda x}{x+\lambda} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3\lambda}{1+\frac{\lambda}{x}} = \frac{3\lambda}{1+0} = 3\lambda$,

— $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-\lambda \\ x<-\lambda}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-\lambda \\ x<-\lambda}} \frac{3\lambda x}{x+\lambda} = \frac{-3\lambda^2}{0^-} = +\infty$,

— $\displaystyle\lim_{\substack{x\to-\lambda \\ x>-\lambda}} f(x) = \lim_{\substack{x\to-\lambda \\ x>-\lambda}} \frac{3\lambda x}{x+\lambda} = \frac{-3\lambda^2}{0^+} = -\infty$,

— et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3\lambda x}{x+\lambda} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3\lambda}{1+\frac{\lambda}{x}} = \frac{3\lambda}{1+0} = 3\lambda$.

On en déduit le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		$-\lambda$		$+\infty$
$f(x)$	3λ	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	3λ

(b) Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \in \mathscr{D}_f$.

▶ Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\lambda\}$. On a :

$$f(x) - x = \frac{3\lambda x}{x+\lambda} - \frac{x(x+\lambda)}{x+\lambda} = \frac{3\lambda x - x^2 - \lambda x}{x+\lambda} = \frac{x(2\lambda - x)}{x+\lambda}.$$

On en déduit le signe de $f(x) - x$ à l'aide d'un tableau de signes (on a $-\lambda < 0 < 2\lambda$ car $\lambda > 0$) :

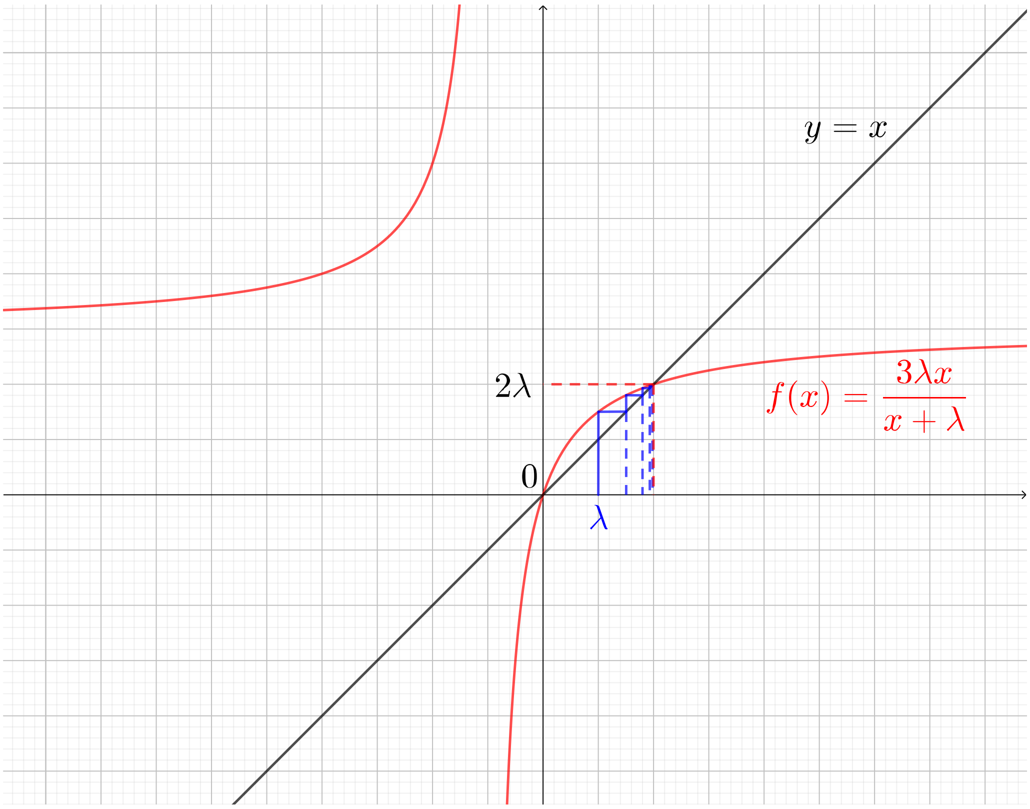
x		$-\lambda$		0		2λ	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2\lambda - x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$x + \lambda$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x) - x$	$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$

(c) À l'aide des résultats précédents, tracer sur un même graphique : la droite d'équation $y = x$, l'allure de la courbe représentative de f, et les premiers termes de $(u_n)_{n\geqslant 1}$. Quelles conjectures peut-on formuler pour la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$?

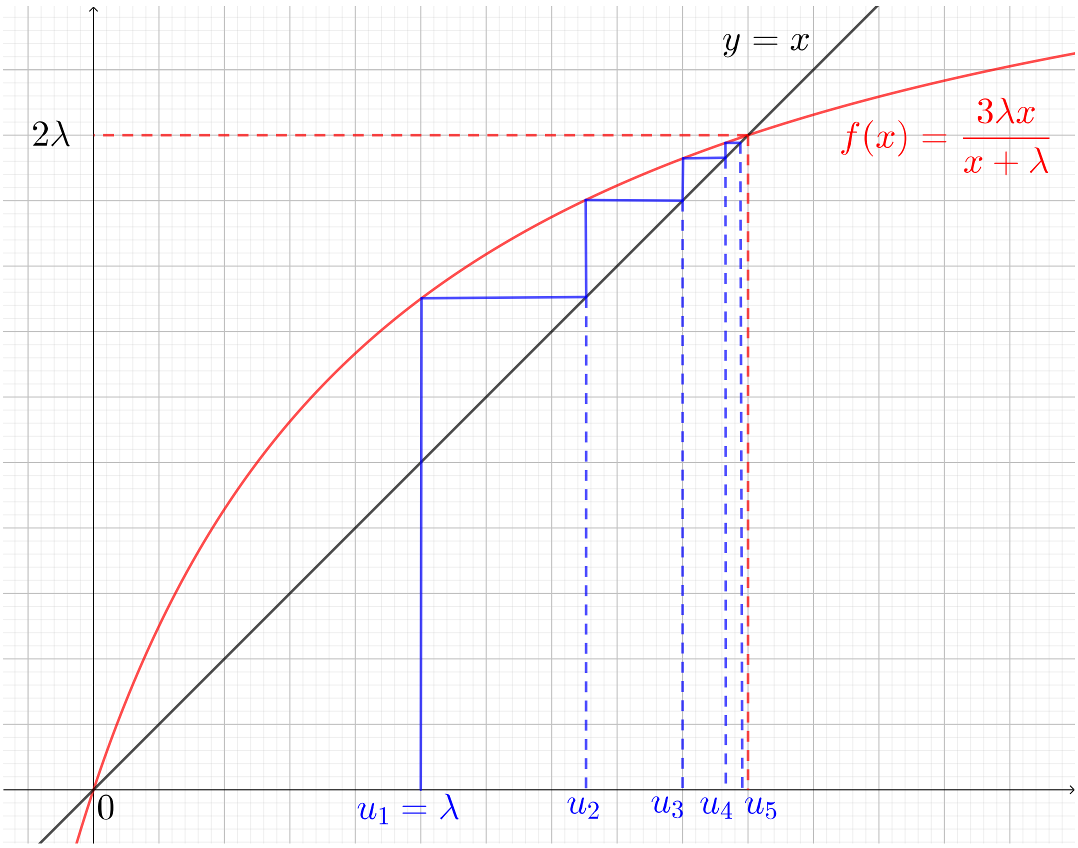
▶

Faîtes apparaître les résultats des questions précédentes sur votre graphique : la courbe représentative de f est strictement croissante sur $]-\infty, -\lambda[$ et sur $]-\lambda, +\infty[$, elle est située au-dessus de la droite d'équation $y = x$ sur $]-\infty, -\lambda[\cup[0, 2\lambda]$ et en-dessous sur $]-\lambda, 0] \cup [2\lambda, +\infty[$ (en particulier, elle coupe la droite d'équation $y = x$ à l'origine et au point de coordonnées $(2\lambda, 2\lambda)$).

On a :



Et en zoomant pour les valeurs de x entre λ et 2λ :



On conjecture que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est $\boxed{\text{minorée par } \lambda}$, $\boxed{\text{majorée par } 2\lambda}$ et $\boxed{\text{strictement croissante}}$.

On peut également conjecturer que u_n tend vers 2λ lorsque $n \to +\infty$ mais nous apprendrons plus tard dans l'année à étudier la convergence des suites.

2. *Montrer que $\lambda \leqslant u_n < u_{n+1} < 2\lambda$ pour tout $n \geqslant 1$.*

▶ On raisonne par récurrence. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $P(n)$: «$\lambda \leqslant u_n < u_{n+1} < 2\lambda$».
Initialisation. Pour $n = 1$, on a d'après l'énoncé $u_1 = \lambda$ et :

$$u_2 = \frac{3\lambda u_1}{u_1 + \lambda} = \frac{3\lambda^2}{2\lambda} = \frac{3}{2}\lambda.$$

De plus, $\lambda < \frac{3}{2}\lambda < 2\lambda$ car $1 < \frac{3}{2} < 2$ et $\lambda > 0$. On en déduit que $\lambda \leqslant u_1 < u_2 < 2\lambda$, donc que $P(1)$ est vérifiée.
Hérédité. On suppose que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geqslant 1$ fixé. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. On sait que :

$$\lambda \leqslant u_n < u_{n+1} < 2\lambda \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence.}$$

Or la fonction f est strictement croissante sur $]-\lambda, +\infty[$ d'après le résultat de la question 1(a), donc en particulier sur $[\lambda, 2\lambda]$. Par conséquent :

$$f(\lambda) \leqslant f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(2\lambda).$$

Or :
— $f(\lambda) = \dfrac{3\lambda \times \lambda}{\lambda + \lambda} = \dfrac{3}{2}\lambda$,
— $f(u_n) = \dfrac{3\lambda u_n}{u_n + \lambda} = u_{n+1}$ d'après la relation de récurrence de l'énoncé,
— $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ car la relation de récurrence est vraie pour tout $n \geqslant 1$,
— et $f(2\lambda) = \dfrac{3\lambda \times 2\lambda}{2\lambda + \lambda} = 2\lambda$.

Par conséquent :

$$\frac{3}{2}\lambda \leqslant u_{n+1} < u_{n+2} < 2\lambda.$$

De plus, $\lambda < \frac{3}{2}\lambda$ car $1 < \frac{3}{2}$ et $\lambda > 0$. On en déduit que $\lambda \leqslant u_{n+1} < u_{n+2} < 2\lambda$, donc que $P(n+1)$ est vérifiée. Ainsi, on a montré que $P(n) \implies P(n+1)$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on a bien montré que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad \lambda \leqslant u_n < u_{n+1} < 2\lambda}$$

ce qui prouve les conjectures établies à la question précédente.

3. *On définit une suite auxiliaire $(a_n)_{n\geqslant 1}$ par $a_n = 1/u_n$ pour tout $n \geqslant 1$.*

   (a) *Montrer que $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est arithmético-géométrique.*

   ▶ Soit $n \geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}} && \text{par définition de la suite auxiliaire}\\
&= \frac{1}{\frac{3\lambda u_n}{u_n+\lambda}} && \text{d'après la relation de récurrence de l'énoncé}\\
&= \frac{u_n + \lambda}{3\lambda u_n}\\
&= \frac{1 + \frac{\lambda}{u_n}}{3\lambda} && \begin{array}{l}\text{en simplifiant par } u_n \neq 0 \text{ car } u_n \geqslant \lambda > 0\\ \text{d'après le résultat de la question précédente}\end{array}\\
&= \frac{1 + \lambda a_n}{3\lambda} && \text{par définition de la suite auxiliaire}\\
&= \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3\lambda}.
\end{aligned}$$

   On reconnaît bien une $\boxed{\text{suite arithmético-géométrique}}$ de raison géométrique $\frac{1}{3}$ et de raison arithmétique $\frac{1}{3\lambda}$.

(b) *Calculer le terme général de $(a_n)_{n\geqslant 1}$.*

▶ On commence par résoudre l'équation suivante d'inconnue $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha = \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3\lambda} \iff \left(1 - \frac{1}{3}\right)\alpha = \frac{1}{3\lambda} \iff \alpha = \frac{\frac{1}{3\lambda}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2\lambda}.$$

Puisque $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est arithmético-géométrique de raison géométrique $\frac{1}{3}$ d'après le résultat de la question précédente, on sait que la suite $(b_n = a_n - \alpha)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Par conséquent :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \underbrace{b_n}_{=a_n-\alpha} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \underbrace{b_1}_{=a_1-\alpha}.$$

Puisque $\alpha = \frac{1}{2\lambda}$ et $a_1 = \frac{1}{u_1} = \frac{1}{\lambda}$, on obtient finalement que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad a_n = \frac{1}{3^{n-1}}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda}\right) + \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{3^{n-1} \times 2\lambda} + \frac{1}{2\lambda} = \boxed{\frac{1+3^{n-1}}{2\lambda 3^{n-1}}}.$$

(c) *En déduire une expression de u_n en fonction de n, pour tout $n \geqslant 1$.*

▶ Soit $n \geqslant 1$. Puisque $a_n = \frac{1}{u_n}$ par définition de la suite auxiliaire, on a $u_n = \frac{1}{a_n}$. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{1}{\frac{1+3^{n-1}}{2\lambda 3^{n-1}}} = \boxed{\frac{2\lambda 3^{n-1}}{1+3^{n-1}}}.$$

On peut en déduire la conjecture sur la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$ établie à la question 1(c). En effet :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\lambda 3^{n-1}}{1+3^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\lambda}{\frac{1}{3^{n-1}}+1} = \frac{2\lambda}{0+1} = 2\lambda.$$

Problème 2
Énoncé et corrigé de L.-C. Lefèvre

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles, indexées à partir de 0, on définit une nouvelle suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \tag{1}$$

On appelle $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le **produit de convolution** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si dans la formule ci-desus on prend $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n$, on parle simplement du produit de convolution de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec elle-même.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k) \tag{2}$$

▶ On développe et on utilise les formules habituelles :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k(n-k) &= \sum_{k=1}^{n}(kn-k^2) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kn - \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= n\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= n \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)}{6}\Big(3n-(2n+1)\Big) \\
&= \frac{n(n+1)}{6}(n-1) \\
&= \frac{n(n-1)n+1)}{6}
\end{aligned}$$

(b) On considère la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $\forall n \in \mathbb{N},\ e_n = n$. Calculer le produit de convolution de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec elle-même.

▶ Par définition il s'agit de calculer le terme w_n avec

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} k(n-k)$$

Mais cette somme est la même que la précédente à la différence près qu'elle part de $k=0$. Mais pour $k=0$ le terme sous la somme est nul. Donc w_n est bien égal à la somme trouvée précédemment.

2. Soit un nombre $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n = a^n$. Calculer le produit de convolution de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec elle-même.

▶ Il s'agit de calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, le terme w_n défini par

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} a^k a^{n-k}$$

mais sous la somme cela se simplifie en a^n qui ne dépend pas de k. Il y a alors $n+1$ termes égaux à a^n donc on trouve

$$w_n = (n+1)a^n \tag{3}$$

3. Soit un autre nombre $b \in \mathbb{R}$, de même on considère la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ \beta_n = b^n$. Montrer que le produit de convolution de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \begin{cases} (n+1)a^n & \text{si } a = b \\ \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} & \text{si } a \neq b \end{cases} \tag{4}$$

▶ On écrit

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

Si $a = b$ cela se ramène en fait au cas prédédent où on trouvait bien $(n+1)a^n$. Sinon cela ressemble beaucoup à la formule écrite telle quelle dans le cours

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k$$

qui est en fait la même (quitte à l'appliquer à (b, a) au lieu de (a, b), ou à faire le changement d'indice $j = n-1-k$, même principe que dans le binôme de Newton) que

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Écrite avec $n+1$ à la place de n c'est précisément

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

et donc à droite on reconnait $(a-b)w_n$. Si $a \neq b$ alors on peut en plus diviser par $a-b$ et on trouve bien

$$w_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}$$

4. On définit la suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \epsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{5}$$

Montrer que pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le produit de convolution de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n$.

► On écrit d'abord :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \epsilon_{n-k}$$

Mais sous cette somme beaucoup de termes sont nuls ! En effet les seuls termes non nuls sont pour $n - k = 0$ (auquel cas $\epsilon_{n-k} = 1$ c'est à dire en fait $k = n$. La somme n'a donc qu'un seul terme :

$$w_n = u_n \times 1 = u_n$$

et cela pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Pour deux nombres $(c, d) \in \mathbb{R}^2$, on définit les suites $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \gamma_n = \frac{c^n}{n\,!} \quad \delta_n = \frac{d^n}{n\,!} \tag{6}$$

Montrer que, pour leur produit de convolution $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \frac{(c+d)^n}{n\,!} \tag{7}$$

► Soit $n \in \mathbb{N}$, écrivons w_n :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{c^k}{k\,!} \times \frac{d^{n-k}}{(n-k)\,!}$$

et cela ressemble au binôme de Newton ; mais d'autre part

$$\frac{(c+d)^n}{n\,!} = \frac{1}{n\,!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} c^k d^{n-k}$$

Remplaçant les coefficients binomiaux par leur valeur, si $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n\,!}{k\,!(n-k)\,!}$$

on retrouve

$$\frac{(c+d)^n}{n\,!} = \frac{1}{n\,!}\sum_{k=0}^{n} \frac{n\,!}{k\,!(n-k)\,!}c^k d^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!(n-k)\,!}c^k d^{n-k} = w_n$$

6. **[Informatique]** On souhaite écrire un programme Python permettant de vérifier une partie des calculs précédents. On note plutôt avec $i \in \mathbb{N}$ l'indice des suites (ce n'est qu'une variable muette) et pour un nombre n donné, on représente une suite $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ par une liste `L` contenant les $n+1$ premiers termes de la suite, c'est à dire les termes u_0, u_1, ..., u_n. Ainsi `L[i]` est exactement le terme u_i et cela pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$. Par exemple si $n = 5$ alors la suite $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est représentée par la liste `[0, 1, 2, 3, 4, 5]` et la suite $(\delta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est représentée par `[1, 0, 0, 0, 0, 0]`.

   (a) Écrire une fonction `epsilon(n)` qui prend en argument un nombre `n` et qui renvoie la liste des $n+1$ premiers termes de la suite $(\epsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de la question 4.

   ► Plusieurs possibilités ; sur le modèle des questions suivantes (en initialisant une liste remplie de zéros) on peut faire tout simplement

```
def epsilon(n):
    L = [0] * (n+1)
    L[0] = 1
    return L
```

   sinon on se retrouve à faire des programmes qui traduisent aussi bien la définition mathématique mais sont plus longs, par exemple

```
def epsilon(n):
    L = []
    for i in range(n+1):
        if i == 0:
            L.append(1)
        else:
            L.append(0)
    return L
```

   (b) Écrire une fonction `e(n)` qui prend en argument un nombre `n` et qui renvoie la liste des $n+1$ premiers termes de la suite $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de la question 1b.

   ► Idem plusieurs possibilités pour remplir une liste `L` avec `L[i] = i`. Sur ce même modèle :

```
def e(n):
    L = [0] * (n+1)
    for i in range(n+1):
        L[i] = i
    return L
```

   ou bien une boucle avec `append`

```
def e(n):
    L = []
    for i in range(n+1):
        L.append(i)
    return L
```

   ou bien directement en compréhension (type TP 5 exercice 3)

```
def e(n):
    return [i for i in range(n+1)]
```

(c) On considère la fonction suivante, prenant deux arguments (des nombres) `c` et `n` :

```
def manquedeserieux(c, n):
    L = [0] * n
    L[0] = c
    for i in range(1, n):
        L[i] = L[i-1] * c / (i+1)
    return L
```

i. Si on suppose que la variable `c` est un nombre, que renvoie `manquedeserieux(c, 2)` ? Et `manquedeserieux(c, 3)` ?

► D'abord pour `n = 2` : au départ `L` est la liste `[0, 0]` puis à la ligne suivante `[c, 0]`. La boucle `for` est exécutée une seule fois, avec `i = 1`, qui remplit `L[1]` à `c*c/2`. Donc la fonction renvoie la liste `[c, c*c/2]`.

Puis pour `n = 3` : de même avant la boucle `L` est `[c, 0, 0]` puis au passage dans la boucle avec `i = 1` cela devient `[c, c*c/2, 0]` et enfin avec `i = 2` la liste renvoyée est `[c, c*c/2, c*c*c/6]`.

ii. Corriger la fonction pour écrire une fonction `gamma(c, n)` qui renvoie la liste des $n+1$ premiers termes de la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la question 5 avec le paramètre c.

► La fonction précédente retourne bien une liste de termes du type $\frac{c^i}{i!}$ mais les bornes ne sont pas bonnes (pour $i = 0$ ce terme doit être égal à 1) et elle retourne seulement n termes mais on en veut $n+1$. Soyons sérieux ! On vérifie comme à la question précédente que la fonction corrigée est :

```
def gamma(c, n):
    L = [0] * (n+1)
    L[0] = 1
    for i in range(1, n+1):
        L[i] = L[i-1] * c / i
    return L
```

(d) Écrire une fonction `convole(L, M, n)`, qui prend en argument un entier `n` et deux listes `L`, `M` de taille (au moins) $n+1$ et qui renvoie le terme w_n du produit de convolution $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

► Il s'agit simplement de calculer la somme des termes `L[i] * M[n-i]`. Si on demande que les listes contiennent $n+1$ termes c'est justement pour pouvoir faire varier `i` de 0 à n, bornes incluses, et que les indices des listes coïncident bien avec les indices des suites. C'est donc :

```
def convole(L, M, n):
    s = 0
    for i in range(n+1):
        s = s + L[i] * M[n-i]
    return s
```

(les parenthèses autour de la multiplication ne sont pas nécessaires, à cause de la priorité des opérations).

(e) Utiliser la fonction précédente pour écrire une fonction `convolution(L, M, n)` qui prend en argument deux listes `L`, `M` représentant les $n+1$ premiers termes de suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et qui renvoie une liste représentant les $n+1$ premiers termes de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est leur produit de convolution. ►

Standard : on veut remplir une liste disons `C` où `C[i]` est donné par `convole(L, M, i)` (ce n'est pas une suite définie par récurrence). On peut donc faire

```python
def convolution(L, M, n):
    C = [0] * (n+1)
    for i in range(n+1):
        C[i] = convole(L, M, i)
    return C
```

ou bien avec `append`

```python
def convolution(L, M, n):
    C = []
    for i in range(n+1):
        C.append(convole(L, M, i))
    return C
```

ou bien en compréhension

```python
def convolution(L, M, n):
    return [convole(L, M, i) for i in range(n+1)]
```

7. On souhaite montrer que le produit de convolution est commutatif. Pour cela on fixe des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ leur produit de convolution. De même on note $(w'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le produit de convolution de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = w'_n$.

   ▶ Il s'agit de comparer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'une part
$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$
   et d'autre part
$$w'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k u_{n-k}$$
   Mais ce sont les mêmes à un changement d'indice près ! Si dans l'expression de w_n on pose $j = n - k$ alors (donc $k = n - j$) cela devient
$$w_n = \sum_{j=0}^{n} u_{n-j} v_j = \sum_{j=0}^{n} v_j u_{n-j}$$
   qui est donc bien égal à w'_n, au renommage d'indice près.

8. On souhaite montrer que le produit de convolution est associatif. Pour cela on fixe trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'une part on forme le produit de convolution $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le produit de convolution de $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'autre part, on forme d'abord le produit de convolution $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(z_n)_{n_i n\mathbb{N}}$, puis on forme le produit de convolution $(w'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = w'_n$.

   ▶ Il s'agit de comparer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'une part
$$w_n = \sum_{k=0}^{n} r_k z_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} x_i y_{k-i} \right) z_{n-k}$$
   et d'autre part
$$w'_n = \sum_{k=0}^{n} x_k s_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} x_k \left(\sum_{i=0}^{n-k} y_i z_{n-k-i} \right)$$
   Or on a d'abord
$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} x_i y_{k-i} z_{n-k} \right)$$

puis on intervertit la doubles somme ce qui donne (c'est la somme sur tous les $0 \leqslant i, k \leqslant n$ avec en plus $i \leqslant k$)

$$w_n = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=i}^{n} x_i y_{k-i} z_{n-k} \right)$$

puis sous la <u>deuxième</u> somme le terme x_i ne varie pas donc il en sort :

$$w_n = \sum_{i=0}^{n} x_i \left(\sum_{k=i}^{n} y_{k-i} z_{n-k} \right)$$

Cela ressemble déjà mieux à l'expression de w'_n ; il reste en fait à faire le changement d'indice $j = k - i$ sous la <u>deuxième</u> somme (la première ne bouge plus), on aura alors les termes y_j et (comme $k = j + i$) $z_{n-k} = z_{n-j-i}$. De plus si $k = i$ alors $j = 0$ et si $k = n$ alors $j = n - i$. Donc on trouve

$$w_n = \sum_{i=0}^{n} x_i \left(\sum_{j=0}^{n-i} y_j z_{n-j-i} \right)$$

et ceci est bien la même chose que w'_n, quitte à renommer sous la deuxième somme la variable muette j en k.

9. Le produit de convolution admet-il un élément neutre ?

► La question 4 montre précisément que la suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément neutre pour le produit de convolution : pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le produit de convolution de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égal en tant que suite à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

DS n^{o} 4 de mathématiques et d'informatique

durée : 2 heures

Problème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Ce problème propose de dénombrer l'ensemble $\mathscr{E}_n$ des parties de $[\![1,n]\!] = \{1,2,\dots,n\}$ ne contenant pas d'entiers consécutifs. Par exemple pour $n=3$, l'ensemble des parties de $[\![1,3]\!]$ est :

$$\mathscr{P}\big([\![1,3]\!]\big) = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\big\}$$

ce qui donne $\mathrm{card}(\mathscr{E}_3) = 5$ car les parties $\{1,2\}$, $\{2,3\}$ et $\{1,2,3\}$ contiennent des entiers consécutifs. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on notera $\mathscr{E}_{n,k}$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}_n$ des parties contenant exactement k entiers. Ainsi :

$$\mathscr{E}_{3,0} = \big\{\emptyset\big\}, \quad \mathscr{E}_{3,1} = \big\{\{1\},\{2\},\{3\}\big\}, \quad \mathscr{E}_{3,2} = \big\{\{1,3\}\big\} \quad \text{et} \quad \mathscr{E}_3 = \mathscr{E}_{3,0} \cup \mathscr{E}_{3,1} \cup \mathscr{E}_{3,2}.$$

Chaque partie de ce problème est indépendante des autres. Pour les questions d'informatique (parties B et D), on utilisera seulement le langage Python et on pourra faire appel aux fonctions des questions précédentes même si elles n'ont pas été écrites.

A) Préliminaires

1. Que valent $\mathrm{card}(\mathscr{E}_1)$ et $\mathrm{card}(\mathscr{E}_2)$?
2. (a) Déterminer $\mathscr{E}_{4,0}$, $\mathscr{E}_{4,1}$, $\mathscr{E}_{4,2}$, $\mathscr{E}_{4,3}$ et $\mathscr{E}_{4,4}$.
   (b) En déduire $\mathrm{card}(\mathscr{E}_4)$.
3. Que valent $\mathrm{card}(\mathscr{E}_{n,0})$, $\mathrm{card}(\mathscr{E}_{n,1})$ et $\mathrm{card}(\mathscr{E}_{n,n})$ lorsque $n \geqslant 2$?
4. Déterminer $\mathrm{card}(\mathscr{E}_{n,2})$ lorsque $n \geqslant 3$. Indication : distinguer plusieurs cas selon les valeurs possibles du plus petit entier de chaque partie appartenant à $\mathscr{E}_{n,2}$.

B) Modélisation informatique

En Python, on modélisera chaque partie de $[\![1,n]\!]$ par la liste de ses éléments. Par exemples, $\{6,3,1,5\}$ sera modélisée par la liste `[6,3,1,5]` et $\emptyset$ par la liste vide `[]`. On rappelle que l'opérateur `+` permet de concaténer des listes. Par exemple, `[2,7,1]+[4]` renvoie `[2,7,1,4]`.

5. (a) Écrire une fonction `chercher` qui prend en arguments une liste d'entiers `L` et un indice `i` compris entre `0` et `len(L)-1`, puis qui renvoie le plus petit indice du plus petit élément de `L` dont l'indice est compris entre `i` et `len(L)-1`. Par exemples, `chercher([3,6,1,5,2,7],3)` renvoie `4` et `chercher([1,2,1,4,1],2)` renvoie `2`.
   (b) Écrire une fonction `trier` qui prend en argument une liste d'entiers `L` puis qui renvoie `L` après avoir trié ses éléments par ordre croissant. Par exemples, `trier([5,3,2,6,3])` renvoie `[2,3,3,5,6]`. Indication : commencer par échanger `L[0]` avec le plus petit élément de `L`, puis `L[1]` avec le plus petit élément dont l'indice est compris entre `1` et `len(L)-1`, puis `L[2]` avec le plus petit élément dont l'indice est compris entre `2` et `len(L)-1`, etc.
6. Écrire une fonction `tester` qui prend en argument une liste d'entiers `L`, puis qui renvoie `True` si `L` contient des entiers deux à deux différents et non consécutifs, et `False` sinon. Par exemples, `tester([8,2,5,2])` et `tester([4,2,1])` renvoient `False` alors que `tester([7,1,9,3])` renvoie `True`. Indication : commencer par trier les éléments de `L` par ordre croissant.
7. On considère la fonction ci-dessous.

```
def mystere(n):
    if n==1:
        return [[],[1]]
    else:
        Pold=mystere(n-1)
        Pnew=[]
        for i in range(len(Pold)):
            L=Pold[i]
            Pnew=Pnew+[L]
            L=L+[n]
            Pnew=Pnew+[L]
        return Pnew
```

(a) Que renvoie `mystere(1)` ?

(b) Montrer que `mystere(2)` renvoie `[[],[2],[1],[1,2]]`.

(c) Que renvoie `mystere(3)` ?

(d) À quoi sert la fonction `mystere` ?

(e) Que renvoie l'instruction `len(mystere(n))` en fonction de l'entier $n \in \mathbb{N}^*$?

(f) En vous inspirant de la fonction `mystere` et à l'aide de la fonction `tester`, écrire une fonction `modeliser` afin que l'instruction `len(modeliser(n))` renvoie la valeur de $\mathrm{card}(\mathscr{E}_n)$.

C) Une expression sommatoire

Dans cette partie, on considère une application Φ définie sur l'ensemble des parties de $[\![1, n]\!]$ de la manière suivante : pour chaque partie $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset [\![1, n]\!]$ dont les éléments sont indicés par ordre croissant, c'est-à-dire $1 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_k \leqslant n$, on pose :

$$\Phi\big(\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}\big) = \{x_1 - 1, x_2 - 2, \ldots, x_k - k\} \quad \text{(et } \Phi(\emptyset) = \emptyset \text{ dans le cas où } k = 0).$$

Par exemples, $\Phi(\{6, 3, 1, 5\}) = \{0, 1, 2\}$ et $\Phi(\{4, 2, 8, 7, 3\}) = \{1, 3\}$.

8. Dans cette question, on fixe $k \in [\![0, n]\!]$ et on note $\mathscr{F}_{n,k}$ l'ensemble des parties de $[\![0, n-k]\!]$ contenant exactement k entiers.
   (a) Soit $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \mathscr{E}_{n,k}$ dont les éléments sont indicés par ordre croissant. Montrer que $\Phi(\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}) \in \mathscr{F}_{n,k}$. Indication : prouver que $0 \leqslant x_1 - 1 < x_2 - 2 < \cdots < x_k - k \leqslant n - k$ en commençant par montrer que $x_i - i < x_{i+1} - (i+1)$ pour chaque $i \in [\![1, k-1]\!]$.
   (b) Soit $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\} \in \mathscr{F}_{n,k}$ dont les éléments sont indicés par ordre croissant. Trouver une partie $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \mathscr{E}_{n,k}$ telle que $\Phi(\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}) = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$. Que peut-on en déduire pour l'application $\Phi : \mathscr{E}_{n,k} \to \mathscr{F}_{n,k}$?
   (c) Montrer que l'application $\Phi : \mathscr{E}_{n,k} \to \mathscr{F}_{n,k}$ est injective.
   (d) En déduire le cardinal de $\mathscr{E}_{n,k}$.
9. Démontrer que :
$$\mathrm{card}\big(\mathscr{E}_n\big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+1}{k}.$$

D) Calcul numérique

Dans cette partie, on suppose le résultat de la question 9.

10. Écrire une fonction `fact` qui prend en argument un entier $m \in \mathbb{N}$, puis qui renvoie la valeur de $m!$.
11. Écrire une fonction `coeffbi` qui prend en arguments deux entiers $j \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$, puis qui renvoie la valeur de $\binom{m}{j}$.
12. Écrire une fonction `cardE` qui prend en argument l'entier $n \in \mathbb{N}^*$, puis qui renvoie la valeur de $\mathrm{card}(\mathscr{E}_n)$.

E) Résolution explicite

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \mathrm{card}(\mathscr{E}_n)$ et on note $\mathscr{A}_n$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}_n$ des parties contenant l'entier n. Ainsi :

$$\mathscr{A}_3 = \big\{\{3\}, \{1, 3\}\big\} \quad \text{et} \quad \overline{\mathscr{A}_3} = \mathscr{E}_3 \setminus \mathscr{A}_3 = \big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}\big\}.$$

13. Dans cette question, on fixe $n \geqslant 3$.
    (a) Justifier que $\mathrm{card}(\mathscr{A}_n) = u_{n-2}$.
    (b) Déterminer une expression similaire pour le cardinal du complémentaire de $\mathscr{A}_n$ dans $\mathscr{E}_n$.
    (c) Montrer que $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.
14. En déduire le terme général de la suite $(\mathrm{card}(\mathscr{E}_n) = u_n)_{n \geqslant 1}$. Pour simplifier les calculs, on pourra poser la constante $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$.

Corrigé du DS n° 4 de mathématiques et d'informatique

Problème

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Ce problème propose de dénombrer l'ensemble $\mathscr{E}_n$ des parties de $[\![1,n]\!] = \{1,2,\ldots,n\}$ ne contenant pas d'entiers consécutifs. Par exemple pour $n=3$, l'ensemble des parties de $[\![1,3]\!]$ est :

$$\mathscr{P}([\![1,3]\!]) = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

ce qui donne $\operatorname{card}(\mathscr{E}_3) = 5$ car les parties $\{1,2\}$, $\{2,3\}$ et $\{1,2,3\}$ contiennent des entiers consécutifs. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on notera $\mathscr{E}_{n,k}$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}_n$ des parties contenant exactement k entiers. Ainsi :

$$\mathscr{E}_{3,0} = \{\emptyset\}, \quad \mathscr{E}_{3,1} = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}, \quad \mathscr{E}_{3,2} = \{\{1,3\}\} \quad \text{et} \quad \mathscr{E}_3 = \mathscr{E}_{3,0} \cup \mathscr{E}_{3,1} \cup \mathscr{E}_{3,2}.$$

Chaque partie de ce problème est indépendante des autres. Pour les questions d'informatique (parties B et D), on utilisera seulement le langage Python et on pourra faire appel aux fonctions des questions précédentes même si elles n'ont pas été écrites.

A) Préliminaires

1. *Que valent $\operatorname{card}(\mathscr{E}_1)$ et $\operatorname{card}(\mathscr{E}_2)$?*

   ▶ L'ensemble des parties de $[\![1,1]\!] = \{1\}$ est $\mathscr{P}(\{1\}) = \{\emptyset,\{1\}\}$ donc $\boxed{\operatorname{card}\mathscr{E}_1 = 2}$ car aucune des deux parties ne contient d'entiers consécutifs. De même, l'ensemble des parties de $[\![1,2]\!] = \{1,2\}$ est $\mathscr{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$ donc $\boxed{\operatorname{card}(\mathscr{E}_2) = 3}$ car $\{1,2\}$ contient des entiers consécutifs.

2. (a) *Déterminer $\mathscr{E}_{4,0}$, $\mathscr{E}_{4,1}$, $\mathscr{E}_{4,2}$, $\mathscr{E}_{4,3}$ et $\mathscr{E}_{4,4}$.*

   ▶ L'ensemble des parties de $[\![1,4]\!] = \{1,2,3,4\}$ est :

$$\mathscr{P}([\![1,4]\!]) = \left\{ \begin{array}{c} \emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}, \\ \{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,3,4\},\{2,3,4\},\{1,2,3,4\} \end{array} \right\}.$$

   Pensez à utiliser le cardinal pour vérifier rapidement que vous n'avez pas oublié une partie. Puisque $\operatorname{card}(\mathscr{P}([\![1,n]\!])) = 2^{\operatorname{card}([\![1,n]\!])} = 2^n$, vous devez obtenir $2^4 = 16$ parties.

   On remarque que les parties $\{1,2\}$, $\{2,3\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$ et $\{1,2,3,4\}$ contiennent des entiers consécutifs. Par conséquent :

$$\boxed{\mathscr{E}_{4,0} = \{\emptyset\}}, \ \boxed{\mathscr{E}_{4,1} = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}}, \ \boxed{\mathscr{E}_{4,2} = \{\{1,3\},\{1,4\},\{2,4\}\}} \text{ et } \boxed{\mathscr{E}_{4,3} = \mathscr{E}_{4,4} = \{\}}.$$

   Attention de ne pas confondre $\{\emptyset\}$ (l'ensemble qui contient une seule partie égale à $\emptyset$) et $\{\} = \emptyset$ (l'ensemble qui ne contient aucune partie).

   (b) *En déduire $\operatorname{card}(\mathscr{E}_4)$.*

   ▶ En sommant le nombre de parties obtenues à la question précédente, on obtient $1+4+3+0+0 = 8$ donc $\boxed{\operatorname{card}(\mathscr{E}_4) = 8}$.

3. *Que valent $\operatorname{card}(\mathscr{E}_{n,0})$, $\operatorname{card}(\mathscr{E}_{n,1})$ et $\operatorname{card}(\mathscr{E}_{n,n})$ lorsque $n \geqslant 2$?*

   ▶ On a $\mathscr{E}_{n,0} = \{\emptyset\}$ car $\emptyset$ est la seule partie contenant zéro entier, donc $\boxed{\operatorname{card}(\mathscr{E}_{n,0}) = 1}$. De même, on a $\mathscr{E}_{n,1} = \{\{1\},\{2\},\ldots,\{n\}\}$ donc $\boxed{\operatorname{card}(\mathscr{E}_{n,1}) = n}$. La seule partie de $[\![1,n]\!]$ contenant n entiers est $\{1,2,\ldots,n\}$ qui contient des entiers consécutifs lorsque $n \geqslant 2$, donc $\boxed{\operatorname{card}(\mathscr{E}_{n,n}) = 0}$.

4. *Déterminer* $\text{card}(\mathscr{E}_{n,2})$ *lorsque* $n \geqslant 3$. *Indication : distinguer plusieurs cas selon les valeurs possibles du plus petit entier de chaque partie appartenant à* $\mathscr{E}_{n,2}$.

▶ Les parties appartenant à $\mathscr{E}_{n,2}$ sont de la forme $\{x, y\}$ où x et y sont deux entiers différents et non consécutifs de $[\![1, n]\!]$. Si on pose x le plus petit de ces deux entiers, on a : $1 \leqslant x < y \leqslant n$ et $y \neq x+1$, c'est-à-dire $x \in [\![1, n-2]\!]$ et $y \in [\![x+2, n]\!]$.

— Si $x = 1$, il y a $\text{card}([\![3, n]\!]) = n-3+1 = n-2$ choix possibles pour y.

— Si $x = 2$, il y a $\text{card}([\![4, n]\!]) = n-4+1 = n-3$ choix possibles pour y.

— Si $x = 3$, il y a $\text{card}([\![5, n]\!]) = n-5+1 = n-4$ choix possibles pour y.

— ...

— Si $x = n-3$, il y a $\text{card}([\![n-1, n]\!]) = n-(n-1)+1 = 2$ choix possibles pour y.

— Si $x = n-2$, il y a $\text{card}([\![n, n]\!]) = n-n+1 = 1$ seul choix possible pour y (qui est $y = n$).

En sommant tous ces choix possibles, on obtient :

$$\begin{aligned}\text{card}\big(\mathscr{E}_{n,2}\big) &= (n-2)+(n-3)+(n-4)+\cdots+2+1 \\ &= \sum_{k=1}^{n-2} k = \boxed{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} \quad \text{en reconnaissant la somme des premiers entiers.}\end{aligned}$$

B) Modélisation informatique

En Python, on modélisera chaque partie de $[\![1, n]\!]$ *par la liste de ses éléments. Par exemples,* $\{6, 3, 1, 5\}$ *sera modélisée par la liste* `[6,3,1,5]` *et* $\emptyset$ *par la liste vide* `[]`. *On rappelle que l'opérateur* `+` *permet de concaténer des listes. Par exemple,* `[2,7,1]+[4]` *renvoie* `[2,7,1,4]`.

5. (a) *Écrire une fonction* `chercher` *qui prend en arguments une liste d'entiers* `L` *et un indice* `i` *compris entre* `0` *et* `len(L)-1`, *puis qui renvoie le plus petit indice du plus petit élément de* `L` *dont l'indice est compris entre* `i` *et* `len(L)-1`. *Par exemples,* `chercher([3,6,1,5,2,7],3)` *renvoie* `4` *et* `chercher([1,2,1,4,1],2)` *renvoie* `2`.

▶ Par exemple :

```
def chercher(L,i):
    imin=i
    for j in range(i,len(L)):
        if L[j]<L[imin]:
            imin=j
    return imin
```

(b) *Écrire une fonction* `trier` *qui prend en argument une liste d'entiers* `L` *puis qui renvoie* `L` *après avoir trié ses éléments par ordre croissant. Par exemples,* `trier([5,3,2,6,3])` *renvoie* `[2,3,3,5,6]`. *Indication : commencer par échanger* `L[0]` *avec le plus petit élément de* `L`, *puis* `L[1]` *avec le plus petit élément dont l'indice est compris entre* `1` *et* `len(L)-1`, *puis* `L[2]` *avec le plus petit élément dont l'indice est compris entre* `2` *et* `len(L)-1`, *etc.*

▶ Par exemple :

```
def trier(L):
    for i in range(len(L)):
        imin=chercher(L,i)
        tmp=L[i]
        L[i]=L[imin]
        L[imin]=tmp
    return L
```

6. *Écrire une fonction* `tester` *qui prend en argument une liste d'entiers* `L`*, puis qui renvoie* `True` *si* `L` *contient des entiers deux à deux différents et non consécutifs, et* `False` *sinon. Par exemples,* `tester([8,2,5,2])` *et* `tester([4,2,1])` *renvoient* `False` *alors que* `tester([7,1,9,3])` *renvoie* `True`*. Indication : commencer par trier les éléments de* `L` *par ordre croissant.*

▶ Par exemple :

```
def tester(L):
    trier(L)
    for i in range(len(L)-1):
        if L[i+1]<L[i]+2:
            return False
    return True
```

On peut remplacer la condition «`if L[i+1]<L[i]+2`*» par «*`if L[i+1]<=L[i]+1`*», ou même par «*`if L[i+1]=L[i] or L[i+1]=L[i]+1`*». Le principe est de renvoyer* `False` *dès que deux entiers sont égaux, c'est-à-dire* `L[i+1]=L[i]`*, ou que deux entiers sont consécutifs, c'est-à-dire* `L[i+1]=L[i]+1`*.*

7. *On considère la fonction ci-dessous.*

```
def mystere(n):
    if n==1:
        return [[],[1]]
    else:
        Pold=mystere(n-1)
        Pnew=[]
        for i in range(len(Pold)):
            L=Pold[i]
            Pnew=Pnew+[L]
            L=L+[n]
            Pnew=Pnew+[L]
        return Pnew
```

(a) *Que renvoie* `mystere(1)` *?*

▶ Lorsque $n = 1$, la condition «`if n==1`» est vérifiée donc `mystere(1)` renvoie `[[],[1]]`.

On reconnaît l'ensemble des parties de $[\![1, 1]\!] = \{1\}$ *car* $\mathscr{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$.

(b) *Montrer que* `mystere(2)` *renvoie* `[[],[2],[1],[1,2]]`.

▶ Lorsque $n = 2$, la condition «`if n==1`» n'est pas vérifiée. Alors la fonction initialise deux listes : `Pold` égale à `mystere(1)` (car $n - 1 = 1$), donc `Pold=[[],[1]]` d'après le résultat de la question précédente, et `Pnew=[]`. Puis la fonction répète des opérations à l'aide d'une boucle `for`. Puisque `Pold` contient deux éléments (la liste vide `[]` et la liste `[1]`), `len(Pold)` est égale à 2, donc la variable `i` prend les valeurs 0 et 1.

— Pour $i = 0$, la fonction initialise la liste `L` égale à `Pold[0]=[]`, ajoute la liste `L=[]` à la liste `Pnew=[]` qui devient donc `Pnew=[[]]`, ajoute $n = 2$ à la liste `L=[]` qui devient donc `L=[2]`, et enfin ajoute la liste `L=[2]` à la liste `Pnew=[[]]` qui devient donc `Pnew=[[],[2]]`.

— Pour $i = 1$, la fonction initialise la liste `L` égale à `Pold[1]=[1]`, ajoute la liste `L=[1]` à la liste `Pnew=[[],[2]]` qui devient donc `Pnew=[[],[2],[1]]`, ajoute $n = 2$ à la liste `L=[1]` qui devient donc `L=[1,2]`, et enfin ajoute la liste `L=[1,2]` à la liste `Pnew=[[],[2],[1]]` qui devient donc `Pnew=[[],[2],[1],[1,2]]`.

Finalement, `mystere(2)` renvoie bien `[[],[2],[1],[1,2]]`.

On reconnaît l'ensemble des parties de $\llbracket 1,2 \rrbracket = \{1,2\}$ car :

$$\mathscr{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}.$$

(c) Que renvoie `mystere(3)` *?*

▶ On raisonne comme à la question précédente. La fonction initialise la liste `Pold` égale à `mystere(2)`, donc `Pold=[[],[2],[1],[1,2]]` d'après le résultat de la question précédente. Puisque `Pold` contient quatre éléments, la variable `i` prend les valeurs 0, 1, 2 et 3.

— Pour $i = 0$, la fonction initialise la liste `L` égale à `Pold[0]=[]`, ajoute la liste `L=[]` à la liste `Pnew=[]` qui devient donc `Pnew=[[]]`, ajoute $n = 3$ à la liste `L=[]` qui devient donc `L=[3]`, et enfin ajoute la liste `L=[3]` à la liste `Pnew=[[]]` qui devient donc `Pnew=[[],[3]]`.

— Pour $i = 1$, la fonction initialise la liste `L` égale à `Pold[1]=[2]`, ajoute la liste `L=[2]` à la liste `Pnew=[[],[3]]` qui devient donc `Pnew=[[],[3],[2]]`, ajoute $n = 3$ à la liste `L=[2]` qui devient donc `L=[2,3]`, et enfin ajoute la liste `L=[2,3]` à la liste `Pnew=[[],[3],[2]]` qui devient donc `Pnew=[[],[3],[2],[2,3]]`.

— Pour $i = 2$, la fonction initialise la liste `L` égale à `Pold[2]=[1]`, ajoute la liste `L=[1]` à la liste `Pnew=[[],[3],[2],[2,3]]` qui devient donc `Pnew=[[],[3],[2],[2,3],[1]]`, ajoute $n = 3$ à la liste `L=[1]` qui devient donc `L=[1,3]`, et enfin ajoute la liste `L=[1,3]` à la liste `Pnew=[[],[3],[2],[2,3],[1]]` qui devient donc `Pnew=[[],[3],[2],[2,3],[1],[1,3]]`.

— De même pour $i = 3$, puisque `Pold[3]=[1,2]`, la fonction ajoute la liste `[1,2]` puis la liste `[1,2,3]` à la liste `Pnew` qui devient donc `Pnew=[[],[3],[2],[2,3],[1],[1,3],[1,2],[1,2,3]]`.

Finalement, `mystere(3)` renvoie $\boxed{\texttt{[[],[3],[2],[2,3],[1],[1,3],[1,2],[1,2,3]]}}$.

On reconnaît l'ensemble des parties de $\llbracket 1,3 \rrbracket = \{1,2,3\}$ car :

$$\mathscr{P}(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

(d) À quoi sert la fonction `mystere` *?*

▶ En généralisant le raisonnement des questions précédentes, `mystere(n)` renvoie une liste modélisant $\boxed{\text{l'ensemble des parties de } \llbracket 1,n \rrbracket}$.

(e) Que renvoie l'instruction `len(mystere(n))` *en fonction de l'entier $n \in \mathbb{N}^*$?*

▶ On sait que :

$$\operatorname{card}\left(\mathscr{P}(\llbracket 1,n \rrbracket)\right) = 2^{\operatorname{card}(\llbracket 1,n \rrbracket)} = 2^n.$$

D'après le résultat de la question précédente, `len(mystere(n))` renvoie donc $\boxed{2^n}$.

Vérifiez la cohérence de vos résultats avec les questions (a), (b) et (c). Par exemple, puisque `mystere(1)` *renvoie* `[[],[1]]` *d'après la question (a), on vérifie bien que* `len(mystere(1))` *est égale à $2 = 2^1$.*

(f) En vous inspirant de la fonction `mystere` *et à l'aide de la fonction* `tester`*, écrire une fonction* `modeliser` *afin que l'instruction* `len(modeliser(n))` *renvoie la valeur de $\operatorname{card}(\mathscr{E}_n)$.*

▶ Par exemple :

```
def modeliser(n):
    if n==1:
        return [[],[1]]
    else:
        Pold=modeliser(n-1)
        Pnew=[]
        for i in range(len(Pold)):
            L=Pold[i]
            Pnew=Pnew+[L]
            L=L+[n]
            if tester(L):
                Pnew=Pnew+[L]
        return Pnew
```

C) Une expression sommatoire

Dans cette partie, on considère une application Φ définie sur l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$ de la manière suivante : pour chaque partie $\{x_1,x_2,\dots,x_k\} \subset [\![1,n]\!]$ dont les éléments sont indicés par ordre croissant, c'est-à-dire $1 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_k \leqslant n$, on pose :

$$\Phi\big(\{x_1,x_2,\dots,x_k\}\big) = \{x_1-1, x_2-2, \dots, x_k-k\} \quad (\text{et } \Phi(\emptyset)=\emptyset \text{ dans le cas où } k=0).$$

Par exemples, $\Phi(\{6,3,1,5\}) = \{0,1,2\}$ et $\Phi(\{4,2,8,7,3\}) = \{1,3\}$.

8. *Dans cette question, on fixe $k \in [\![0,n]\!]$ et on note $\mathscr{F}_{n,k}$ l'ensemble des parties de $[\![0,n-k]\!]$ contenant exactement k entiers.*

   (a) *Soit $\{x_1,x_2,\dots,x_k\} \in \mathscr{E}_{n,k}$ dont les éléments sont indicés par ordre croissant. Montrer que $\Phi(\{x_1,x_2,\dots,x_k\}) \in \mathscr{F}_{n,k}$. Indication : prouver que $0 \leqslant x_1-1 < x_2-2 < \cdots < x_k-k \leqslant n-k$ en commençant par montrer que $x_i - i < x_{i+1}-(i+1)$ pour chaque $i \in [\![1,k-1]\!]$.*

   ► Soit $i \in [\![1,k-1]\!]$. On sait que $x_i < x_{i+1}$ car les éléments de $\{x_1,x_2,\dots,x_k\}$ sont indicés par ordre croissant, et que $x_{i+1} \neq x_i+1$ car les entiers x_i et x_{i+1} ne sont pas consécutifs. On en déduit que $x_i < x_{i+1}-1$ puis en soustrayant par i de chaque côté de l'inégalité : $x_i - i < x_{i+1}-(i+1)$. Puisque ceci est vrai pour tout $i \in [\![1,k-1]\!]$, on a montré que :

   $$x_1-1 < x_2-2 < \cdots < x_k-k.$$

   De plus, $x_1-1 \geqslant 0$ car $x_1 \geqslant 1$ et $x_k-k \leqslant n-k$ car $x_k \leqslant n$. Finalement, on a montré que :

   $$0 \leqslant x_1-1 < x_2-2 < \cdots < x_k-k \leqslant n-k.$$

   On en déduit que $\Phi(\{x_1,x_2,\dots,x_k\}) = \{x_1-1,x_2-2,\dots,x_k-k\}$ contient exactement k entiers appartenant à $[\![0,n-k]\!]$, et donc que $\boxed{\Phi(\{x_1,x_2,\dots,x_k\}) \in \mathscr{F}_{n,k}}$.

   Les inégalités strictes sont essentielles ici. Avec des inégalités larges, on montrerait seulement que $\Phi(\{x_1,x_2,\dots,x_k\}$ est une partie de $[\![0,n-k]\!]$ contenant au plus k entiers (certains pouvant être égaux). Il est donc nécessaire d'utiliser que $\{x_1,x_2,\dots,x_k\}$ ne contient pas d'entiers consécutifs.

   (b) *Soit $\{y_1,y_2,\dots,y_k\} \in \mathscr{F}_{n,k}$ dont les éléments sont indicés par ordre croissant. Trouver une partie $\{x_1,x_2,\dots,x_k\} \in \mathscr{E}_{n,k}$ telle que $\Phi(\{x_1,x_2,\dots,x_k\}) = \{y_1,y_2,\dots,y_k\}$. Que peut-on en déduire pour l'application $\Phi : \mathscr{E}_{n,k} \to \mathscr{F}_{n,k}$?*

   ► On raisonne par analyse-synthèse.
   Analyse. On cherche $\{x_1,x_2,\dots,x_k\} \in \mathscr{E}_{n,k}$ telle que $\Phi(\{x_1,x_2,\dots,x_k\}) = \{y_1,y_2,\dots,y_k\}$. Or on sait que $\Phi(\{x_1,x_2,\dots,x_k\}) = \{x_1-1,x_2-2,\dots,x_k-k\}$. Il suffit donc que :

   $$\begin{cases} x_1-1 = y_1 \\ x_2-2 = y_2 \\ \quad\dots \\ x_k-k = y_k \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = y_1+1 \\ x_2 = y_2+2 \\ \dots \\ x_k = y_k+k. \end{cases}$$

Synthèse. On pose $\boxed{x_i = y_i + i}$ pour tout $i \in [\![1,k]\!]$. Vérifions que $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \in \mathscr{E}_{n,k}$.

Attention : on a seulement prouvé que $\Phi(\{x_1, x_2, \dots, x_k\}) = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ dans l'analyse, mais il faut vérifier que $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \in \mathscr{E}_{n,k}$ pour répondre à la question de l'énoncé.

Soit $i \in [\![1, k-1]\!]$. On sait que $y_i < y_{i+1}$ car les éléments de $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ sont indicés par ordre croissant. En additionnant par i de chaque côté de l'inégalité, on obtient que : $y_i + i < y_{i+1} + i + 1 - 1$, donc que $x_i < x_{i+1} - 1$. Par conséquent, $x_i < x_{i+1}$ et $x_{i+1} \neq x_i + 1$. Puisque ceci est vrai pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, on a montré que :

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_k \quad \text{et} \quad \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \text{ ne contient pas d'entiers consécutifs.}$$

De plus, $x_1 = y_1 + 1 \geqslant 1$ car $y_1 \geqslant 0$ et $x_k = y_k + k \leqslant n - k + k = n$ car $y_k \leqslant n - k$. Finalement, on a montré que :

$$1 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_k \leqslant n \quad \text{et} \quad \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \text{ ne contient pas d'entiers consécutifs.}$$

On en déduit bien que $\boxed{\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \in \mathscr{E}_{n,k}}$. De plus, $\boxed{\Phi(\{x_1, x_2, \dots, x_k\}) = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}}$ d'après les calculs de l'analyse. Autrement dit, pour toute partie appartenant à $\mathscr{F}_{n,k}$, on a trouvé au moins un antécédent par Φ appartenant à $\mathscr{E}_{n,k}$. On en déduit que $\boxed{\Phi : \mathscr{E}_{n,k} \to \mathscr{F}_{n,k} \text{ est surjective}}$.

(c) *Montrer que l'application $\Phi : \mathscr{E}_{n,k} \to \mathscr{F}_{n,k}$ est injective.*

► Soient $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \in \mathscr{E}_{n,k}$ et $\{x'_1, x'_2, \dots, x'_k\} \in \mathscr{E}_{n,k}$ dont les éléments sont indicés par ordre croissant. On suppose que $\Phi(\{x_1, x_2, \dots, x_k\}) = \Phi(\{x'_1, x'_2, \dots, x'_k\})$. Montrons que $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_k\}$. On sait que $\Phi(\{x_1, x_2, \dots, x_k\}) = \{x_1 - 1, x_2 - 2, \dots, x_k - k\}$ et $\Phi(\{x'_1, x'_2, \dots, x'_k\}) = \{x'_1 - 1, x'_2 - 2, \dots, x'_k - k\}$. Puisqu'on a supposé que $\Phi(\{x_1, x_2, \dots, x_k\}) = \Phi(\{x'_1, x'_2, \dots, x'_k\})$, on en déduit que $\{x_1 - 1, x_2 - 2, \dots, x_k - k\} = \{x'_1 - 1, x'_2 - 2, \dots, x'_k - k\}$. Par conséquent :

$$\begin{cases} x_1 - 1 = x'_1 - 1 \\ x_2 - 2 = x'_2 - 2 \\ \quad \dots \\ x_k - k = x'_k - k \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x_1 = x'_1 \\ x_2 = x'_2 \\ \dots \\ x_k = x'_k. \end{cases}$$

On a bien montré que $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_k\}$. Autrement dit, on a montré par l'absurde que toute partie appartenant à $\mathscr{F}_{n,k}$ admet au plus un antécédent par Φ appartenant à $\mathscr{E}_{n,k}$. On en déduit bien que $\boxed{\Phi : \mathscr{E}_{n,k} \to \mathscr{F}_{n,k} \text{ est injective}}$.

(d) *En déduire le cardinal de $\mathscr{E}_{n,k}$.*

► D'après les résultats des questions précédentes, l'application $\Phi : \mathscr{E}_{n,k} \to \mathscr{F}_{n,k}$ est injective et surjective, donc bijective. On en déduit que $\mathrm{card}(\mathscr{E}_{n,k}) = \mathrm{card}(\mathscr{F}_{n,k})$. Or, $\mathscr{F}_{n,k}$ est l'ensemble des parties de $[\![0, n-k]\!]$ contenant exactement k entiers, c'est-à-dire l'ensemble des k-combinaisons d'éléments de $[\![0, n-k]\!]$. Par conséquent, il y en a :

$$\mathrm{card}\big(\mathscr{E}_{n,k}\big) = \mathrm{card}\big(\mathscr{F}_{n,k}\big) = \binom{\mathrm{card}\big([\![0, n-k]\!]\big)}{k} = \boxed{\binom{n-k+1}{k}}.$$

9. *Démontrer que :*

$$\mathrm{card}\big(\mathscr{E}_n\big) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+1}{k}.$$

► D'après l'énoncé, on a $\mathscr{E}_n = \mathscr{E}_{n,0} \cup \mathscr{E}_{n,1} \cup \mathscr{E}_{n,2} \cup \cdots \cup \mathscr{E}_{n,n} = \bigcup_{k=0}^{n} \mathscr{E}_{n,k}$. De plus, les sous-ensembles $\mathscr{E}_{n,0}, \mathscr{E}_{n,1}, \mathscr{E}_{n,2}, \dots, \mathscr{E}_{n,n}$ sont deux à deux disjoints (car une partie de $[\![1, n]\!]$ ne contient qu'un nombre fixé d'entiers). Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}(\mathscr{E}_n) &= \operatorname{card}\left(\bigcup_{k=0}^{n} \mathscr{E}_{n,k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \operatorname{card}(\mathscr{E}_{n,k}) \quad \text{car les sous-ensembles sont deux à deux disjoints} \\
&= \boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k+1}{k}} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente.}
\end{aligned}$$

N'oubliez pas de préciser que les ensembles sont deux à deux disjoints pour pouvoir utiliser la propriété que le cardinal d'une union est égal à la somme des cardinaux (cette propriété est fausse en général).

D) Calcul numérique

Dans cette partie, on suppose le résultat de la question 9.

10. *Écrire une fonction* `fact` *qui prend en argument un entier $m \in \mathbb{N}$, puis qui renvoie la valeur de $m!$.*

▶ Par exemple :

```
def fact(m):
    P=1
    for i in range(1,m+1):
        P=P*i
    return P
```

11. *Écrire une fonction* `coeffbi` *qui prend en arguments deux entiers $j \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}$, puis qui renvoie la valeur de $\binom{m}{j}$.*

▶ Par exemple :

```
def coeffbi(j,m):
    if j<0 or j>m:
        return 0
    else:
        return fact(m)/(fact(j)*fact(m-j))
```

N'oubliez pas de distinguer les cas où $j \notin [\![0, m]\!]$ pour éviter les erreurs dans la question suivante.

12. *Écrire une fonction* `cardE` *qui prend en argument l'entier $n \in \mathbb{N}^*$, puis qui renvoie la valeur de $\operatorname{card}(\mathscr{E}_n)$.*

▶ Par exemple :

```
def cardE(n):
    S=0
    for k in range(n+1):
        S=S+coeffbi(k,n-k+1)
    return S
```

Remarquez que pour les dernières valeurs de k (par exemple pour $k = n$), on a $k > n-k+1$ et donc $\binom{n-k+1}{k} = 0$. Ainsi, il faut bien distinguer ce cas dans la question précédente pour éviter les erreurs.

E) Résolution explicite

Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \mathrm{card}(\mathscr{E}_n)$ et on note $\mathscr{A}_n$ le sous-ensemble de $\mathscr{E}_n$ des parties contenant l'entier n. Ainsi :

$$\mathscr{A}_3 = \big\{\{3\},\{1,3\}\big\} \quad \text{et} \quad \overline{\mathscr{A}_3} = \mathscr{E}_3 \setminus \mathscr{A}_3 = \big\{\emptyset,\{1\},\{2\}\big\}.$$

13. *Dans cette question, on fixe $n \geqslant 3$.*

   (a) *Justifier que $\mathrm{card}(\mathscr{A}_n) = u_{n-2}$.*

   ▶ Les parties appartenant à $\mathscr{A}_n$ sont de la forme $\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k = n\}$ où :

$$1 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k = n \leqslant n.$$

   Puisque x_{k-1} et $x_k = n$ ne sont pas consécutifs, on sait que $x_k = n \neq x_{k-1} + 1$, donc que $x_{k-1} < n - 1$. Par conséquent :

$$1 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} \leqslant n - 2.$$

   On en déduit que $\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}$ est une partie de $[\![1, n-2]\!]$ ne contenant pas d'entiers consécutifs, c'est-à-dire $\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\} \in \mathscr{E}_{n-2}$. Finalement, chaque partie appartenant à $\mathscr{A}_n$ est de la forme :

$$\underbrace{\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k = n\}}_{\in \mathscr{A}_n} = \underbrace{\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}}_{\in \mathscr{E}_{n-2}} \cup \{n\}.$$

   Il y a donc autant de parties appartenant à $\mathscr{A}_n$ que de parties appartenant à $\mathscr{E}_{n-2}$, par conséquent :

$$\boxed{\mathrm{card}\big(\mathscr{A}_n\big) = \mathrm{card}(\mathscr{E}_{n-2}) = u_{n-2}}.$$

   (b) *Déterminer une expression similaire pour le cardinal du complémentaire de $\mathscr{A}_n$ dans $\mathscr{E}_n$.*

   ▶ Les parties de $\overline{\mathscr{A}_n} = \mathscr{E}_n \setminus \mathscr{A}_n$ sont de la forme $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ où :

$$1 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_k \leqslant n.$$

   Puisque $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ ne contient pas l'entier n, on sait que $x_k \neq n$, donc que $x_k < n$. Par conséquent :

$$1 \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_k \leqslant n - 1.$$

   On en déduit que $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ est une partie de $[\![1, n-1]\!]$ ne contenant pas d'entiers consécutifs, c'est-à-dire $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \in \mathscr{E}_{n-1}$. Il y a donc autant de parties appartenant à $\overline{\mathscr{A}_n}$ que de parties appartenant à $\mathscr{E}_{n-1}$, par conséquent :

$$\boxed{\mathrm{card}\big(\overline{\mathscr{A}_n}\big) = \mathrm{card}\big(\mathscr{E}_{n-1}\big) = u_{n-1}}.$$

   (c) *Montrer que $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.*

   ▶ On a par définition du complémentaire :

$$\mathscr{E}_n = \mathscr{A}_n \cup \overline{\mathscr{A}_n} \quad \text{et} \quad \mathscr{A}_n \cap \overline{\mathscr{A}_n} = \emptyset.$$

   Par conséquent :

$$\begin{aligned} u_n &= \mathrm{card}\big(\mathscr{E}_n\big) \\ &= \mathrm{card}\big(\mathscr{A}_n \cup \overline{\mathscr{A}_n}\big) \\ &= \mathrm{card}\big(\mathscr{A}_n\big) + \mathrm{card}\big(\overline{\mathscr{A}_n}\big) \quad \text{car } \mathscr{A}_n \cap \overline{\mathscr{A}_n} = \emptyset \\ &= u_{n-2} + u_{n-1} \quad \text{d'après les résultats des questions précédentes.} \end{aligned}$$

   On a bien montré que $\boxed{u_n = u_{n-1} + u_{n-2}}$.

14. En déduire le terme général de la suite $(\mathrm{card}(\mathscr{E}_n) = u_n)_{n\geqslant 1}$*. Pour simplifier les calculs, on pourra poser la constante* $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$*.*

► Quitte à faire un décalage d'indice, on a montré à la question précédente que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre deux d'équation caractéristique :

$$q^2 = q+1 \iff q^2 - q - 1 = 0.$$

On reconnaît une équation de degré deux à coefficients réels dont le discriminant est égal à :

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0.$$

L'équation caractéristique admet donc deux solutions réelles distinctes :

$$q_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{\Delta}}{2\times 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1-\varphi.$$

Pensez à utiliser la somme des solutions (égale à $q_1 + q_2 = -(-1) = 1$*) ou le produit des solutions (égal à* $q_1 q_2 = -1$*) pour simplifier l'expression de la deuxième solution :* $q_2 = 1 - q_1 = -1/q_1$*.*

On sait qu'il existe deux constantes $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \lambda_1 q_1^{n-1} + \lambda_2 q_2^{n-1} = \lambda_1 \varphi^{n-1} + \lambda_2 (1-\varphi)^{n-1}.$$

De plus, on sait d'après la question 1 que :

$$u_1 = \mathrm{card}\big(\mathscr{E}_1\big) = 2 \quad \text{et} \quad u_2 = \mathrm{card}\big(\mathscr{E}_2\big) = 3.$$

Donc :

$$\begin{cases} 2 = u_1 = \lambda_1 \underbrace{\varphi^{1-1}}_{=\varphi^0=1} + \lambda_2 \underbrace{(1-\varphi)^{1-1}}_{=(1-\varphi)^0=1} = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 3 = u_2 = \lambda_1 \underbrace{\varphi^{2-1}}_{=\varphi^1=\varphi} + \lambda_2 \underbrace{(1-\varphi)^{2-1}}_{=(1-\varphi)^1=1-\varphi} = \lambda_1\varphi + \lambda_2(1-\varphi) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = 2 - \lambda_2 \\ 3 = (2-\lambda_2)\varphi + \lambda_2(1-\varphi) = 2\varphi + \lambda_2(1-2\varphi) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda_2 = \dfrac{3-2\varphi}{1-2\varphi} \\ \lambda_1 = 2 - \dfrac{3-2\varphi}{1-2\varphi} = \dfrac{-1-2\varphi}{1-2\varphi} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \lambda_2 = \dfrac{2-\sqrt{5}}{-\sqrt{5}} = 1 - \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ \lambda_1 = \dfrac{-2-\sqrt{5}}{-\sqrt{5}} = 1 + \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{cases} \quad \text{car } \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Finalement, on obtient que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \mathrm{card}\big(\mathscr{E}_n\big) = u_n = \boxed{\left(1+\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(1-\frac{2}{5}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}.$$

DS n° 5 de mathématiques

durée : 3 heures

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ une matrice colonne d'inconnues. Résoudre le système linéaire $AX = \lambda X$ en fonction des valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3 + x + 2}$.

1. Étudier la fonction $g : x \mapsto x^3 + x + 2$ et en déduire que f admet des primitives sur $]-1, +\infty[$.
2. À l'aide d'un système linéaire, trouver trois constantes $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3$ telles que :
$$\forall x > -1, \quad f(x) = \mu_1 \left(\frac{1}{x+1}\right) + \mu_2 \left(\frac{2x-1}{x^2 - x + 2}\right) + \mu_3 \left(\frac{1}{x^2 - x + 2}\right).$$
3. Déterminer les primitives des fonctions $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ et $f_2 : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x^2 - x + 2}$ sur $]-1, +\infty[$.
4. Pour cette question, on fixe un réel $x > -1$.
   (a) Écrire l'expression $x^2 - x + 2$ sous la forme $\gamma\big((\alpha x + \beta)^2 + 1\big)$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ sont trois constantes à déterminer.
   (b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - t + 2}$ à l'aide du changement de variable $s = \alpha t + \beta$.
5. Déduire des résultats précédents la forme des primitives de f sur $]-1, +\infty[$.

Exercice 3

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer M^2 et M^3.
2. À l'aide d'un système linéaire, trouver trois constantes $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ telles que $P(M) = 0_3$ où P est la fonction polynomiale $P : x \mapsto x^3 + ax^2 + bx + c$.
3. En déduire que M est inversible et calculer son inverse.

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_0^1 x^n e^{1-x} \mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
3. En déduire que $I_n = e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé du DS n° 5 de mathématiques

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *et on pose* $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ *une matrice colonne d'inconnues. Résoudre le système linéaire* $AX = \lambda X$ *en fonction des valeurs du paramètre* $\lambda \in \mathbb{R}$.

▶ On a :

$$\begin{aligned}
AX = \lambda X &\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} y+z \\ -2x+3y+2z \\ 2x-2y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} \quad \text{par calcul matriciel} \\
&\iff \begin{cases} y+z = \lambda x \\ -2x+3y+2z = \lambda y \\ 2x-2y-z = \lambda z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -\lambda x & +y & +z = 0 \\ -2x & +(3-\lambda)y & +2z = 0 \\ 2x & -2y & -(1+\lambda)z = 0 \end{cases} .
\end{aligned}$$

On reconnaît un système linéaire homogène, donc $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ est une solution évidente, qu'on va échelonner à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{aligned}
AX = \lambda X &\iff \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -2 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & -2 & -(1+\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_1 \\ \end{matrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & 3-\lambda & 2 \\ -\lambda & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -(1+\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - \lambda L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & 3-\lambda & 2 \\ 0 & * & 2-2\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &\text{où} \quad * = 2 - \lambda(3-\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \\ &\qquad\quad = (\lambda-1)(\lambda-2) = (1-\lambda)(2-\lambda) \\ &\text{car 1 et 2 sont racines évidentes} \end{aligned} \\
&\iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & (1-\lambda)(2-\lambda) & 2(1-\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{après } L_2 \leftrightarrow L_3.
\end{aligned}$$

On raisonne par disjonction de cas.
<u>1er cas :</u> $1 - \lambda = 0 \iff \boxed{\lambda = 1}$. Alors :

$$AX = \lambda X \iff \begin{pmatrix} \boxed{-2} & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = y + z.$$

On obtient un système linéaire homogène échelonné de $\boxed{\text{rang } 1}$ qui admet une infinité de solutions de la forme : $(x, y, z) = (y + z, y, z)$ où $(y, z) \in \mathbb{R}^2$ sont quelconques.

2$^{\text{e}}$ cas : $\boxed{\lambda \neq 1}$. Puisque $1-\lambda \neq 0$, on peut simplifier par $1-\lambda$ dans les lignes L_2 et L_3 à l'aide des opérations $L_2 \leftarrow \frac{1}{1-\lambda}L_2$ et $L_3 \leftarrow \frac{1}{1-\lambda}L_3$. On a alors :

$$\begin{aligned} AX = \lambda X \iff & \begin{pmatrix} \boxed{-2} & 3-\lambda & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - (2-\lambda)L_2 \\ \iff & \begin{pmatrix} \boxed{-2} & 3-\lambda & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1$^{\text{er}}$ sous-cas : $\boxed{\lambda \neq 0}$. On obtient un système linéaire échelonné de $\boxed{\text{rang 3 maximal}}$ qui admet pour unique solution la solution évidente $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.
2$^{\text{e}}$ sous-cas : $\boxed{\lambda = 0}$. On obtient un système linéaire échelonné de $\boxed{\text{rang 2}}$ qui admet une infinité de solutions qu'on peut exprimer en fonction de l'inconnue auxiliaire z :

$$AX = \lambda X \iff \begin{cases} y + z = 0 \\ -2x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -z \\ x = \dfrac{1}{2}(3y + 2z) = \dfrac{-z}{2} \end{cases}.$$

Conclusion. Finalement, l'ensemble des $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ solutions de $AX = \lambda X$ est égal à :

$$\boxed{\begin{cases} \big\{(-z/2, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\big\} & \text{si } \lambda = 0 \\ \big\{(0, 0, 0)\big\} & \text{si } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \\ \big\{(y + z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\big\} & \text{si } \lambda = 1 \end{cases}}.$$

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3 + x + 2}$.

1. *Étudier la fonction $g : x \mapsto x^3 + x + 2$ et en déduire que f admet des primitives sur $]-1, +\infty[$.*

   ▶ La fonction $g : x \mapsto x^3 + x + 2$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale. On a :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = 3x^2 + 1 \geqslant 1 > 0 \quad \text{car } x^2 \geqslant 0.$$

   On en déduit que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

   On remarque que $g(-1) = (-1)^3 - 1 + 2 = 0$, donc g est strictement positive sur $]-1, +\infty[$. Par conséquent, f est continue sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ comme inverse d'une fonction continue (car dérivable) qui ne s'annule pas. On en déduit que $\boxed{f \text{ admet des primitives sur }]-1, +\infty[}$.

2. *À l'aide d'un système linéaire, trouver trois constantes $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3$ telles que :*

   $$\forall x > -1, \quad f(x) = \mu_1 \left(\frac{1}{x+1}\right) + \mu_2 \left(\frac{2x-1}{x^2 - x + 2}\right) + \mu_3 \left(\frac{1}{x^2 - x + 2}\right).$$

▶ On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse. On cherche trois constantes $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}^3$ telles que :

$$\forall x > -1, \quad \frac{1}{x^3+x+2} = \mu_1\left(\frac{1}{x+1}\right) + \mu_2\left(\frac{2x-1}{x^2-x+2}\right) + \mu_3\left(\frac{1}{x^2-x+2}\right)$$

$$= \frac{\mu_1(x^2-x+2) + \mu_2 \overbrace{(2x-1)(x+1)}^{=2x^2+x-1} + \mu_3(x+1)}{(x+1)(x^2-x+2)}$$

$$= \frac{(\mu_1+2\mu_2)x^2 + (-\mu_1+\mu_2+\mu_3)x + (2\mu_1-\mu_2+\mu_3)}{x^3+x+2}.$$

En multipliant par x^3+x+2 de chaque côté, on veut donc que :

$$\forall x > -1, \quad 0x^2+0x+1 = (\mu_1+2\mu_2)x^2 + (-\mu_1+\mu_2+\mu_3)x + (2\mu_1-\mu_2+\mu_3).$$

En identifiant les coefficients de polynômes de degré 2, on obtient le système linéaire suivant qu'on échelonne à l'aide de la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} \mu_1+2\mu_2 = 0 \\ -\mu_1+\mu_2+\mu_3 = 0 \\ 2\mu_1-\mu_2+\mu_3 = 1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow 3L_3 + 5L_2$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On obtient un système linéaire échelonné de $\boxed{\text{rang 3 maximal}}$ qui admet une unique solution :

$$\begin{cases} 8\mu_3 = 3 \\ 3\mu_2+\mu_3 = 0 \\ \mu_1+2\mu_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu_3 = 3/8 \\ \mu_2 = -\mu_3/3 = -1/8 \\ \mu_1 = -2\mu_2 = 1/4 \end{cases}.$$

Synthèse. On pose $\boxed{\mu_1 = \frac{1}{4}}$, $\boxed{\mu_2 = \frac{-1}{8}}$ et $\boxed{\mu_3 = \frac{3}{8}}$. D'après les calculs de l'analyse, on a bien :

$$\forall x > -1, \quad f(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{2x-1}{x^2-x+2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{x^2-x+2}\right).$$

3. *Déterminer les primitives des fonctions $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ et $f_2 : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x^2-x+2}$ sur $]-1, +\infty[$.*

▶ On reconnaît des fonctions de la forme $\dfrac{u'}{u}$ qui est la dérivée usuelle de $\ln|u|$.

— Pour f_1, on pose $u : x \mapsto x+1$ (donc $u' : x \mapsto 1$). Puisque $x+1 > 0$ pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on en déduit que les primitives de f_1 sur $]-1, +\infty[$ sont toutes de la forme :

$$\boxed{F_1 : x \mapsto \ln(x+1) + C_1 \quad \text{où } C_1 \in \mathbb{R} \text{ est une constante quelconque}}.$$

— Pour f_2, on pose $u : x \mapsto x^2-x+2$ (donc $u' : x \mapsto 2x-1$). On reconnaît un polynôme de degré 2 de discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -7 < 0$. Donc $x^2-x+2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que les primitives de f_2 sur $]-1, +\infty[$ sont toutes de la forme :

$$\boxed{F_2 : x \mapsto \ln(x^2-x+2) + C_2 \quad \text{où } C_2 \in \mathbb{R} \text{ est une constante quelconque}}.$$

N'oubliez pas de vérifier que $u(x) > 0$ pour tout $x \in]-1,+\infty[$ afin de justifier la disparition des valeurs absolues.

4. *Pour cette question, on fixe un réel $x > -1$.*

   (a) *Écrire l'expression $x^2 - x + 2$ sous la forme $\gamma\big((\alpha x + \beta)^2 + 1\big)$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ sont trois constantes à déterminer.*

   ▶ On utilise la forme canonique des polynômes de degré 2 :

$$x^2 - x + 2 = \underbrace{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}_{=x^2-x+\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$
$$= \frac{7}{4}\left(\frac{4}{7}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 1\right) = \frac{7}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)^2 + 1\right)$$
$$= \frac{7}{4}\left(\left(\frac{2}{\sqrt{7}}x - \frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 + 1\right).$$

   Il suffit donc de poser $\boxed{\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}}$, $\boxed{\beta = \frac{-1}{\sqrt{7}}}$ et $\boxed{\gamma = \frac{7}{4}}$.

   (b) *Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - t + 2}$ à l'aide du changement de variable $s = \alpha t + \beta$.*

   ▶ D'après le résultat de la question précédente, on utilise le changement de variable :

$$s = \alpha t + \beta = \frac{2}{\sqrt{7}}t - \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{2t - 1}{\sqrt{7}} \iff t = \frac{\sqrt{7}s + 1}{2} = \varphi(s).$$

   On commence par vérifier les hypothèses du théorème de changement de variable dans une intégrale.

   — la fonction $\varphi : s \mapsto (\sqrt{7}s + 1)/2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale ;
   — si $t = 0$ alors $s = -1/\sqrt{7}$, et si $t = x$ alors $s = (2x - 1)/\sqrt{7}$;
   — $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}\varphi(s)}{\mathrm{d}s} = \varphi'(s) = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ donc $\mathrm{d}t = \dfrac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{d}s$.

   De plus, on a d'après le résultat de la question précédente :

$$t^2 - t + 2 = \gamma\big((\alpha t + \beta)^2 + 1\big) = \frac{7}{4}\big(s^2 + 1\big).$$

On peut aussi retrouver ce résultat par le calcul :

$$t^2 - t + 2 = \left(\frac{\sqrt{7}s + 1}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{7}s + 1}{2} + 2$$
$$= \frac{1}{4}\left(7s^2 + 2\sqrt{7}s + 1 - 2\left(\sqrt{7}s + 1\right) + 4 \times 2\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(7s^2 + 7\right) = \frac{7}{4}\left(s^2 + 1\right).$$

C'est plus long, mais ça permet de vérifier les calculs de la question précédente.

Par conséquent, on a en appliquant le théorème de changement de variable dans une intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+2} &= \int_{-1/\sqrt{7}}^{(2x-1)/\sqrt{7}} \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{d}s}{\frac{7}{4}(s^2+1)} \\
&= \frac{2\sqrt{7}}{7}\int_{-1/\sqrt{7}}^{(2x-1)/\sqrt{7}} \frac{\mathrm{d}s}{s^2+1} \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \frac{2\sqrt{7}}{7}\Big[\arctan(s)\Big]_{-1/\sqrt{7}}^{(2x-1)/\sqrt{7}} \quad \text{en reconnaissant la dérivée de arctangente} \\
&= \boxed{\frac{2\sqrt{7}}{7}\left(\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)-\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{7}}\right)\right)}.
\end{aligned}$$

5. *Déduire des résultats précédents la forme des primitives de f sur $]-1,+\infty[$.*

► On sait que f admet une infinité de primitives sur $]-1,+\infty[$ d'après le résultat de la question 1. On note F_0 l'unique primitive de f sur $]-1,+\infty[$ qui s'annule en 0. D'après le théorème fondamental de l'analyse, on sait que :

$$\begin{aligned}
\forall x>-1,\quad F_0(x) &= \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^3+t+2} \\
&= \int_0^x \left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t+1}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{2t-1}{t^2-t+2}\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{1}{t^2-t+2}\right)\right)\mathrm{d}t \quad \text{d'après le résultat de la question 2} \\
&= \frac{1}{4}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t+1}-\frac{1}{8}\int_0^x \frac{2t-1}{t^2-t+2}\mathrm{d}t+\frac{3}{8}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2-t+2} \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \frac{1}{4}\Big[\ln(t+1)\Big]_0^x-\frac{1}{8}\Big[\ln(t^2-t+2)\Big] \quad \text{d'après les résultats de la question 3} \\
&\quad +\frac{3}{8}\times\frac{2\sqrt{7}}{7}\left(\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)-\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{7}}\right)\right) \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= \frac{1}{4}\big(\ln(x+1)-\underbrace{\ln(1)}_{=0}\big)-\frac{1}{8}\big(\ln(x^2-x+2)-\ln(2)\big) \\
&\quad +\frac{3\sqrt{7}}{28}\left(\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)-\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{7}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\ln(x+1)-\frac{1}{8}\ln(x^2-x+2)+\frac{3\sqrt{7}}{28}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right) \\
&\quad +\underbrace{\frac{\ln(2)}{8}-\frac{3\sqrt{7}}{28}\arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{7}}\right)}_{\text{constante}}.
\end{aligned}$$

Finalement, on en déduit que les primitives de f sur $]-1,+\infty[$ sont toutes de la forme :

$$\boxed{\begin{gathered}F : x\mapsto \frac{1}{4}\ln(x+1)-\frac{1}{8}\ln(x^2-x+2)+\frac{3\sqrt{7}}{28}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)+C \\ \text{où } C\in\mathbb{R} \text{ est un constante quelconque}\end{gathered}}.$$

Exercice 3

On considère la matrice $M=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ -4 & 1 & 4\\ 2 & 0 & -4\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. *Calculer M^2 et M^3.*

▶ On a par définition du produit matriciel :

$$M^2 = MM = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 8 & 1 & -8 \\ -10 & 0 & 14 \end{pmatrix}},$$

$$\text{et} \quad M^3 = MM^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 8 & 1 & -8 \\ -10 & 0 & 14 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 11 & 0 & -19 \\ -28 & 1 & 28 \\ 38 & 0 & -46 \end{pmatrix}}.$$

2. *À l'aide d'un système linéaire, trouver trois constantes $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ telles que $P(M) = 0_3$ où P est la fonction polynomiale $P : x \mapsto x^3 + ax^2 + bx + c$.*

▶ On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse. On cherche trois constantes $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ telles que $P(M) = 0_3$. Or :

$$\begin{aligned} P(M) &= M^3 + aM^2 + bM + cI_3 \\ &= \begin{pmatrix} 11 & 0 & -19 \\ -28 & 1 & 28 \\ 38 & 0 & -46 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 8 & 1 & -8 \\ -10 & 0 & 14 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{d'après les résultats de la question précédente} \\ &= \begin{pmatrix} 11 - a - b + c & 0 & -19 + 5a - b \\ -28 + 8a - 4b & 1 + a + b + c & 28 - 8a + 4b \\ 38 - 10a + 2b & 0 & -46 + 14a - 4b + c \end{pmatrix} \quad \text{par calcul matriciel.} \end{aligned}$$

En identifiant avec les coefficients de la matrice nulle 0_3, on obtient le système linéaire de 9 équations suivant :

$$P(M) = 0_3 \iff \begin{cases} 11 - a - b + c = 0 \\ 0 = 0 \\ -19 + 5a - b = 0 \\ -28 + 8a - 4b = 0 \\ 1 + a + b + c = 0 \\ 28 - 8a + 4b = 0 \\ 38 - 10a + 2b = 0 \\ 0 = 0 \\ -46 + 14a - 4b + c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b - c = 11 \\ 0 = 0 \\ 5a - b = 19 \\ 2a - b = 7 \quad \text{en divisant par } 4 \\ a + b + c = -1 \\ 2a - b = 7 \quad \text{en divisant par } -4 \\ 5a - b = -19 \quad \text{en divisant par } -2 \\ 0 = 0 \\ 14a - 4b + c = 46 \end{cases}.$$

En supprimant les équations inutiles ou en double, on peut se ramener à un système linéaire de 5 équations qu'on échelonne à l'aide de la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} P(M) = 0_3 &\iff \begin{cases} a + b - c = 11 \\ 5a - b = 19 \\ 2a - b = 7 \\ a + b + c = -1 \\ 14a - 4b + c = 46 \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 14 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 19 \\ 7 \\ -1 \\ 46 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \\ L_5 \leftarrow L_5 - 14L_1 \end{array} \\ &\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{-6} & 5 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -18 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -36 \\ -15 \\ -12 \\ -108 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \\ \\ L_5 \leftarrow L_5 - 3L_2 \end{array} \end{aligned}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{-6} & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -36 \\ 6 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 + 2L_3$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{-6} & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -36 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient un système linéaire échelonné de $\boxed{\text{rang } 3}$ avec deux équations auxiliaires qui sont compatibles et pas d'inconnue auxiliaire. Il admet donc une unique solution :

$$\begin{cases} -c = 6 \\ -6b + 5c = -36 \\ a + b - c = 11 \end{cases} \iff \begin{cases} c = -6 \\ b = (36 + 5c)/6 = 6/6 = 1 \\ a = 11 - b + c = 4 \end{cases}$$

Synthèse. On pose $\boxed{a = 4}$, $\boxed{b = 1}$ et $\boxed{c = -6}$. D'après les calculs de l'analyse, on a bien que $P(M) = 0_3$.

3. *En déduire que M est inversible et calculer son inverse.*

► On cherche une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AM = I_3$ et $MA = I_3$. On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse. D'après le résultat de la question précédente, on sait que :

$$P(M) = M^3 + 4M^2 + M - 6I_3 = 0_3.$$

Par conséquent :

$$I_3 = \frac{1}{6}\big(M^3 + 4M^2 + \underbrace{M}_{=I_3M}\big) = \underbrace{\frac{1}{6}\big(M^2 + 4M + I_3\big)}_{=A} M \quad \text{en factorisant à droite par } M.$$

Synthèse. On pose $A = \frac{1}{6}(M^2 + 4M + I_3)$. D'après les calculs de l'analyse, on a que $AM = I_3$. De même, on a d'après le résultat de la question précédente :

$$MA = M\frac{1}{6}\big(M^2 + 4M + I_3\big) = \frac{1}{6}\big(M^3 + 4M^2 + M\big) = I_3.$$

On en déduit que $\boxed{M \text{ est inversible}}$ et que son inverse est égal à :

$$\begin{aligned} M^{-1} = A &= \frac{1}{6}\big(M^2 + 4M + I_3\big) \\ &= \frac{1}{6}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 8 & 1 & -8 \\ -10 & 0 & 14 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} -2/3 & 0 & 1/6 \\ -4/3 & 1 & 4/3 \\ -1/3 & 0 & -1/6 \end{pmatrix}} \quad \text{par calcul matriciel.} \end{aligned}$$

Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 x^n e^{1-x}\mathrm{d}x$.

1. *Calculer I_0 et I_1.*

▶ On a :

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{0!}\int_0^1 x^0 e^{1-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{1-x}\mathrm{d}x = \big[-e^{1-x}\big]_0^1 = -e^0 + e^1 = \boxed{e-1}, \\ \text{et} \quad I_1 &= \frac{1}{1!}\int_0^1 x^1 e^{1-x}\mathrm{d}x = \int_0^1 x e^{1-x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 u(x)v'(x)\mathrm{d}x \quad \text{en posant} \quad \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{1-x} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{1-x} \end{cases}. \end{aligned}$$

Les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto -e^{1-x}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composées de fonctions usuelles qui le sont. On peut donc appliquer le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_1 &= \big[u(x)v(x)\big]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\mathrm{d}x \\ &= \big[-xe^{1-x}\big]_0^1 - \int_0^1 -e^{1-x}\mathrm{d}x = -e^0 - 0 - \big[e^{1-x}\big]_0^1 = -1 - \big(e^0 - e^1\big) = \boxed{e-2}. \end{aligned}$$

2. *Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.*

▶ On a :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 x^{n+1}e^{1-x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 u(x)v'(x)\mathrm{d}x \quad \text{en posant} \quad \begin{cases} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = e^{1-x} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = -e^{1-x} \end{cases}. \end{aligned}$$

Les fonctions $u : x \mapsto x^{n+1}$ et $v : x \mapsto -e^{1-x}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme composées de fonctions usuelles qui le sont. On peut donc appliquer le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!}\left(\big[u(x)v(x)\big]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left(\big[-x^{n+1}e^{1-x}\big]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)x^n e^{1-x}\mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left(-e^0 - 0 + (n+1)\int_0^1 x^n e^{1-x}\mathrm{d}x\right) \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \frac{-1}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+1)!}\int_0^1 x^n e^{1-x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{-1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n e^{1-x}\mathrm{d}x \quad \text{car } (n+1)! = n! \times (n+1) \\ &= \boxed{\frac{-1}{(n+1)!} + I_n}. \end{aligned}$$

3. *En déduire que $I_n = e - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

▶ On raisonne par récurrence.

<u>Initialisation.</u> Pour $n = 0$, on a $I_0 = e - 1$ d'après le résultat de la question 1 et :

$$e - \sum_{k=0}^{0}\frac{1}{k!} = e - \frac{1}{0!} = e - 1.$$

Donc le résultat est vérifié au rang $n = 0$.
<u>Hérédité.</u> On fixe $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $I_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. On a :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \frac{-1}{(n+1)!} + I_n \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= \frac{-1}{(n+1)!} + e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\
&= e - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} \quad \text{par associativité de la somme.}
\end{aligned}$$

Donc si le résultat est vrai au rang n alors il est vrai aussi au rang $n+1$, et cette implication est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.
<u>Conclusion</u>. D'après le principe de récurrence, on en déduit que le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}}.$$

Ce résultat permet de calculer des valeurs approchées de la constante e. En effet, on remarque que :

$$\forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant 1^n \times e^1 = e.$$

D'où, par monotonie de l'intégrale :

$$0 = \frac{1}{n!}\int_0^1 0 \mathrm{d}x \leqslant \underbrace{\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n e^{1-x} \mathrm{d}x}_{=I_n} \leqslant \frac{1}{n!}\int_0^1 e \mathrm{d}x = \frac{e}{n!}.$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ d'après le théorème des gendarmes. Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e.$$

Il suffit donc de calculer cette somme pour une grande valeur de n (par exemple avec une fonction Python) afin d'obtenir une valeur approchée de la constante e.

DS n$^{\text{o}}$ 6 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

Exercice 1 (Raisonnement)

Soit $\rho \in]0,1[$. On considère une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} \geqslant \rho x_{n+1} + (1-\rho)x_n \tag{$*$}$$

On propose d'étudier la nature de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour cela, on pose $y_n = \min(x_n, x_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Dans cette question, on considère le cas particulier où la condition $(*)$ est une égalité.
   (a) Exprimer le terme général de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de ρ, x_0 et x_1.
   (b) En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite à déterminer en fonction de ρ, x_0 et x_1.

On revient désormais au cas général.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $y_n \leqslant x_{n+2}$ puis que $y_n \leqslant y_{n+1}$.
   (b) Que peut-on en déduire pour la nature de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. On suppose que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
4. On suppose désormais que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on note $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouver que si $x_{n+1} > \ell$ alors $y_{n+1} \geqslant \rho x_{n+1} + (1-\rho)y_n$.
   (b) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \max\left(\ell, \frac{y_{n+1} - (1-\rho)y_n}{\rho}\right).$$
   (c) En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?

Finalement, on a montré que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ admet une limite (finie ou non) dans tous les cas.

5. Ce résultat se généralise-t-il pour $\rho = 1$? Justifier.
6. Dans le cas où $\rho = 0$, trouver un exemple de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la condition $(*)$ mais n'admettant pas de limite.

Problème 1 (Modélisation)

Le but de ce problème est de modéliser la cuisson d'un œuf plongé dans une casserole d'eau bouillante.

La coquille calcaire de l'œuf protège ses deux composantes principales : le blanc (ou albumen) qui entoure le jaune (ou vitellus). On note respectivement $T_B(t)$ et $T_J(t)$ les températures (mesurées en degré Celsius) du blanc et du jaune à l'instant t (mesuré en minutes) et on suppose que les fonctions T_B et T_J ainsi définies sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$. On néglige la présence des autres constituants de l'œuf.

L'œuf est initialement stocké à une température notée T_0, ainsi $T_B(0) = T_J(0) = T_0$. Puis il est plongé à l'instant $t = 0$ dans la casserole dont l'eau est maintenue à sa température d'ébullition : $T_E = 100°\text{C}$. On suppose que $T_0 < T_E$.

Les paramètres régissant la cuisson d'un œuf se trouvent dans tout guide culinaire. À savoir, le blanc commence à coaguler à partir de 62°C, le jaune à partir de 68°C et les différents niveaux de cuisson sont : œuf tiède cru (blanc et jaune non coagulés), œuf à la coque (blanc peu coagulé, jaune coulant), œuf mollet (blanc ferme, jaune peu coagulé) et œuf dur (blanc et jaune fermes).

A) Cuisson du blanc

D'après les lois de la thermodynamique, la variation de la température dans le blanc est proportionnelle à la différence de température $T_E - T_B$ entre l'eau et le blanc. La fonction T_B vérifie donc l'équation différentielle suivante :

$$T_B' = \alpha\big(T_E - T_B\big) \tag{$\mathscr{E}_B$}$$

où la constante $\alpha > 0$ désigne le paramètre de conduction thermique à travers la coquille.

1. Résoudre $(\mathscr{E}_B)$ en fonction des données de l'énoncé.
2. Esquisser l'allure de la courbe représentative de la fonction $t \mapsto T_B(t)$ sur $\mathbb{R}_+$ en précisant sa tangente en $t = 0$, sa position relative par rapport à cette tangente et sa limite lorsque $t \to +\infty$.
3. Sachant que, partant d'un œuf stocké à température ambiante $T_0 = 20$°C, il faut un peu plus de 3min de cuisson pour obtenir un œuf à la coque, déterminer une valeur approchée de α.

Pour la suite du problème, on prendra $\alpha = 1/4$.

4. Dans le cas où l'œuf est initialement stocké à la température d'un réfrigérateur $T_0 = 4$°C, déterminer le temps de cuisson nécessaire pour obtenir un œuf à la coque.

B) Cuisson du jaune

Comme pour la cuisson du blanc, on a d'après les lois de la thermodynamique :

$$T_J' = \beta\big(T_B - T_J\big) \qquad (\mathscr{E}_J)$$

où la constante $\beta > 0$ désigne le paramètre de conduction thermique à travers la membrane séparant le blanc et le jaune. Cette membrane étant moins épaisse que la coquille, on suppose que $\beta > \alpha$.

5. Que valent $T_J(0)$ et $T_J'(0)$?
6. Justifier que la fonction T_J est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ puis montrer qu'elle vérifie l'équation différentielle suivante :
$$T_J'' + (\alpha + \beta)T_J' + \alpha\beta T_J = \alpha\beta T_E \qquad (\mathscr{E}_J')$$
7. Résoudre $(\mathscr{E}_J')$ en fonction des données de l'énoncé.
8. Esquisser l'allure de la courbe représentative de la fonction $t \mapsto T_J(t)$ sur $\mathbb{R}_+$ en précisant sa tangente en $t = 0$, sa position relative par rapport à cette tangente et sa limite lorsque $t \to +\infty$.

Pour la suite du problème, on prendra $\beta = 2\alpha = 1/2$.

9. En partant d'un œuf stocké à température ambiante $T_0 = 20$°C, déterminer le temps de cuisson nécessaire pour obtenir un œuf mollet.
10. Pour toute fonction temporelle $t \mapsto f(t)$, on définit sa valeur moyenne entre les instants t_1 et t_2 par :
$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\mathrm{d}t.$$
Sachant que, partant d'un œuf stocké à température ambiante $T_0 = 20$°C, il faut un peu moins de 10min de cuisson pour obtenir un œuf dur, calculer une valeur approchée de la température moyenne du jaune durant cette cuisson.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit la fonction $f_n : x \mapsto x^n + \dfrac{x}{n} - 1$ sur $[0, +\infty[$.

1. Tracer le tableau de variations de f_n.
2. Justifier que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0, 1[$, qu'on appelle x_n.
3. Écrire une fonction Python `f(n, x)` qui prend en argument l'entier n et un nombre réel $x \geqslant 0$ et renvoie la valeur de $f_n(x)$.
4. Le but est de rechercher par dichotomie une approximation de la solution x_n. Recopier et compléter la fonction suivante pour qu'à tout moment on ait $a \leqslant x_n \leqslant b$ et qu'à la fin de la boucle l'écart $b - a$ soit strictement inférieur à la valeur ϵ passée en argument :

```
def solution(n, epsilon):
    a = ...
    b = ...
    while ... :
        m = (a+b) / 2
        ...
    return (a, b)
```

Problème 2

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![0,n-1]\!] \times [\![0,p-1]\!]}$ une matrice à n lignes et p colonnes, où les lignes et les colonnes sont numérotées à partir de 0. On appelle **chemin** dans A une suite de coefficients partant du coin en haut à gauche $a_{0,0}$, allant jusqu'au coin en bas à droite $a_{n-1,p-1}$, et tel que chaque coefficient est soit immédiatement à droite soit immédiatement en dessous du précédent (on dit que les coefficients sont **adjacents**). Ainsi nos chemins se déplacent toujours vers le bas droit. On s'intéresse à la somme des coefficients sur un chemin.

Par exemple pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ on peut tracer les chemins suivants, avec indiqué en dessous la somme des coefficients sur le chemin :

$$\underset{9+9+2+6+9=35}{\begin{pmatrix} \mathbf{9} \rightarrow \mathbf{9} & 5 \\ \;\;\;\;\;\downarrow & \\ 1 \;\;\;\; \mathbf{2} & 5 \\ \;\;\;\;\;\downarrow & \\ 4 \;\;\;\; \mathbf{6} & \!\!\!\rightarrow \mathbf{9} \end{pmatrix}} \qquad \underset{9+1+4+6+9=29}{\begin{pmatrix} \mathbf{9} & 9 & 5 \\ \downarrow & & \\ \mathbf{1} & 2 & 5 \\ \downarrow & & \\ \mathbf{4} \rightarrow & \mathbf{6} \rightarrow & \mathbf{9} \end{pmatrix}} \qquad \underset{9+1+2+5+9=26}{\begin{pmatrix} \mathbf{9} & 9 & 5 \\ \downarrow & & \\ \mathbf{1} \rightarrow & \mathbf{2} \rightarrow & \mathbf{5} \\ & & \downarrow \\ 4 & 6 & \mathbf{9} \end{pmatrix}} \qquad (*)$$

Le but du problème est de déterminer la somme minimale que l'on peut former, parmi tous les chemins dans la matrice A. Dans cet exemple, c'est le chemin de droite qui a une somme égale à 26, et on peut montrer que c'est bien la somme minimale parmi tous les chemins possibles pour cette matrice-là.

1. Préliminaires

On représente les matrices de taille $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ par des listes de listes ; plus précisément une matrice A de taille (n, p) est donnée par la **liste** de ses **lignes**. Ainsi le coefficient $a_{i,j}$ est bien donné par `A[i][j]`.

1. (a) Quelle matrice la liste `[[9, 3, 4], [2, 6, 7]]` représente-t-elle ?

   (b) Quelle liste de listes représente la matrice $\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$?
2. Si `A` représente une matrice à n lignes et p colonnes, qu'est-ce que `len(A)` ? Et `len(A[0])` ? **Justifier**.
3. Laquelle de ces deux syntaxes permet de créer une matrice nulle à n lignes et p colonnes ? **Justifier**.

   (i) `[[0 for i in range(n)] for j in range(p)]`

(ii) `[[0 for j in range(p)] for i in range(n)]`

4. Écrire une fonction `miroir(L)` qui prend en argument une liste `L` (de taille quelconque) et qui renvoie une nouvelle liste qui est le miroir de `L`, c'est à dire la liste rangée en ordre inverse.
   Par exemple, `miroir([4, 2, 5, 3, 3])` doit renvoyer `[3, 3, 5, 2, 4]}`.

2. Calcul du minimum

Pour résoudre notre problème, il serait très inefficace de lister tous les chemins puis de chercher lesquels ont une longueur minimale. Partant d'une matrice A, on forme alors une matrice $S = (s_{i,j})$ de même taille que A appelée **matrice des sommes minimales** où $s_{i,j}$ est la somme minimale obtenus sur les chemins reliant le coefficient $a_{0,0}$ (coin haut gauche de A) au coefficient $a_{i,j}$. Dans l'exemple $(*)$ avec $A = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, on trouve $S = \begin{pmatrix} 9 & 18 & 23 \\ 10 & 12 & 17 \\ 14 & 18 & 26 \end{pmatrix}$, ce qui démontre que 26 est bien la somme minimale qu'on peut réaliser par des chemins allant du coin haut gauche au coin bas droit.

La matrice S se calcule pas à pas en partant du coin haut gauche.

5. Montrer que (on pourra admettre ces formules pour passer à la suite) les coefficients de S se calculent avec la relation de récurrence suivante :
   (i) $s_{0,0} = a_{0,0}$
   (ii) Pour $i \in [\![0, n-2]\!]$, $s_{i+1,0} = s_{i,0} + a_{i+1,0}$
   (iii) Pour $j \in [\![0, p-2]\!]$, $s_{0,j+1} = s_{0,j} + a_{0,j+1}$
   (iv) Pour $i \in [\![0, n-2]\!]$ et $j \in [\![0, p-2]\!]$: $s_{i+1,j+1} = s_{i+1,j} + a_{i+1,j+1}$ si $s_{i+1,j} < s_{i,j+1}$, et $s_{i,j+1} + a_{i+1,j+1}$ sinon

6. (a) En appliquant ce procédé, déterminer la matrice des sommes minimales pour $B = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 8 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$
   (b) En déduire que la somme minimale de B, parmi tous les chemins reliant le coin haut gauche au coin bas droit, est égale à 20.

7. (a) Compléter le programme suivant pour écrire une fonction `matrice_sommes_minimales(A)` qui renvoie la matrice S des sommes minimales d'une matrice A passée en argument en utilisant les relations de récurrence de la question 5.

```
def matrice_sommes_minimales(A):
    n = ...
    p = ...
    S = ...
    for i in range(...):
        S[i+1][0] = ...
    for j in range(...):
        S[0][j+1] = ...
    for i in range(...):
        for j in range(...):
            ...
    return S
```

   (b) En déduire une fonction `somme_minimale(A)` qui renvoie la somme minimale des chemins de A.

3. Calcul sur les chemins

Un chemin dans une matrice sera représenté tout simplement par une **liste** de **tuples** `(i, j)` représentant la suite de coefficients par lesquels passe le chemin. Dans notre exemple initial $(*)$, les chemins sont représentés respectivement par

— [(0, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (2, 2)]
— [(0, 0), (1, 0), (2, 0), (2, 1), (2, 2)]
— [(0, 0), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 2)]

8. La fonction suivante contient une ou plusieurs erreurs. Le but est qu'elle renvoie `True` si la liste de tuples (supposée non-vide) passée en argument représente bien un chemin partant du coin haut gauche et constitué de coefficients adjacents, et `False` sinon. Recopier et corriger la fonction :

```
def est_chemin(L):
    # si L[0] n'est pas le coin haut gauche, c'est faux
    (i, j) = L[0]
    if i != 0 and j != 0:
        return False
    # puis il faut tester si les coefficients sont adjacents
    for k in range(len(L)):
        (i, j) = L[k]
        (i2, j2) = L[k+1]
        # teste si le coeffcient suivant est à droite ou en dessous
        if (i2 == i and j2 == j+1) or (i2 == i+1 and j2 == j):
            return True
        else:
            return False
```

9. Écrire une fonction `somme_chemin(A, L)` qui prend en argument une matrice `A` et un chemin `L` et qui renvoie la somme des coefficients de A le long du chemin donné.

4. Recherche du chemin

La méthode présentée permet de calculer la somme minimale des chemins joignant le coin haut gauche au coin bas droit, mais elle ne dit pas quel chemin donne ce minimum. Il pourrait d'ailleurs y en avoir plusieurs.

Pour trouver un chemin donnant une somme minimale, dans une matrice A donnée, on s'y prend de la façon suivante :

— On calcule la matrice S des sommes minimales,

— On démarre au coin bas droit de A. On note i et j les numéros de ligne et de colonnes actuels. Tant qu'on n'est pas remonté jusqu'au coin haut gauche alors :

  — Si on se trouve sur la première colonne, on remonte d'une ligne.

  — Si $s_{i-1,j} < s_{i,j-1}$, c'est que la somme minimale $s_{i-1,j}$ pour relier le coin haut gauche au coefficient $a_{i-1,j}$ est inférieure à celle pour relier le coin haut gauche au coefficient $a_{i,j-1}$; autrement dit, pour arriver à $a_{i,j}$ le chemin de somme minimal provient du coefficient d'au dessus. On remonte alors d'une ligne.

  — Dans tous les autres cas, on remonte d'une colonne.

10. (a) Implémenter cet algorithme en écrivant une fonction `remonter_chemin(A)` qui prend en argument une matrice A et qui renvoie la liste des tuples qui donnent les coefficients parcourus par cet algorithme, partant du coin bas droit et remontant jusqu'au coin haut gauche.

    (b) En déduire une fonction `chemin(A)` qui renvoie un chemin de somme minimale dans A, rangé dans l'ordre depuis le coin haut gauche jusqu'au coin bas droit.

11. En appliquant ce procédé sur l'exemple 6 avec $B = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 8 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, donner un chemin de somme minimal pour B.

Corrigé du DS n° 6 de mathématiques et d'informatique

Exercice 1 (Raisonnement)
Soit $\rho \in]0,1[$. On considère une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} \geqslant \rho x_{n+1} + (1-\rho)x_n \tag{$*$}$$

On propose d'étudier la nature de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour cela, on pose $y_n = \min(x_n, x_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. *Dans cette question, on considère le cas particulier où la condition (**??**) est une égalité.*

   (a) *Exprimer le terme général de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de ρ, x_0 et x_1.*

   ▶ Dans le cas où la condition (**??**) est une égalité, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} = \rho x_{n+1} + (1-\rho)x_n.$$

On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique :

$$q^2 = \rho q + (1-\rho) \iff q^2 - \rho q - (1-\rho) = 0.$$

On remarque que $q_1 = 1$ est une solution évidente. La deuxième solution vérifie $q_1 + q_2 = \rho$ et $q_1 q_2 = -(1-\rho) = \rho - 1$, donc $q_2 = \rho - 1$. Puisque $\rho \in]0,1[$, on a :

$$-1 < \underbrace{\rho - 1}_{=q_2} < 0 < \underbrace{\rho}_{=q_1} < 1.$$

Ainsi l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes, donc son discriminant est strictement positif.

Pensez à utiliser les solutions évidentes (s'il y en a) pour résoudre rapidement des équations. On aurait aussi pu calculer les solutions à l'aide du discriminant, mais c'est plus long (et il faut faire attention aux erreurs de signe) :

$$\Delta = (-\rho)^2 - 4(-(1-\rho)) = \rho^2 - 4\rho + 4 = (\rho-2)^2 > 0 \quad \textit{car } \rho \neq 2$$

$$\textit{donc} \quad q_1 = \frac{-(-\rho)-(\rho-2)}{2} = 1 \quad \textit{et} \quad q_2 = \frac{-(-\rho)+(\rho-2)}{2} = \rho - 1.$$

Par conséquent, on sait qu'il existe deux constantes $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n = \lambda_1 + \lambda_2(\rho-1)^n.$$

Pour déterminer les constantes λ_1 et λ_2, on utilise les premiers termes :

$$\begin{cases} x_0 = \lambda_1 + \lambda_2(\rho-1)^0 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_1 = \lambda_1 + \lambda_2(\rho-1)^1 = \lambda_1 + (\rho-1)\lambda_2 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \rho-1 \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

On a $\det(M) = 1 \times (\rho-1) - 1 \times 1 = \rho - 2 \neq 0$ car $\rho \in]0,1[$ donc la matrice M est inversible et le système linéaire admet une unique solution :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix} \rho-1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\rho-2}\begin{pmatrix} (\rho-1)x_0 - x_1 \\ -x_0 + x_1 \end{pmatrix}.$$

Finalement, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \frac{(\rho-1)x_0 - x_1}{\rho-2} + \frac{x_1 - x_0}{\rho-2}(\rho-1)^n}.$$

(b) En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite à déterminer en fonction de ρ, x_0 et x_1.

▶ On sait que $\rho \in]0,1[$ donc $\rho - 1 \in]-1,0[$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}(\rho-1)^n = 0$. Par conséquent, on a d'après le résultat de la question précédente :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\rho-1)x_0 - x_1}{\rho-2} + \frac{x_1 - x_0}{\rho-2}\underbrace{(\rho-1)^n}_{\to 0} = \boxed{\frac{(\rho-1)x_0 - x_1}{\rho-2}}.$$

On revient désormais au cas général.

2. *(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $y_n \leqslant x_{n+2}$ puis que $y_n \leqslant y_{n+1}$.*

▶ On a $y_n = \min(x_n, x_{n+1})$ donc $\boxed{y_n \leqslant x_n}$ et $\boxed{y_n \leqslant x_{n+1}}$. Puisque $\rho \in]0,1[$, on en déduit que $\rho y_n \leqslant \rho x_{n+1}$ (car $\rho > 0$) et $(1-\rho)y_n \leqslant (1-\rho)x_n$ (car $1-\rho > 0$). En injectant ces inégalités dans la condition (**??**), on obtient :

$$x_{n+2} \geqslant \underbrace{\rho x_{n+1}}_{\geqslant \rho y_{n+1}} + \underbrace{(1-\rho)x_n}_{\geqslant (1-\rho)y_n} \geqslant \rho y_n + (1-\rho)y_n = \big(\rho + 1 - \rho\big)y_n = y_n.$$

Ainsi, on a bien montré que $\boxed{y_n \leqslant x_{n+2}}$. Puisqu'on a aussi montré que $y_n \leqslant x_{n+1}$, on en déduit que $y_n \leqslant \min(x_{n+1}, x_{n+2})$. Or $y_{n+1} = \min(x_{n+1}, x_{n+2})$, donc $\boxed{y_n \leqslant y_{n+1}}$.

(b) Que peut-on en déduire pour la nature de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

▶ D'après le résultat de la question précédente, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On obtient donc seulement deux cas possibles pour la nature de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'après le $\boxed{\text{théorème de la limite monotone}}$:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{si } (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée, alors } (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge ;} \\ \text{sinon, } (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty.\end{array}}$$

Dans les deux cas, la limite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe.

3. *On suppose que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.*

▶ Dans ce cas, on sait que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone. De plus, on a montré à la question 2(a) que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{y_n}_{\to+\infty} \leqslant x_n \quad \text{car } y_n = \min(x_n, x_{n+1}).$$

D'après le $\boxed{\text{théorème de limite par comparaison}}$, on en déduit que $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty}$.

4. *On suppose désormais que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et on note $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite.*

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouver que si $x_{n+1} > \ell$ alors $y_{n+1} \geqslant \rho x_{n+1} + (1-\rho)y_n$.

▶ On suppose que $x_{n+1} > \ell$. Pour montrer que $y_{n+1} \geqslant \rho x_{n+1} + (1-\rho)y_n$, il suffit de montrer que $x_{n+2} = y_{n+1}$ et $x_n = y_n$ dans la condition (**??**). Or $y_n = \min(x_n, x_{n+1})$ et $x_{n+1} > \ell$. De plus, on sait que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (d'après le résultat de la question 2(a)) et qu'elle converge vers ℓ (par hypothèse de l'énoncé). Donc $y_n \leqslant \ell$. On en déduit que $y_n \neq x_{n+1}$ et donc que $\boxed{y_n = x_n}$. De même, $y_{n+1} = \min(x_{n+1}, x_{n+2})$ mais $y_{n+1} \neq x_{n+1}$ (car $y_{n+1} \leqslant \ell$ et $x_{n+1} > \ell$), donc $\boxed{y_{n+1} = x_{n+2}}$. Finalement, en injectant ces résultats dans la condition (**??**), on obtient :

$$\underbrace{x_{n+2}}_{=y_{n+1}} \geqslant \rho x_{n+1} + (1-\rho)\underbrace{x_n}_{=y_n} \quad \text{donc} \quad \boxed{y_{n+1} \geqslant \rho x_{n+1} + (1-\rho)y_n}.$$

(b) *Montrer que :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \max\left(\ell, \frac{y_{n+1}-(1-\rho)y_n}{\rho}\right).$$

▶ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a déjà montré à la question 2(a) que $y_n \leqslant x_{n+1}$ (car $y_n = \min(x_n, x_{n+1})$). Il suffit donc de montrer la deuxième inégalité. On raisonne par disjonction de cas.
1[er] cas : $x_{n+1} > \ell$. Alors on a d'après le résultat de la question précédente :
$$y_{n+1} \geqslant \rho x_{n+1} + (1-\rho)y_n \quad \text{donc} \quad x_{n+1} \leqslant \frac{y_{n+1}-(1-\rho)y_n}{\rho} \quad \text{car } \rho > 0.$$
Puisque $\dfrac{y_{n+1}-(1-\rho)y_n}{\rho} \leqslant \max\left(\ell, \dfrac{y_{n+1}-(1-\rho)y_n}{\rho}\right)$, on en déduit bien que :
$$x_{n+1} \leqslant \max\left(\ell, \frac{y_{n+1}-(1-\rho)y_n}{\rho}\right).$$
2[e] cas : $x_{n+1} \leqslant \ell$. Puisque $\ell \leqslant \max\left(\ell, \dfrac{y_{n+1}-(1-\rho)y_n}{\rho}\right)$, on en déduit bien que :
$$x_{n+1} \leqslant \max\left(\ell, \frac{y_{n+1}-(1-\rho)y_n}{\rho}\right).$$
Conclusion. La deuxième inégalité est vraie dans tous les cas. Finalement, on a bien montré que :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \max\left(\ell, \frac{y_{n+1}-(1-\rho)y_n}{\rho}\right)}.$$

(c) *En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Quelle est sa limite ?*
▶ On sait que $\lim_{n\to+\infty} y_n = \ell$ (par hypothèse de l'énoncé). Donc $\lim_{n\to+\infty} y_{n+1} = \ell$ et :
$$\lim_{n\to+\infty} \max\left(\ell, \frac{\overbrace{y_{n+1}}^{\to\ell} - (1-\rho)\overbrace{y_n}^{\to\ell}}{\rho}\right) = \max\left(\ell, \frac{\overbrace{\ell-(1-\rho)\ell}^{=\rho\ell}}{\rho}\right) = \max(\ell,\ell) = \ell.$$
De plus, on a d'après le résultat de la question précédente :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \underbrace{y_n}_{\to\ell} \leqslant x_{n+1} \leqslant \underbrace{\max\left(\ell, \frac{y_{n+1}-(1-\rho)y_n}{\rho}\right)}_{\to\ell}.$$
D'après le $\boxed{\text{théorème de limite par encadrement}}$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \ell$ et donc que $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell}$ (quitte à changer de variable pour se ramener à $\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell$).

Finalement, on a montré que $(x_n)_{n\geqslant 0}$ admet une limite (finie ou non) dans tous les cas.

5. *Ce résultat se généralise-t-il pour $\rho = 1$? Justifier.*
▶ Dans le cas où $\rho = 1$, la condition (**??**) devient :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} \geqslant x_{n+1}.$$
Quitte à changer de variable pour se ramener à $x_{n+1} \geqslant x_n$ pour tout $n \geqslant 1$, on en déduit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. On obtient donc seulement deux cas possibles pour la nature de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'après le $\boxed{\text{théorème de la limite monotone}}$: si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ; sinon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$. Dans les deux cas, la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et donc $\boxed{\text{le résultat se généralise bien pour } \rho = 1}$.

6. *Dans le cas où $\rho = 0$, trouver un exemple de suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la condition (**??**) mais n'admettant pas de limite.*

   ▶ Dans le cas où $\rho = 0$, la condition (**??**) devient :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+2} \geqslant x_n.$$
   Par conséquent :
$$\forall k \geqslant 0, \quad x_{2(k+1)} = x_{2k+2} \geqslant x_{2k} \quad \text{et} \quad x_{2(k+1)+1} = x_{2k+3} \geqslant x_{2k+1}.$$
   Ainsi, trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la condition (**??**) revient à trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les sous-suites extraites $(x_{2k})_{k\geqslant 0}$ et $(x_{2k+1})_{k\geqslant 0}$ sont croissantes et admettent donc des limites d'après le théorème de la limite monotone. Par conséquent, pour que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admette pas de limite, il suffit, d'après le théorème des suites extraites, que ces deux sous-suites extraites n'aient pas la même limite.
   Par exemple, il suffit de choisir la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = (-1)^n}.$$
   Il existe bien sûr d'autres exemples possibles. Par exemple :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \begin{cases} n \text{ si } n \text{ pair} \\ 0 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases} \quad \text{ou} \quad x_n = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{si } n \text{ pair} \\ 1-\frac{1}{n} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \ldots$$
   Il suffit que les deux sous-suites extraites soient croissantes et aient des limites différentes.

Problème 1 (Modélisation)

Le but de ce problème est de modéliser la cuisson d'un œuf plongé dans une casserole d'eau bouillante.

La coquille calcaire de l'œuf protège ses deux composantes principales : le blanc (ou albumen) qui entoure le jaune (ou vitellus). On note respectivement $T_B(t)$ et $T_J(t)$ les températures (mesurées en degré Celsius) du blanc et du jaune à l'instant t (mesuré en minutes) et on suppose que les fonctions T_B et T_J ainsi définies sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$. On néglige la présence des autres constituants de l'œuf.

L'œuf est initialement stocké à une température notée T_0, ainsi $T_B(0) = T_J(0) = T_0$. Puis il est plongé à l'instant $t = 0$ dans la casserole dont l'eau est maintenue à sa température d'ébullition : $T_E = 100$°C. On suppose que $T_0 < T_E$.

Les paramètres régissant la cuisson d'un œuf se trouvent dans tout guide culinaire. À savoir, le blanc commence à coaguler à partir de 62°C, le jaune à partir de 68°C et les différents niveaux de cuisson sont : œuf tiède cru (blanc et jaune non coagulés), œuf à la coque (blanc peu coagulé, jaune coulant), œuf mollet (blanc ferme, jaune peu coagulé) et œuf dur (blanc et jaune fermes).

A) Cuisson du blanc

D'après les lois de la thermodynamique, la variation de la température dans le blanc est proportionnelle à la différence de température $T_E - T_B$ entre l'eau et le blanc. La fonction T_B vérifie donc l'équation différentielle suivante :
$$T_B' = \alpha\big(T_E - T_B\big) \qquad (\mathscr{E}_B)$$
où la constante $\alpha > 0$ désigne le paramètre de conduction thermique à travers la coquille.

1. *Résoudre $(\mathscr{E}_B)$ en fonction des données de l'énoncé.*

   ▶ On a :
$$(\mathscr{E}_B) \iff T_B' + \alpha T_B = \alpha T_E.$$
   On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 1 non homogène. On commence par résoudre l'équation différentielle linéaire homogène associée :
$$T_H' + \alpha T_H = 0 \iff T_H : t \mapsto \lambda e^{-\alpha t} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ est une constante quelconque.}$$

Puis on cherche une solution particulière de $(\mathscr{E}_B)$. On remarque que $T_P : t \mapsto T_E$ est une solution particulière évidente. En effet, puisque T_P est constante, on a :

$$\underbrace{T_P'}_{=0} + \alpha \underbrace{T_P}_{=T_E} = \alpha T_E.$$

Il est cohérent que $T_P : t \mapsto T_E$ soit une solution évidente puisque la température reste constante dans le cas où l'œuf est stocké à la température d'ébullition $T_0 = T_E$. Thermodynamiquement, T_E est appelée la température d'équilibre.

Finalement, on en déduit d'après le principe de superposition que :

$$(\mathscr{E}_B) \iff T_B : t \mapsto T_H(t) + T_P(t) = \lambda e^{-\alpha t} + T_E \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \text{ est une constante.}$$

Pour déterminer la constante λ, on utilise la condition initiale :

$$T_0 = T_B(0) = \lambda \underbrace{e^{-\alpha 0}}_{=1} + T_E \quad \text{donc} \quad \lambda = T_0 - T_E.$$

Finalement, on obtient que :

$$\forall t \geqslant 0, \quad \boxed{T_B(t) = (T_0 - T_E)e^{-\alpha t} + T_E}.$$

2. *Esquisser l'allure de la courbe représentative de la fonction $t \mapsto T_B(t)$ sur $\mathbb{R}_+$ en précisant sa tangente en $t = 0$, sa position relative par rapport à cette tangente et sa limite lorsque $t \to +\infty$.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, la fonction T_B est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall t \geqslant 0, \quad T_B'(t) = (T_0 - T_E)(-\alpha)e^{-\alpha t} + 0 = \underbrace{-\alpha}_{<0} \big(\underbrace{T_0 - T_E}_{<0}\big) \underbrace{e^{-\alpha t}}_{>0}.$$

Puisque $\alpha > 0$ et $T_0 < T_E$ d'après l'énoncé, on en déduit que $\boxed{T_B \text{ est strictement croissante}}$ sur $\mathbb{R}_+$. De plus, l'équation de sa tangente en $t = 0$ est donnée par :

$$y = T_B(0) + T_B'(0)(x - 0) = T_0 - \alpha(T_0 - T_E)x = \underbrace{\alpha(T_E - T_0)}_{>0} x + T_0.$$

Donc $\boxed{\text{sa tangente en } t = 0 \text{ passe par la condition initiale } (t = 0, T_0) \text{ et est strictement croissante}}$. On a :

$$\begin{aligned}\forall t \geqslant 0, \quad T_B(t) - \big(\alpha(T_E - T_0)t + T_0\big) &= \underbrace{(T_0 - T_E)}_{=-(T_E - T_0)} e^{-\alpha t} + T_E - \alpha(T_E - T_0)t - T_0 \\ &= \underbrace{(T_E - T_0)}_{>0} \big[\underbrace{-e^{-\alpha t} + 1 - \alpha t}_{=f(t)}\big].\end{aligned}$$

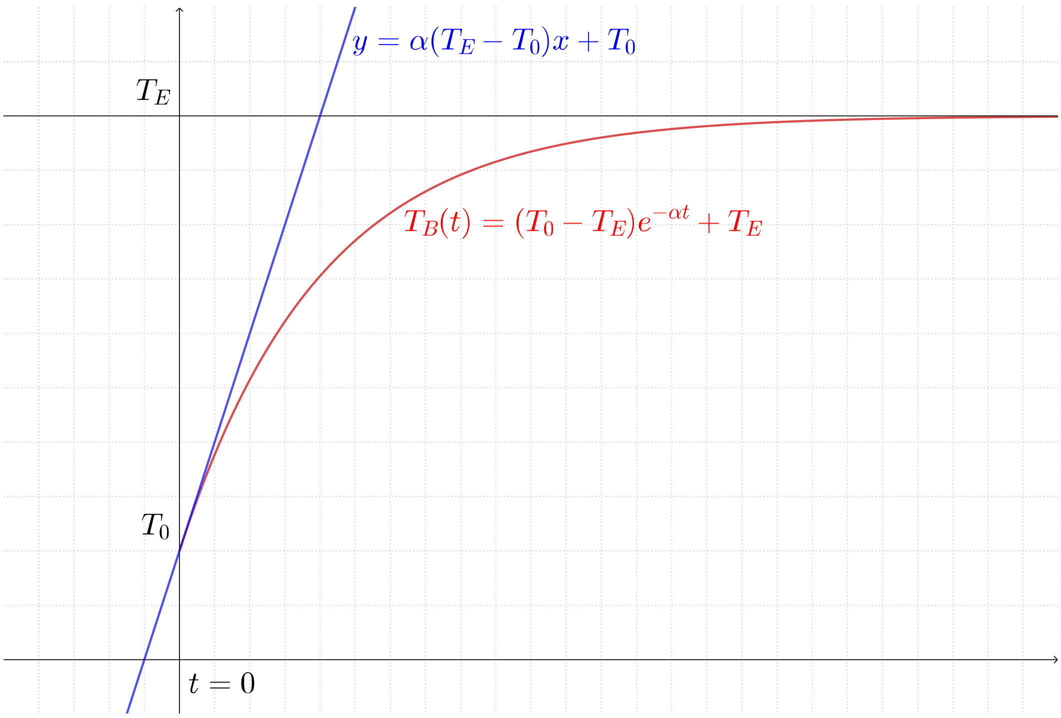
Pour étudier la position relative de la courbe représentative de T_B par rapport à sa tangente en $t = 0$, il suffit donc d'étudier le signe de la fonction $f : t \mapsto -e^{-\alpha t} + 1 - \alpha t$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall t \geqslant 0, \quad f'(t) = -(-\alpha)e^{-\alpha t} + 0 - \alpha = \underbrace{\alpha}_{>0} \underbrace{\big(\underbrace{e^{\overbrace{-\alpha t}^{\leqslant 0}}}_{\leqslant 1} - 1\big)}_{\leqslant 0} \leqslant 0 \quad \text{d'après les propriétés de la fonction exponentielle.}$$

Ainsi f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et admet un maximum qui vaut $f(0) = -e^0 + 1 - 0 = 0$. On en déduit que $f(t) \leqslant 0$ pour tout $t \geqslant 0$ et donc que $\boxed{\text{la courbe représentative de } T_B \text{ est en-dessous de sa tangente en } t = 0}$. D'autre part, on a :

$$\lim_{t\to+\infty} T_B(t) = \lim_{t\to+\infty} (T_0 - T_E)\underbrace{e^{\overbrace{-\alpha t}^{\to -\infty}}}_{\to 0} + T_E = T_E \quad \text{d'après les propriétés de la fonction exponentielle}.$$

Ainsi, $\boxed{T_B(t) \text{ tend vers } T_E \text{ lorsque } t \to +\infty}$. Finalement, on peut esquisser la courbe représentative de T_B à l'aide de toutes ces propriétés.



3. *Sachant que, partant d'un œuf stocké à température ambiante $T_0 = 20$°C, il faut un peu plus de 3min de cuisson pour obtenir un œuf à la coque, déterminer une valeur approchée de α.*

► D'après l'énoncé, pour obtenir à œuf à la coque T_B doit être environ égale à 62°C pour $t = 3$min, $T_0 = 20$°C et $T_E = 100$°C. On injecte ces valeurs dans le résultat de la question 1 et on résout l'équation obtenue d'inconnue α :

$$\begin{aligned}\underbrace{62}_{\approx T_B(t)} = \big(\underbrace{20}_{=T_0} - \underbrace{100}_{=T_E}\big)e^{-\alpha \overbrace{3}^{=t}} + \underbrace{100}_{=T_E} &\iff 80e^{-3\alpha} = 38 \\ &\iff -3\alpha = \ln\left(\frac{38}{80}\right) = -\ln\left(\frac{40}{19}\right) \\ &\iff \boxed{\alpha = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{40}{19}\right)}.\end{aligned}$$

Numériquement, on obtient $\alpha \approx 0,248$. La valeur $1/4 = 0,25$ est donc une bonne approximation.

Pour la suite du problème, on prendra $\alpha = 1/4$.

4. *Dans le cas où l'œuf est initialement stocké à la température d'un réfrigérateur $T_0 = 4$°C, déterminer le temps de cuisson nécessaire pour obtenir un œuf à la coque.*

▶ On raisonne comme à la question précédente puis on résout l'équation obtenue d'inconnue t qui représente le temps nécessaire pour obtenir un œuf à la coque dans ce cas :

$$\begin{aligned}\underbrace{62}_{\approx T_B(t)} = \big(\underbrace{4}_{=T_0} - \underbrace{100}_{=T_E}\big)e^{-\overbrace{\frac{1}{4}}^{=\alpha}t} + \underbrace{100}_{=T_E} &\iff 96e^{-t/4} = 38 \\ &\iff -\frac{t}{4} = \ln\left(\frac{38}{96}\right) = -\ln\left(\frac{48}{19}\right) \\ &\iff \boxed{t = 4\ln\left(\frac{48}{19}\right)}.\end{aligned}$$

Numériquement, on obtient $t \approx 3,707$. Il faut donc un peu moins de 4min de cuisson pour obtenir un œuf à la coque lorsqu'il est conservé au réfrigérateur.

B) Cuisson du jaune

Comme pour la cuisson du blanc, on a d'après les lois de la thermodynamique :

$$T_J' = \beta\big(T_B - T_J\big) \qquad (\mathscr{E}_J)$$

où la constante $\beta > 0$ désigne le paramètre de conduction thermique à travers la membrane séparant le blanc et le jaune. Cette membrane étant moins épaisse que la coquille, on suppose que $\beta > \alpha$.

5. *Que valent $T_J(0)$ et $T_J'(0)$?*

▶ D'après l'énoncé, on sait que $\boxed{T_J(0) = T_0}$ et $T_B(0) = T_0$, ce qui donne en injectant dans $(\mathscr{E}_J)$:

$$T_J'(0) = \beta\big(T_B(0) - T_J(0)\big) = \beta\big(T_0 - T_0\big) = 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{T_J'(0) = 0}.$$

6. *Justifier que la fonction T_J est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ puis montrer qu'elle vérifie l'équation différentielle suivante :*

$$T_J'' + (\alpha+\beta)T_J' + \alpha\beta T_J = \alpha\beta T_E \qquad (\mathscr{E}_J')$$

▶ D'après l'énoncé, les fonctions T_B et T_J sont supposées dérivables sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, $T_J' = \beta(T_B - T_J)$ (d'après $(\mathscr{E}_J)$) est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que $\boxed{T_J \text{ est deux fois dérivable sur } \mathbb{R}_+}$. De plus :

$$\begin{aligned}T_J'' &= \beta\big(T_B' - T_J'\big) \quad \text{en dérivant } (\mathscr{E}_J) \\ &= \beta\big(\alpha\big(T_E - T_B\big) - T_J'\big) \quad \text{en injectant } (\mathscr{E}_B) \\ &= \alpha\beta T_E - \alpha\beta T_B - \beta T_J' \\ &= \alpha\beta T_E - \alpha\beta T_B - \beta^2\big(T_B - T_J\big) \quad \text{en injectant } (\mathscr{E}_J) \\ &= \alpha\beta T_E - \beta(\alpha+\beta)T_B + \beta^2 T_J\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}T_J'' + (\alpha+\beta)T_J' + \alpha\beta T_J &= \underbrace{\alpha\beta T_E - \beta(\alpha+\beta)T_B + \beta^2 T_J}_{\text{expression précédente de } T_J''} + (\alpha+\beta)\underbrace{\beta\big(T_B - T_J\big)}_{\text{d'après } (\mathscr{E}_J)} + \alpha\beta T_J \\ &= \alpha\beta T_E \overbrace{-\beta(\alpha+\beta)T_B}^{\text{-I}} \underbrace{+\beta^2 T_J}_{\text{+II}} \overbrace{+(\alpha+\beta)\beta T_B}^{\text{+I}} \underbrace{-\alpha\beta T_J}_{\text{-III}} \underbrace{-\beta^2 T_J}_{\text{-II}} \underbrace{+\alpha\beta T_J}_{\text{+III}} \\ &= \alpha\beta T_E \quad \text{après simplifications.}\end{aligned}$$

On a bien montré que $\boxed{T_J \text{ vérifie } (\mathscr{E}_J')}$.

7. *Résoudre $(\mathscr{E}'_J)$ en fonction des données de l'énoncé.*

► On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 2 non homogène. On commence par résoudre l'équation différentielle linéaire homogène associée :

$$T''_H + (\alpha+\beta)T'_H + \alpha\beta T_H = 0.$$

Son équation caractéristique est :

$$r^2 + (\alpha+\beta)r + \alpha\beta = 0 \iff r^2 - \big(\underbrace{(-\alpha)+(-\beta)}_{=\text{somme des sol.}}\big)r + \underbrace{(-\alpha)(-\beta)}_{=\text{produit des sol.}} = 0.$$

On remarque que $r_1 = -\alpha$ et $r_2 = -\beta$ sont des solutions évidentes. Puisque $\beta > \alpha$ d'après l'énoncé, on a $r_1 \neq r_2$. Ainsi l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes, donc son discriminant est strictement positif.

Pensez à utiliser les solutions évidentes (s'il y en a) pour résoudre rapidement des équations. On aurait aussi pu calculer les solutions à l'aide du discriminant, mais c'est plus long (et il faut faire attention aux erreurs) :

$$\begin{aligned}\Delta &= (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha\beta \\ &= \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha-\beta)^2 > 0 \quad \textit{car } \alpha \neq \beta\end{aligned}$$

$$\textit{donc} \quad r_1 = \frac{-(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)}{2} = -\alpha \quad \textit{et} \quad r_1 = \frac{-(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)}{2} = -\beta.$$

Par conséquent, on sait qu'il existe deux constantes $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$T_H : t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t} = \lambda_1 e^{-\alpha t} + \lambda_2 e^{-\beta t}.$$

Puis on cherche une solution particulière de $(\mathscr{E}'_J)$. On remarque que $T_P : t \mapsto T_E$ est une solution particulière évidente. En effet, puisque T_P est constante, on a :

$$\underbrace{T''_P}_{=0} + (\alpha+\beta)\underbrace{T'_P}_{=0} + \alpha\beta \underbrace{T_P}_{=T_E} = \alpha\beta T_E.$$

Il est cohérent que $T_P : t \mapsto T_E$ soit une solution évidente puisque la température reste constante dans le cas où l'œuf est stocké à la température d'ébullition $T_0 = T_E$. Thermodynamiquement, T_E est appelée la température d'équilibre.

Finalement, on en déduit d'après le principe de superposition que :

$$(\mathscr{E}'_J) \iff T_J : t \mapsto T_H(t) + T_P(t) = \lambda_1 e^{-\alpha t} + \lambda_2 e^{-\beta t} + T_E \quad \text{où } (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ sont des constantes.}$$

Pour déterminer les constantes λ_1 et λ_2, on utilise les conditions initiales de la question 5 :

$$\begin{cases} T_0 = T_J(0) = \lambda_1 \underbrace{e^{-\alpha 0}}_{=1} + \lambda_2 \underbrace{e^{-\beta 0}}_{=1} + T_E & \text{donc} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = T_0 - T_E \\ 0 = T'_J(0) = \lambda_1(-\alpha)\underbrace{e^{-\alpha 0}}_{=1} + \lambda_2(-\beta)\underbrace{e^{-\beta 0}}_{=1} + 0 & \text{donc} \quad \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}}_{=M} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_0 - T_E \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $\det(M) = 1 \times \beta - \alpha \times 1 = \beta - \alpha \neq 0$ car $\beta > \alpha$ donc la matrice M est inversible et le système linéaire admet une unique solution

$$\iff \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} T_0 - T_E \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_0 - T_E \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} \beta(T_0 - T_E) \\ -\alpha(T_0 - T_E) \end{pmatrix}.$$

Finalement, on en déduit que :

$$\forall t \geqslant 0, \quad \boxed{\begin{aligned} T_J(t) &= \frac{\beta}{\beta-\alpha}(T_0-T_E)e^{-\alpha t} - \frac{\alpha}{\beta-\alpha}(T_0-T_E)e^{-\beta t} + T_E \\ &= (T_0-T_E)\frac{\beta e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\beta t}}{\beta-\alpha} + T_E \end{aligned}}.$$

8. *Esquisser l'allure de la courbe représentative de la fonction $t \mapsto T_J(t)$ sur $\mathbb{R}_+$ en précisant sa tangente en $t = 0$, sa position relative par rapport à cette tangente et sa limite lorsque $t \to +\infty$.*

► D'après le résultat de la question précédente, la fonction T_J est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\begin{aligned} \forall t \geqslant 0, \quad T_J'(t) &= (T_0-T_E)\frac{\beta(-\alpha)e^{-\alpha t} - \alpha(-\beta)e^{-\beta t}}{\beta-\alpha} + 0 \\ &= \frac{\overbrace{-\alpha\beta}^{<0}}{\underbrace{\beta-\alpha}_{>0}}\underbrace{(T_0-T_E)}_{<0}\left[\underbrace{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}_{=g(t)}\right]. \end{aligned}$$

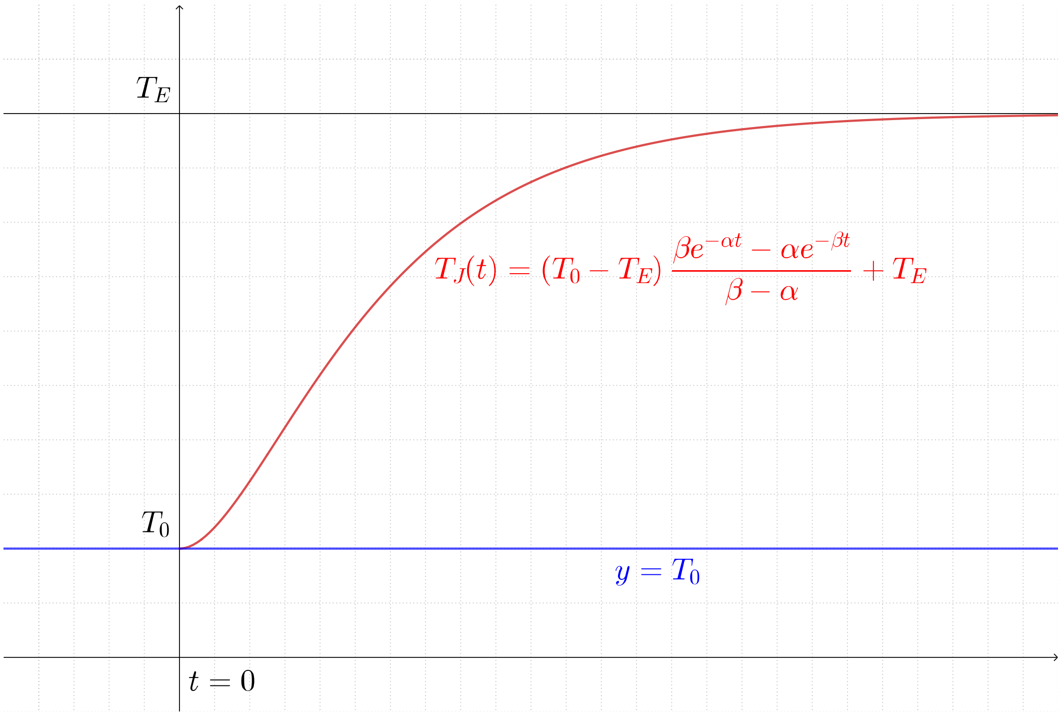
Puisque $\beta > \alpha > 0$ et $T_0 < T_E$ d'après l'énoncé, il suffit d'étudier le signe de $g : t \mapsto e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}$ pour étudier la monotonie de T_J. Or $\beta > \alpha$ d'après l'énoncé, donc $-\alpha t \geqslant -\beta t$ pour tout $t \geqslant 0$. On en déduit que $e^{-\alpha t} \geqslant e^{-\beta}$ par croissance de la fonction exponentielle et donc que $g(t) \geqslant 0$ pour tout $t \geqslant 0$. Par conséquent, $\boxed{T_J \text{ est strictement croissante}}$ sur $\mathbb{R}_+$. De plus, l'équation de sa tangente en $t = 0$ est donnée par :

$$y = \underbrace{T_J(0)}_{=T_0} + \underbrace{T_J'(0)}_{=0}(x-0) = T_0 \quad \text{d'après les résultats de la question 5.}$$

Donc $\boxed{\text{sa tangente en } t = 0 \text{ passe par la condition initiale } (t = 0, T_0) \text{ et est horizontale}}$. Puisque T_J est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $\boxed{\text{la courbe représentative de } T_J \text{ est au-dessus de sa tangente en } t = 0}$. D'autre part, on a :

$$\lim_{t\to+\infty} T_J(t) = \lim_{t\to+\infty}(T_0-T_E)\frac{\beta\overbrace{e^{-\alpha t}}^{\to 0} - \alpha\overbrace{e^{-\beta t}}^{\to 0}}{\beta-\alpha} + T_E = T_E.$$

Ainsi, $\boxed{T_J(t) \text{ tend vers } T_E \text{ lorsque } t \to +\infty}$. Finalement, on peut esquisser la courbe représentative de T_J à l'aide de toutes ces propriétés.



On remarque que la cuisson du jaune est plus lente que celle du blanc, même si les deux ont la même température initiale T_0 et tendent vers la même température d'équilibre T_E. Le modèle proposé par l'énoncé semble cohérent.

Pour la suite du problème, on prendra $\beta = 2\alpha = 1/2$.

9. *En partant d'un œuf stocké à température ambiante $T_0 = 20°\text{C}$, déterminer le temps de cuisson nécessaire pour obtenir un œuf mollet.*

   ▶ On raisonne comme aux questions 3 et 4 en injectant les valeurs de l'énoncé dans le résultat de la question 7, puis on résout l'équation obtenue d'inconnue t qui représente le temps nécessaire pour obtenir un œuf mollet :

$$\underbrace{68}_{\approx T_J(t)} = \Big(\underbrace{20}_{=T_0} - \underbrace{100}_{=T_E}\Big) \underbrace{\frac{\frac{1}{2}e^{-t/4} - \frac{1}{4}e^{-t/2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}}_{\text{car } \alpha = 1/4 \text{ et } \beta = 1/2} + \underbrace{100}_{=T_E}$$

$$\begin{aligned}
&\iff 0 = -320\left(\frac{1}{2}e^{-t/4} - \frac{1}{4}e^{-t/2}\right) + 32 \\
&\iff 0 = -10e^{-t/4} + 5\underbrace{e^{-t/2}}_{\substack{=e^{-2t/4} \\ =(e^{-t/4})^2}} + 2 \quad \text{en simplifiant par 16} \\
&\iff 5x^2 - 10x + 2 = 0 \quad \text{en posant } x = e^{-t/4} \iff t = -4\ln(x).
\end{aligned}$$

On reconnaît une équation de degré 2 de discriminant :

$$\Delta = (-10)^2 - 4 \times 5 \times 2 = 100 - 40 = 60 > 0.$$

L'équation admet donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-(-10) - \sqrt{60}}{2 \times 5} = \frac{10 - 2\sqrt{15}}{10} = \frac{5 - \sqrt{15}}{5} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{15}}{5}.$$

Or $9 < 15 < 16$ donc $3 < \sqrt{15} < 4$ par stricte croissance de la fonction racine. On en déduit que :

$$\frac{1}{5} < x_1 < \frac{2}{5} < 1 < \frac{8}{5} < x_2 < \frac{9}{5}.$$

Ce qui donne comme solutions pour l'inconnue $t = -4\ln(x)$:

$$\underbrace{-4\ln\left(\frac{1}{5}\right)}_{=4\ln(5)>0} > \underbrace{-4\ln(x_1)}_{=t_1} > \underbrace{-4\ln\left(\frac{2}{5}\right)}_{=4\ln(5/2)>0} > \underbrace{-4\ln(1)}_{=0} > \underbrace{-4\ln\left(\frac{8}{5}\right)}_{<0} > \underbrace{-4\ln(x_2)}_{=t_2} > \underbrace{-4\ln\left(\frac{9}{5}\right)}_{<0}$$

par stricte croissance de la fonction logarithme. La solution $t = t_2$ est donc absurde car $t \in \mathbb{R}_+$. Finalement, on a :

$$t = -4\ln\left(\frac{5-\sqrt{15}}{5}\right) = 4\ln\left(\frac{5}{5-\sqrt{15}}\right) = 4\ln\left(\frac{5\left(5+\sqrt{15}\right)}{25-15}\right) = \boxed{4\ln\left(\frac{5+\sqrt{15}}{2}\right)}.$$

Numériquement, on obtient $t \approx 5{,}959$. Il faut donc un peu moins de 6min de cuisson pour obtenir un œuf mollet lorsqu'il est conservé à température ambiante.

10. *Pour toute fonction temporelle $t \mapsto f(t)$, on définit sa valeur moyenne entre les instants t_1 et t_2 par :*

$$\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\mathrm{d}t.$$

Sachant que, partant d'un œuf stocké à température ambiante $T_0 = 20$°C, il faut un peu moins de 10min de cuisson pour obtenir un œuf dur, calculer une valeur approchée de la température moyenne du jaune durant cette cuisson.

▶ On injecte les valeurs de l'énoncé dans résultat de la question 7 comme à la question précédente, puis on calcule la valeur moyenne de la fonction $t \mapsto T_J(t)$ entre les instants $t_1 = 0$ et $t_2 = 10$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{10-0}\int_0^{10} T_J(t)\mathrm{d}t &= \frac{1}{10}\int_0^{10}\left((20-100)\frac{\frac{1}{2}e^{-t/4}-\frac{1}{4}e^{-t/2}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}+100\right)\mathrm{d}t \\
&= -16\int_0^{10} e^{-t/4}\mathrm{d}t + 8\int_0^{10} e^{-t/2}\mathrm{d}t + 10\int_0^{10} 1\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= -16\left[\frac{e^{-t/4}}{-1/4}\right]_0^{10} + 8\left[\frac{e^{-t/2}}{-1/2}\right]_0^{10} + 10\left[t\right]_0^{10} \\
&= 64\left(e^{-10/4}-1\right) - 16\left(e^{-10/2}-1\right) + 10(10-0) \\
&= \boxed{64e^{-5/2} - 16e^{-5} + 52}.
\end{aligned}$$

Numériquement, on obtient une température moyenne d'environ 57°C.

Exercice 2
Énoncé et corrigé de L.-C. Lefèvre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit la fonction $f_n : x \mapsto x^n + \dfrac{x}{n} - 1$ sur $[0, +\infty[$.

1. Tracer le tableau de variations de f_n.

▶ La fonction f_n est dérivable et on calcule $f_n'(x) = nx^{n-1} + \frac{1}{n}$. Mais si $x \geqslant 0$ alors $x^{n-1} \geqslant 0$, de plus $\frac{1}{n} > 0$ (toujours), donc $f_n'(x) > 0$. La fonction est donc strictement croissante. De plus $f_n(0) = -1$ et la limite de f_n en $+\infty$ est $+\infty$, car chacun des deux termes x^n et $\frac{x}{n}$ tend vers $+\infty$ (attention c'est bien x qui tend vers $+\infty$ et pas n) d'où le tableau de variations :

x	0		$+\infty$
$f_n(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Justifier que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0, 1[$, qu'on appelle x_n.

▶ On calcule $f_n(1) = 1 + \frac{1}{n} - 1 = \frac{1}{n} > 0$. On peut s'aider en plaçant 1 sur le tableau de variations :

x	0	x_n	1	$+\infty$
$f_n(x)$	-1 $\nearrow$	0 $\nearrow$	$\frac{1}{n}$ $\nearrow$	$+\infty$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, et comme f_n est strictement croissante, il existe bien un unique nombre $x_n \in [0, 1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$ et comme $f_n(0) \neq 0$ et $f_n(1) \neq 0$ le nombre x_n est en fait bien dans $]0, 1[$.

3. Écrire une fonction Python `f(n, x)` qui prend en argument l'entier n et un nombre réel $x \geqslant 0$ et renvoie la valeur de $f_n(x)$.

▶ Vraiment peu de surprise pour cette question.

```
def f(n, x):
    return x**n + x/n - 1
```

4. Le but est de rechercher par dichotomie une approximation de la solution x_n. Recopier et compléter la fonction suivante pour qu'à tout moment on ait $a \leqslant x_n \leqslant b$ et qu'à la fin de la boucle l'écart $b - a$ soit strictement inférieur à la valeur ϵ passée en argument :

```
def solution(n, epsilon):
    a = ...
    b = ...
    while ... :
        m = (a+b) / 2
        ...
    return (a, b)
```

▶ Il s'agit d'une recherche par dichotomie classique. Comme annoncé on veut qu'à tout moment les variables a et b vérifient $a \leqslant x_n \leqslant b$ donc on initialise à $a = 0$ et $b = 1$. La condition dans la boucle est $b - a \geqslant \epsilon$, qui est le contraire de $|b - a| < \epsilon$ (mais les valeurs absolues ne sont pas nécessaires car on sait que $b > a$ donc $b - a > 0$). Enfin, il faut tester la valeur de $f_n(m)$ et s'aider du tableau de variations :

```
def solution(n, epsilon):
    a = 0
    b = 1
    while b-a >= epsilon:
        m = (a+b) / 2
        if f(n, m) > 0:
            # tableau de variations : la solution est entre a et m
            # donc il faut changer b
            b = m
        else:
            # sinon, elle est entre m et b : changer a
            a = m
    return (a, b)
```

Problème 2
Énoncé et corrigé de L.-C. Lefèvre

Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![0,n-1]\!]\times[\![0,p-1]\!]}$ une matrice à n lignes et p colonnes, où les lignes et les colonnes sont numérotées à partir de 0. On appelle **chemin** dans A une suite de coefficients partant du coin en haut à gauche $a_{0,0}$, allant jusqu'au coin en bas à droite $a_{n-1,p-1}$, et tel que chaque coefficient est soit immédiatement à droite soit immédiatement en dessous du précédent (on dit que les coefficients sont **adjacents**). Ainsi nos chemins se déplacent toujours vers le bas droit. On s'intéresse à la somme des coefficients sur un chemin.

Par exemple pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ on peut tracer les chemins suivants, avec indiqué en dessous la somme des coefficients sur le chemin :

$$\underset{9+9+2+6+9=35}{\begin{pmatrix} \mathbf{9} \rightarrow \mathbf{9} & 5 \\ \quad\ \ \downarrow & \\ 1 \quad \mathbf{2} & 5 \\ \quad\ \ \downarrow & \\ 4 \quad \mathbf{6} & \!\!\rightarrow \mathbf{9} \end{pmatrix}} \qquad \underset{9+1+4+6+9=29}{\begin{pmatrix} \mathbf{9} & 9 & 5 \\ \downarrow & & \\ \mathbf{1} & 2 & 5 \\ \downarrow & & \\ \mathbf{4} \rightarrow & \mathbf{6} \rightarrow & \mathbf{9} \end{pmatrix}} \qquad \underset{9+1+2+5+9=26}{\begin{pmatrix} \mathbf{9} & 9 & 5 \\ \downarrow & & \\ \mathbf{1} \rightarrow & \mathbf{2} \rightarrow & \mathbf{5} \\ & & \downarrow \\ 4 & 6 & \mathbf{9} \end{pmatrix}} \qquad (*)$$

Le but du problème est de déterminer la somme minimale que l'on peut former, parmi tous les chemins dans la matrice A. Dans cet exemple, c'est le chemin de droite qui a une somme égale à 26, et on peut montrer que c'est bien la somme minimale parmi tous les chemins possibles pour cette matrice-là.

1. Préliminaires

On représente les matrices de taille $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ par des listes de listes ; plus précisément une matrice A de taille (n,p) est donnée par la **liste** de ses **lignes**. Ainsi le coefficient $a_{i,j}$ est bien donné par `A[i][j]`.

1. (a) Quelle matrice la liste `[[9, 3, 4], [2, 6, 7]]` représente-t-elle ?

   ▶ C'est la matrice

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

   (b) Quelle liste de listes représente la matrice $\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$?

   ▶ C'est la liste

   `[[9, 2], [3, 6], [4, 7]]`

2. Si `A` représente une matrice à n lignes et p colonnes, qu'est-ce que `len(A)` ? Et `len(A[0])` ? **Justifier**.

   ▶ `len(A)` est la longueur de `A` vue comme une liste, or `A` est une liste de lignes, donc c'est le nombre de lignes donc c'est n. `len(A[0])` est la longueur de la liste qui est la première ligne de `A`, donc c'est le nombre de colonnes, donc c'est p.

3. Laquelle de ces deux syntaxes permet de créer une matrice nulle à n lignes et p colonnes ? **Justifier**.

   (i) `[[0 for i in range(n)] for j in range(p)]`

   (ii) `[[0 for j in range(p)] for i in range(n)]`

   ▶ Il s'agit de la deuxième car c'est une liste de longueur n dont les éléments sont des listes nulles de longueur p, alors que pour la première c'est l'inverse.

   ... Sauf si $n = p$ auquel cas les deux syntaxes donnent bien une matrice carrée ! Les indices i, j n'ont pas d'importance ici et d'ailleurs on peut aussi écrire `for _ in range(n)` pour itérer sans donner de nom à la variable.

4. Écrire une fonction `miroir(L)` qui prend en argument une liste `L` (de taille quelconque) et qui renvoie une nouvelle liste qui est le miroir de `L`, c'est à dire la liste rangée en ordre inverse.
Par exemple, `miroir([4, 2, 5, 3, 3])` doit renvoyer `[3, 3, 5, 2, 4]`.

▶ Il faut d'abord créer une nouvelle liste nulle, qu'on appelle `M`, puis l'élément `M[i]` est alors égal à `L[n-1-i]` (où `n` est la longueur de `L`). Les fonctions suivantes sont valables :

```
def miroir(L):
    n = len(L)
    M = [0 for i in range(n)]
    for i in range(n):
        M[i] = L[n-1-i]
    return M
```

ainsi que

```
def miroir(L):
    n = len(L)
    M = []
    for i in range(n):
        M.append(L[n-1-i])
    return M
```

Remarque : Plus dans l'esprit d'un programmeur Python (mais moins d'un sujet d'algorithmique !), on a les syntaxes `[L[n-1-i] for i in range(len(L))]` (liste en compréhension) ainsi que tout simplement `L[::-1]` (sélection de tranche, du début, à la fin, avec un pas de `-1`).

2. Calcul du minimum

Pour résoudre notre problème, il serait très inefficace de lister tous les chemins puis de chercher lesquels ont une longueur minimale. Partant d'une matrice A, on forme alors une matrice $S = (s_{i,j})$ de même taille que A appelée **matrice des sommes minimales** où $s_{i,j}$ est la somme minimale obtenus sur les chemins reliant le coefficient $a_{0,0}$ (coin haut gauche de A) au coefficient $a_{i,j}$. Dans l'exemple $(*)$ avec $A = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, on trouve $S = \begin{pmatrix} 9 & 18 & 23 \\ 10 & 12 & 17 \\ 14 & 18 & 26 \end{pmatrix}$, ce qui démontre que 26 est bien la somme minimale qu'on peut réaliser par des chemins allant du coin haut gauche au coin bas droit.

La matrice S se calcule pas à pas en partant du coin haut gauche.

5. Montrer que (on pourra admettre ces formules pour passer à la suite) les coefficients de S se calculent avec la relation de récurrence suivante :
   (i) $s_{0,0} = a_{0,0}$
   (ii) Pour $i \in [\![0, n-2]\!]$, $s_{i+1,0} = s_{i,0} + a_{i+1,0}$
   (iii) Pour $j \in [\![0, p-2]\!]$, $s_{0,j+1} = s_{0,j} + a_{0,j+1}$
   (iv) Pour $i \in [\![0, n-2]\!]$ et $j \in [\![0, p-2]\!]$: $s_{i+1,j+1} = s_{i+1,j} + a_{i+1,j+1}$ si $s_{i+1,j} < s_{i,j+1}$, et $s_{i,j+1} + a_{i+1,j+1}$ sinon

▶ D'abord le chemin commence au haut à gauche, donc la somme sur le chemin joignant $a_{0,0}$ à lui-même est simplement $a_{0,0}$. Ceci est la relation (i).

Pour un coefficient d'indice (i, j) se trouvant sur la colonne la plus à gauche, alors $j = 0$. Mais comme le chemin ne peut se déplacer que vers le bas ou la droite, alors pour aller à la ligne suivante (le coefficient $(i+1, 0)$) il faut un chemin vertical, la somme correspondante $s_{i+1,0}$ est donc obtenue en sommant avec $a_{i+1,0}$. Ceci explique la relation (ii). De même, la relation (iii) traduit que pour arriver en $(0,j+1)$ (première ligne) on a pour seule possibilité un chemin horizontal, donc passant par $(0,j)$ juste avant.

Enfin dans le dernier cas, par rapport au coefficient d'indice (i,j) alors supposons que l'on connaisse les valeurs $s_{i,j}$, $s_{i+1,j}$ et $s_{i,j+1}$, représentons cela :

$$\begin{pmatrix} a_{i,j} & & a_{i,j+1} \\ & & \downarrow \\ a_{i+1,j} & \rightarrow & a_{i+1,j+1} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} s_{i,j} & & s_{i,j+1} \\ & & \downarrow \\ s_{i+1,j} & \rightarrow & s_{i+1,j+1} \end{pmatrix}$$

Il y a deux façons d'arriver au coefficient $(i+1,j+1)$: soit par la gauche, soit par au-dessus. Mais on choisira le chemin qui donne une plus petite somme, ainsi la somme minimale $s_{i+1,j+1}$ est égale à la somme de $a_{i+1,j+1}$ avec soit la somme du chemin arrivant par la gauche (c'est $s_{i+1,j}$) soit de celle du chemin arrivant par au-dessus (c'est $s_{i,j+1}$) en fonction tout simplement duquel donne la plus petite somme.

6. (a) En appliquant ce procédé, déterminer la matrice des sommes minimales pour $B = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 8 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

   ► On applique pas à pas, en commençant par un 5 dans le coin haut gauche. Puis on remplit facilement la première ligne et la première colonne. On trouve d'abord

$$S = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 16 \\ 13 & * & * \\ 15 & * & * \end{pmatrix}$$

   Ensuite on voit par exemple que pour remplir $s_{1,1}$ le chemin aura une somme plus petite en passant par la gauche que par au-dessus (ce qui correspond dans B au fait que le chemin $5 \to 8$ a une somme plus petite que $5 \to 9$) qu'il faut encore sommer avec 7 donc on complète par $13 + 7 = 20$:

$$S = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 16 \\ 13 & 20 & * \\ 15 & * & * \end{pmatrix}$$

   Poursuivant le procédé, on complète chaque $*$ en prenant le coefficient soit à gauche soit au-dessus et en sommant avec le coefficient correspondant de B. On arrive à

$$S = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 16 \\ 13 & 20 & 17 \\ 15 & 20 & * \end{pmatrix}$$

   puis

$$S = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 16 \\ 13 & 20 & 17 \\ 15 & 20 & 20 \end{pmatrix}$$

   (b) En déduire que la somme minimale de B, parmi tous les chemins reliant le coin haut gauche au coin bas droit, est égale à 20.

   ► C'est par définition le coefficient qui apparait tout en bas à droite de S, et si les calculs sont corrects c'est bien 20.

7. (a) Compléter le programme suivant pour écrire une fonction `matrice_sommes_minimales(A)` qui renvoie la matrice S des sommes minimales d'une matrice A passée en argument en utilisant les relations de récurrence de la question 5.

```
def matrice_sommes_minimales(A):
    n = ...
    p = ...
    S = ...
```

```
    for i in range(...):
        S[i+1][0] = ...
    for j in range(...):
        S[0][j+1] = ...
    for i in range(...):
        for j in range(...):
            ...
    return S
```

▶ Le programme pré-écrit traduit presque directement les relations de récurrence. On n'hésite pas à utiliser les résultats de la partie préliminaire : `n` et `p` représentent la taille de `A`, `S` est au départ une matrice nulle. Les indices de listes et de matrices coïncident car les matrices sont indicées depuis le début à partir de 0 : pas de piège.

```
def matrice_sommes_minimales(A):
    # nombre de lignes de A
    n = len(A)
    # nombre de colonnes
    p = len(A[0])
    # matrice nulle de même taille que A
    S = [[0 for j in range(p)] for i in range(n)]
    # relation (i)
    S[0][0] = A[0][0]
    # relation (ii)
    for i in range(n-1):
        S[i+1][0] = S[i][0] + A[i+1][0]
    # relation (iii)
    for j in range(p-1):
        S[0][j+1] = S[0][j] + A[0][j+1]
    # relation (iv)
    for i in range(n-1):
        for j in range(p-1):
            if S[i+1][j] < S[i][j+1]:
                S[i+1][j+1] = S[i+1][j] + A[i+1][j+1]
            else:
                S[i+1][j+1] = S[i][j+1] + A[i+1][j+1]
    return S
```

Admirez d'ailleurs comme, même si on ne comprenait pas ces manipulations d'indices i, j, le programme traduit directement les relations de récurrence... Tout le jeu dans ce type d'algorithme est d'écrire proprement les relations de récurrence !

(b) En déduire une fonction `somme_minimale(A)` qui renvoie la somme minimale des chemins de A.

▶ Il suffit d'appeler la fonction précédente, et de renvoyer son coefficient en bas à droite !

```
def somme_minimale(A):
    n = len(A)
    p = len(A[0])
    S = matrice_sommes_minimales(A)
    return S[n-1][p-1]
```

3. Calcul sur les chemins

Un chemin dans une matrice sera représenté tout simplement par une **liste** de **tuples** `(i, j)` représentant la suite de coefficients par lesquels passe le chemin. Dans notre exemple initial $(*)$, les chemins sont représentés respectivement par

— `[(0, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1), (2, 2)]`

— `[(0, 0), (1, 0), (2, 0), (2, 1), (2, 2)]`

— `[(0, 0), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 2)]`

8. La fonction suivante contient une ou plusieurs erreurs. Le but est qu'elle renvoie `True` si la liste de tuples (supposée non-vide) passée en argument représente bien un chemin partant du coin haut gauche et constitué de coefficients adjacents, et `False` sinon. Recopier et corriger la fonction :

```
def est_chemin(L):
    # si L[0] n'est pas le coin haut gauche, c'est faux
    (i, j) = L[0]
    if i != 0 and j != 0:
        return False
    # puis il faut tester si les coefficients sont adjacents
    for k in range(len(L)):
        (i, j) = L[k]
        (i2, j2) = L[k+1]
        # teste si le coeffcient suivant est à droite ou en dessous
        if (i2 == i and j2 == j+1) or (i2 == i+1 and j2 == j):
            return True
        else:
            return False
```

► La fonction contient les erreurs suivantes :

— Au début on veut tester si le coefficient (i, j) est ou pas celui en haut à gauche, c'est à dire $(0, 0)$. Mais cela signifie $i = 0$ **et** $j = 0$, dont la négation est $i \neq 0$ **ou** $j \neq 0$. En Python il faut donc écrire `if i != 0 or j != 0`. Le reste de la logique est correct pour cette partie.

— On veut comparer les indices `L[k]` et `L[k+1]`. La borne du `range` n'est alors pas correcte car quand `k` sera le dernier indice possible alors d'indice `k+1` sera hors de la liste, il faut écrire `for k in range(len(L)-1)`

— Enfin sans cesse la même erreur : le test permet bien de savoir si le coefficient suivant est bien à droite ou en dessous, mais si cela est vrai, alors à cause du `return` la fonction s'arrête. Or on veut poursuivre la boucle, pour tester tous les coefficients du chemin. Il faut donc « penser à l'envers » et arrêter la boucle quand cette condition **n'est pas** réalisée, sinon renvoyer **`True` à la fin** et **hors de la boucle**. Le plus simple pour tester la condition contraire est d'utiliser `not`.

```
def est_chemin(L):
    (i, j) = L[0]
    if i != 0 or j != 0:
        return False
    for k in range(len(L)-1):
        (i, j) = L[k]
        (i2, j2) = L[k+1]
        if not((i2 == i and j2 == j+1) or (i2 == i+1 and j2 == j)):
            return False
    return True
```

9. Écrire une fonction `somme_chemin(A, L)` qui prend en argument une matrice `A` et un chemin `L` et qui renvoie la somme des coefficients de A le long du chemin donné.

   ▶ On s'inspire de la boucle de la question précédente pour obtenir les coefficients `(i, j)` sur le chemin. Puis il s'agit d'un programme qui calcule tout simplement la somme (comme d'habitude !) des `A[i][j]`, il faut donc introduire une variable `s` qui accumule les sommes.

```
def somme_chemin(A, L):
    s = 0
    for k in range(len(L)):
        (i, j) = L[k]
        s = s + A[i][j]
    return s
```

   Remarque : Plus dans l'esprit du programmeur Python, on pourra itérer directement sur `L` avec la syntaxe `for (i, j) in L`.

4. Recherche du chemin

La méthode présentée permet de calculer la somme minimale des chemins joignant le coin haut gauche au coin bas droit, mais elle ne dit pas quel chemin donne ce minimum. Il pourrait d'ailleurs y en avoir plusieurs.

Pour trouver un chemin donnant une somme minimale, dans une matrice A donnée, on s'y prend de la façon suivante :

— On calcule la matrice S des sommes minimales,

— On démarre au coin bas droit de A. On note i et j les numéros de ligne et de colonnes actuels. Tant qu'on n'est pas remonté jusqu'au coin haut gauche alors :

  — Si on se trouve sur la première colonne, on remonte d'une ligne.

  — Si $s_{i-1,j} < s_{i,j-1}$, c'est que la somme minimale $s_{i-1,j}$ pour relier le coin haut gauche au coefficient $a_{i-1,j}$ est inférieure à celle pour relier le coin haut gauche au coefficient $a_{i,j-1}$; autrement dit, pour arriver à $a_{i,j}$ le chemin de somme minimal provient du coefficient d'au-dessus. On remonte alors d'une ligne.

  — Dans tous les autres cas, on remonte d'une colonne.

10. (a) Implémenter cet algorithme en écrivant une fonction `remonter_chemin(A)` qui prend en argument une matrice A et qui renvoie la liste des tuples qui donnent les coefficients parcourus par cet algorithme, partant du coin bas droit et remontant jusqu'au coin haut gauche.

    ▶ On utilise une boucle `while` pour implémenter ceci : on a besoin de deux variables i, j et tant que $(i, j) \neq (0, 0)$ on continue la boucle. On a aussi besoin de déclarer une liste `L` qui accumule les coefficients visités : dans la boucle on fera `L.append((i, j))` (il y a deux parenthèses car c'est la méthode `append`, qui prend en argument le tuples `(i, j)}`.

```python
def remonter_chemin(A):
    n = len(A)
    p = len(A[0])
    S = matrice_sommes_minimales(A)
    L = []
    i = n - 1
    j = p - 1
    while i != 0 or j != 0:
        L.append((i, j))
        # première colonne : remonter
        if j == 0:
            i = i - 1
        # suivre l'algorithme
        elif S[i-1][j] < S[i][j-1]:
            i = i - 1
        else:
            j = j - 1
    return L
```

(b) En déduire une fonction `chemin(A)` qui renvoie un chemin de somme minimale dans A, rangé dans l'ordre depuis le coin haut gauche jusqu'au coin bas droit.

▶ Il suffit d'utiliser la fonction `miroir` du tout début du sujet ! Et un détail : éventuellement dans la fonction précédente il manque le coefficient $(0, 0)$, qu'on peut rajouter manuellement en fin de boucle.

```python
def chemin(A):
    L = remonter_chemin(A)
    L.append((0, 0))
    return miroir(L)
```

11. En appliquant ce procédé sur l'exemple 6 avec $B = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 8 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, donner un chemin de somme minimal pour B.

▶ Écrivons côte à côte

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 8 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 5 & 14 & 16 \\ 13 & 20 & 17 \\ 15 & 20 & 20 \end{pmatrix}$$

On part du coefficient $(2, 2)$ (bas droite). L'algorithme nous dit qu'il faut remonter d'une ligne, car il faut une somme de seulement 17 pour arriver par au-dessus alors qu'il faut déjà 20 pour arriver à droite… donc le chemin termine ainsi :

$$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 2 \\ & & \\ 8 & 7 & \mathbf{1} \\ & & \downarrow \\ 2 & 5 & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Là encore, partant de ce coefficient $(1, 2)$, il faut une somme de 20 pour arriver par la gauche, et de seulement 16 pour arriver par au-dessus, c'est donc que le chemin provient d'au-dessus :

$$\begin{pmatrix} 5 & 9 & \mathbf{2} \\ & & \downarrow \\ 8 & 7 & \mathbf{1} \\ & & \downarrow \\ 2 & 5 & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

Arrivé ici on n'a plus le choix, le chemin provient de la gauche en étant horizontal.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \rightarrow & \mathbf{9} & \rightarrow & \mathbf{2} \\ & & & & \downarrow \\ 8 & & 7 & & \mathbf{1} \\ & & & & \downarrow \\ 2 & & 5 & & \mathbf{3} \end{pmatrix}$$

DS n° 7 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

Exercice (Raisonnement)

Le but de cet exercice est de montrer que $e^r \notin \mathbb{Q}$ si $r \in \mathbb{Q}^*$, et en particulier que la constante e est irrationnelle. Pour cela, on considère pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ la fonction suivante :

$$f_n : x \mapsto \frac{1}{n!} \int_{-x}^{x} \left(x^2 - t^2\right)^n e^t \mathrm{d}t.$$

1. Soit $x > 0$.
   (a) En minorant et majorant la quantité $\left(x^2 - t^2\right)^n$ pour $t \in [-x, x]$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$0 < f_n(x) \leqslant \frac{x^{2n}}{n!} \left(e^x - e^{-x}\right).$$
   (b) En déduire que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
   (c) Qu'en est-il pour $x < 0$? Et pour $x = 0$?
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $f_0(x)$ et $f_1(x)$.
3. On fixe $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ dans cette question. À l'aide d'intégrations par parties, montrer que :
   $$f_{n+2}(x) = \frac{2}{(n+1)!} \int_{-x}^{x} t \left(x^2 - t^2\right)^{n+1} e^t \mathrm{d}t = -2(2n+3) f_{n+1}(x) + 4x^2 f_n(x).$$

Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, on définit par récurrence deux suites $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ Q_0(x) = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} P_1(x) = 2x - 2 \\ Q_1(x) = 2x + 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} P_{n+2}(x) = -2(2n+3) P_{n+1}(x) + 4x^2 P_n(x) \\ Q_{n+2}(x) = -2(2n+3) Q_{n+1}(x) + 4x^2 Q_n(x). \end{cases}$$

4. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que P_n et Q_n sont des polynômes de degré n dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{Z}$ et que : $f_n(x) = P_n(x)e^x + Q_n(x)e^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. **[Info.]** Écrire chaque fonction demandée en Python. On pourra appeler les fonctions des questions précédentes même si elles n'ont pas été écrites. On représentera un polynôme par la liste de ses coefficients. Par exemples, le polynôme $x \mapsto 3x^2 - 1$ est représenté par la liste `[-1,0,3]` et la liste `[2,-1,0,1]` représente le polynôme $x \mapsto x^3 - x + 2$.
   (a) Écrire une fonction `multiplication(a,L)` qui prend en arguments un réel a et une liste représentant un polynôme $R : x \mapsto R(x)$, puis qui renvoie la liste représentant $x \mapsto aR(x)$.
   (b) Écrire une fonction `somme(L1,L2)` qui prend en arguments deux listes (pas nécessairement de même longueur) représentant deux polynômes $R_1 : x \mapsto R_1(x)$ et $R_2 : x \mapsto R_2(x)$, puis qui renvoie la liste représentant $x \mapsto R_1(x) + R_2(x)$.
   (c) Écrire une fonction `produit(L1,L2)` qui prend en arguments deux listes représentant deux polynômes, puis qui renvoie la liste représentant le produit de ces deux polynômes.
   (d) Écrire deux fonctions `calculeP(n)` et `calculeQ(n)` qui prend en argument l'entier $n \in \mathbb{N}$, puis qui renvoie les listes représentant les polynômes P_n et Q_n respectivement.
6. Dans cette question, on fixe $p \in \mathbb{N}^*$ et on suppose qu'il existe $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $e^p = a/b$.
   (a) D'après les résultats précédents, montrer que $abf_n(p) \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire que $e^p \notin \mathbb{Q}$ si $p \in \mathbb{N}^*$.
7. (a) En vous inspirant des raisonnements précédents, montrer que $e^r \notin \mathbb{Q}$ si $r \in \mathbb{Q}^*$. Indication : commencer par le cas où $r = \alpha/\beta \in \mathbb{Q}_+^*$ et montrer que $ab\beta^n f_n(r) \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Que peut-on en déduire pour $\ln(r)$ si $r \in \mathbb{Q}_+^* \setminus \{1\}$?

Problème (Modélisation)
Le climat des régions tempérées est caractérisé par une alternance de périodes de beau temps et de mauvais temps, entrecoupées par des périodes plus brèves et plus extrêmes de froid intense ou de forte chaleur.

Ce problème propose d'étudier un modèle (très) simplifié de ce type de climat comportant quatre états : gel (noté G), pluie (noté P), soleil (noté S) et canicule (noté C). On suppose que ces états évoluent quotidiennement selon les règles suivantes :

— s'il gèle un jour, alors, le lendemain, ou bien il continue de geler avec probabilité $1/7$ ou bien il pleut avec probabilité $6/7$;

— s'il pleut un jour, alors, le lendemain, ou bien il gèle avec probabilité $1/7$, ou bien il continue de pleuvoir avec probabilité $3/7$, ou bien le soleil succède à la pluie avec probabilité $3/7$;

— s'il fait soleil un jour, alors, le lendemain, ou bien le temps se dégrade à la pluie avec probabilité $3/7$, ou bien il reste ensoleillé avec probabilité $3/7$, ou bien il devient caniculaire avec probabilité $1/7$;

— si un jour est caniculaire, alors, le lendemain, ou bien le temps redevient simplement ensoleillé avec probabilité $6/7$, ou bien il reste caniculaire avec probabilité $1/7$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note G_n (respectivement P_n, S_n et C_n) l'événement «il gèle (respectivement il pleut, il fait soleil, c'est caniculaire) le jour n», et $g_n = \mathbb{P}(G_n)$ (respectivement $p_n = \mathbb{P}(P_n)$, $s_n = \mathbb{P}(S_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$) sa probabilité. On suppose qu'il fait soleil au jour initial $n = 0$, ainsi $s_0 = 1$ et $g_0 = p_0 = c_0 = 0$.

1. **[Info.]** Écrire chaque fonction demandée en Python. On pourra appeler les fonctions des questions précédentes même si elles n'ont pas été écrites. Pour rappel, l'instruction `random.randint(a,b)` de la bibliothèque `random` renvoie un entier aléatoire compris entre `a` inclus et `b` inclus.
   (a) Écrire une fonction `lendemain(etat)` qui prend en argument l'état d'un jour sous la forme d'un caractère `'G'`, `'P'`, `'S'` ou `'C'`, qui choisit un entier aléatoire entre 1 et 7, puis qui renvoie l'état du lendemain sous la même forme. Indication : utiliser plusieurs instructions `if`.
   (b) Écrire une fonction `simulation(n)` qui prend en argument l'entier $n \in \mathbb{N}$, qui simule le modèle jusqu'au jour n en partant de l'état initial `etat='S'`, puis qui renvoie l'état du jour n.
   (c) Écrire une fonction `frequences(n,nbSimul)` qui prend en argument deux entiers, qui simule le modèle `nbSimul` fois, puis qui renvoie la liste `F=[F[0],F[1],F[2],F[3]]` des fréquences d'apparition des événements G_n, P_n, S_n et C_n parmi ces simulations. Par exemple, `F[2]` est égal au rapport du nombre de fois où du soleil est observé le jour n par le nombre de simulations.
2. Calculer g_1, p_1, s_1 et c_1.
3. On fixe $n \in \mathbb{N}$ dans cette question.
   (a) Que peut-on dire des événements G_n, P_n, S_n et C_n ?
   (b) Justifier que $7g_{n+1} = g_n + p_n$ en citant précisément la formule utilisée.
   (c) Déterminer des expressions similaires pour $7p_{n+1}$ et $7s_{n+1}$ en fonction de g_n, p_n, s_n et c_n.
   (d) Déduire des résultats précédents que $7X_{n+1} = AX_n + Y$ où :
$$X_n = \begin{pmatrix} g_n \\ p_n \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 3 \\ -6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \left(\frac{1}{7}A\right)^n (X_0 - Z) + Z$, où $Z = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
5. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Calculer $D = P^{-1}AP$ et vérifier que le résultat est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux appartiennent à $]-7, 7[$.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^n en fonction de P, P^{-1} et D^n.
   (d) En déduire que chaque coefficient de la matrice $\left(\frac{1}{7}A\right)^n$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.
6. (a) Déduire des résultats précédents les limites des suites $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Interpréter ces résultats.

Corrigé du DS n° 7 de mathématiques et d'informatique

Exercice (Raisonnement)

Le but de cet exercice est de montrer que $e^r \notin \mathbb{Q}$ si $r \in \mathbb{Q}^*$, et en particulier que la constante e est irrationnelle. Pour cela, on considère pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ la fonction suivante :

$$f_n : x \mapsto \frac{1}{n!}\int_{-x}^{x} \left(x^2 - t^2\right)^n e^t \mathrm{d}t.$$

1. *Soit $x > 0$.*

   (a) *En minorant et majorant la quantité $\left(x^2 - t^2\right)^n$ pour $t \in [-x, x]$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$0 < f_n(x) \leqslant \frac{x^{2n}}{n!}\left(e^x - e^{-x}\right).$$

▶ Soient $t \in [-x, x]$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{array}{lll} & 0 \leqslant t^2 \leqslant x^2 & \text{d'après la fonction usuelle } y \mapsto y^2 \\ \text{donc} & -x^2 \leqslant -t^2 \leqslant 0 & \text{en multipliant par } -1 \\ \text{donc} & 0 \leqslant x^2 - t^2 \leqslant x^2 & \text{en ajoutant } x^2 \\ \text{donc} & \boxed{0 \leqslant \left(x^2 - t^2\right)^n \leqslant x^{2n}} & \text{par croissance de la fonction usuelle } y \mapsto y^n \\ \text{donc} & 0 \leqslant \left(x^2 - t^2\right)^n e^t \leqslant x^{2n}e^t & \text{en multipliant par } e^t > 0. \end{array}$$

Puisque $x > 0$, on a $-x < x$. Par conséquent, on peut utiliser la monotonie de l'intégrale :

$$\underbrace{\int_{-x}^{x} 0\mathrm{d}t}_{=0} \leqslant \int_{-x}^{x} \left(x^2 - t^2\right)^n e^t\mathrm{d}t \leqslant \underbrace{\int_{-x}^{x} x^{2n}e^t\mathrm{d}t}_{=\left[x^{2n}e^t\right]_{-x}^{x}}.$$

N'oubliez pas de vérifier l'ordre des bornes de l'intégrale avant d'utiliser la monotonie. Il est nécessaire que les bornes soient dans le bon sens.

En divisant par $n!$, on en déduit que :

$$0 \leqslant \underbrace{\frac{1}{n!}\int_{-x}^{x} \left(x^2 - t^2\right)^n e^t\mathrm{d}t}_{=f_n(x)} \leqslant \frac{x^{2n}}{n!}\left(e^x - e^{-x}\right).$$

De plus, si $f_n(x) = 0$ alors la fonction positive et continue $t \mapsto \left(x^2 - t^2\right)^n e^t$ serait constante égale à 0 par stricte positivité de l'intégrale, ce qui est absurde (par exemple pour $t = 0$). Finalement, on en déduit bien que :

$$\boxed{0 < f_n(x) \leqslant \frac{x^{2n}}{n!}\left(e^x - e^{-x}\right)}.$$

(b) *En déduire que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.*

▶ On sait que $x^{2n} = o_{n\to+\infty}(n!)$ d'après le théorème des croissances comparées, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}\left(e^x - e^{-x}\right) = 0.$$

D'après le résultat de la question précédente et le théorème de limite par encadrement, on en déduit que $\boxed{(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0}$.

(c) *Qu'en est-il pour $x < 0$? Et pour $x = 0$?*

▶ Pour $x < 0$, on a $-x > x$ donc on ne peut plus utiliser la monotonie de l'intégrale comme à la question 1(a). Par contre, on a en échangeant les bornes :

$$0 < \underbrace{\frac{1}{n!}\int_x^{-x}\left(x^2 - t^2\right)^n e^t \mathrm{d}t}_{=-f_n(x)} \leqslant \frac{x^{2n}}{n!}\left(e^{-x} - e^x\right).$$

Par conséquent :

$$\boxed{\frac{x^{2n}}{n!}\left(e^x - e^{-x}\right) \leqslant f_n(x) < 0}.$$

On peut aussi remarquer que f_n est impaire car :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(-x) &= \frac{1}{n!}\int_x^{-x}\left((-x)^2 - t^2\right)^n e^t \mathrm{d}t\\ &= \frac{-1}{n!}\int_{-x}^{x}\left(x^2 - t^2\right)^n e^t \mathrm{d}t = -f_n(x).\end{aligned}$$

Par conséquent, on a d'après le résultat de la question 1(a) :

$$\forall x < 0,\ 0 < \underbrace{f_n(-x)}_{=-f_n(x)} \leqslant \frac{x^{2n}}{n!}\left(e^{-x} - e^x\right)$$

et on retrouve le même résultat en multipliant ces inégalités par -1.

En raisonnant comme à la question 1(b), on en déduit que $\boxed{(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge aussi vers } 0}$.
Pour $x = 0$, on a :

$$f_n(0) = \frac{1}{n!}\int_0^0\left(x^2 - t^2\right)^n e^t \mathrm{d}t = 0.$$

Donc $\boxed{(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge aussi vers } 0}$ puisque cette suite est constante égale à 0.

2. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $f_0(x)$ et $f_1(x)$.*

▶ On a pour $n = 0$:

$$f_0(x) = \underbrace{\frac{1}{0!}}_{=1}\int_{-x}^{x}\underbrace{\left(x^2 - t^2\right)^0}_{=1} e^t \mathrm{d}t = \int_{-x}^{x} e^t \mathrm{d}t = \left[e^t\right]_{-x}^{x} = \boxed{e^x - e^{-x}}.$$

Et pour $n = 1$:

$$f_1(x) = \frac{1}{1!}\int_{-x}^{x}\left(x^2 - t^2\right)^1 e^t \mathrm{d}t = x^2\underbrace{\int_{-x}^{x} e^t \mathrm{d}t}_{=f_0(x)} - \int_{-x}^{x} t^2 e^t \mathrm{d}t \quad \text{par linéarité.}$$

On pose $u : t \mapsto t^2$ et $v' : t \mapsto e^t$, donc $u' : t \mapsto 2t$ et $v : t \mapsto e^t$. Puisque les fonctions usuelles u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, on peut utiliser une intégration par parties (IPP) :

$$\begin{aligned}
\int_{-x}^{x} t^2 e^t \mathrm{d}t &= \int_{-x}^{x} u(t)v'(t)\mathrm{d}t \\
&= \big[u(t)v(t)\big]_{-x}^{x} - \int_{-x}^{x} u'(t)v(t)\mathrm{d}t \quad \text{d'après la formule d'IPP} \\
&= \big[t^2e^t\big]_{-x}^{x} - \int_{-x}^{x} 2te^t\mathrm{d}t \\
&= x^2e^x - (-x)^2e^{-x} - 2\int_{-x}^{x} te^t\mathrm{d}t \\
&= x^2\underbrace{\left(e^x - e^{-x}\right)}_{=f_0(x)} - 2\Big(\big[te^t\big]_{-x}^{x} - \underbrace{\int_{-x}^{x} e^t\mathrm{d}t}_{=f_0(x)}\Big) \quad \text{à l'aide d'une deuxième IPP} \\
&= x^2 f_0(x) - 2\left(xe^x - (-x)e^{-x} - \left(e^x - e^{-x}\right)\right) \quad \text{car } f_0(x) = e^x - e^{-x} \\
&= x^2 f_0(x) - 2(x-1)e^x - 2(x+1)e^{-x}.
\end{aligned}$$

En réinjectant dans l'expression de $f_1(x)$, on obtient :

$$f_1(x) = x^2 f_0(x) - x^2 f_0(x) + 2(x-1)e^x + 2(x+1)e^{-x} = \boxed{(2x-2)e^x + (2x+2)e^{-x}}.$$

3. *On fixe $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ dans cette question. À l'aide d'intégrations par parties, montrer que :*

$$f_{n+2}(x) = \frac{2}{(n+1)!}\int_{-x}^{x} t\left(x^2 - t^2\right)^{n+1} e^t\mathrm{d}t = -2(2n+3)f_{n+1}(x) + 4x^2 f_n(x).$$

► On a :

$$f_{n+2}(x) = \frac{1}{(n+2)!}\int_{-x}^{x} \underbrace{\left(x^2 - t^2\right)^{n+2}}_{u(t)} \underbrace{e^t}_{=v'(t)} \mathrm{d}t.$$

Puisque la fonction $u : t \mapsto \left(x^2 - t^2\right)^{n+2}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale et que la fonction $v : t \mapsto e^t$ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme fonction usuelle, on peut utiliser une IPP :

$$\begin{aligned}
f_{n+2}(x) &= \frac{1}{(n+2)!}\left(\Big[\underbrace{\left(x^2 - t^2\right)^{n+2}}_{u(t)}\underbrace{e^t}_{=v(t)}\Big]_{-x}^{x} - \int_{-x}^{x} \underbrace{(0-2t)\times(n+2)\left(x^2-t^2\right)^{n+1}}_{u'(t)}\underbrace{e^t}_{=v(t)}\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{(n+2)!}\left(\underbrace{\left(x^2 - x^2\right)^{n+2}}_{=0}e^x - \underbrace{\left(x^2 - (-x)^2\right)^{n+2}}_{=0}e^{-x} + 2(n+2)\int_{-x}^{x} t\left(x^2-t^2\right)^{n+1}e^t\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{2(n+2)}{(n+2)!}\int_{-x}^{x} t\left(x^2-t^2\right)^{n+1}e^t\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité} \\
&= \boxed{\frac{2}{(n+1)!}\int_{-x}^{x} t\left(x^2-t^2\right)^{n+1}e^t\mathrm{d}t} \quad \text{car } (n+2)! = (n+1)!\times(n+2).
\end{aligned}$$

De même, puisque la fonction $u : t \mapsto t\left(x^2 - t^2\right)^{n+1}$ est aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale, on peut utiliser une deuxième IPP :

$$\begin{aligned}
f_{n+2}(x) &= \frac{2}{(n+1)!}\left(\begin{array}{l}\left[\underbrace{t\left(x^2-t^2\right)^{n+1}}_{u(t)}\underbrace{e^t}_{=v(t)}\right]_{-x}^{x} \\ -\displaystyle\int_{-x}^{x}\underbrace{\left(1\times\left(x^2-t^2\right)^{n+1}+t\times -2(n+1)t\left(x^2-t^2\right)^n\right)}_{u'(t)}\underbrace{e^t}_{=v(t)}\mathrm{d}t\end{array}\right) \\
&= \frac{2}{(n+1)!}\left(0-\int_{-x}^{x}\left(x^2-t^2\right)^{n+1}e^t\mathrm{d}t+2(n+1)\int_{-x}^{x}t^2\left(x^2-t^2\right)^n e^t\mathrm{d}t\right) \\
&= -2\underbrace{\frac{1}{(n+1)!}\int_{-x}^{x}\left(x^2-t^2\right)^{n+1}e^t\mathrm{d}t}_{=f_{n+1}(x)}+\frac{4}{n!}\int_{-x}^{x}t^2\left(x^2-t^2\right)^n e^t\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité.}
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
&-2(2n+3)f_{n+1}(x)+4x^2f_n(x) \\
=&-2f_{n+1}(x)-2(2n+2)f_{n+1}(x)+4x^2f_n(x) \\
=&-2f_{n+1}(x)+4\left(-(n+1)f_{n+1}(x)+x^2f_n(x)\right) \\
=&-2f_{n+1}(x)+4\left(\underbrace{\frac{-(n+1)}{(n+1)!}}_{=1/n!}\int_{-x}^{x}\left(x^2-t^2\right)^{n+1}e^t\mathrm{d}t+\frac{x^2}{n!}\int_{-x}^{x}\left(x^2-t^2\right)^n e^t\mathrm{d}t\right) \\
=&-2f_{n+1}(x)+\frac{4}{n!}\int_{-x}^{x}\left(-\left(x^2-t^2\right)^{n+1}+x^2\left(x^2-t^2\right)^n\right)\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité} \\
=&-2f_{n+1}(x)+\frac{4}{n!}\int_{-x}^{x}\underbrace{\left(-(x^2-t^2)+x^2\right)}_{=t^2}\left(x^2-t^2\right)^n\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Finalement, on a bien montré que :

$$f_{n+2}(x)=-2f_{n+1}(x)+\frac{4}{n!}\int_{-x}^{x}t^2\left(x^2-t^2\right)^n\mathrm{d}t=\boxed{-2(2n+3)f_{n+1}(x)+4x^2f_n(x)}.$$

Pour chaque $x\in\mathbb{R}$, on définit par récurrence deux suites $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$\begin{cases}P_0(x)=1\\Q_0(x)=-1\end{cases},\quad \begin{cases}P_1(x)=2x-2\\Q_1(x)=2x+2\end{cases}\quad \text{et}\quad \forall n\in\mathbb{N},\ \begin{cases}P_{n+2}(x)=-2(2n+3)P_{n+1}(x)+4x^2P_n(x)\\Q_{n+2}(x)=-2(2n+3)Q_{n+1}(x)+4x^2Q_n(x).\end{cases}$$

4. *Montrer pour tout $n\in\mathbb{N}$ que P_n et Q_n sont des polynômes de degré n dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{Z}$ et que : $f_n(x)=P_n(x)e^x+Q_n(x)e^{-x}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.*

▶ On raisonne par récurrence double.
Initialisation. Pour $n=0$, $P_0 : x\mapsto 1$ et $Q_0 : x\mapsto -1$ sont bien des polynômes de degré 0 dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{Z}$. De plus, on a d'après le résultat de la question 2 :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f_0(x)=e^x-e^{-x}=P_0(x)+Q_0(x).$$

Donc le résultat est vrai pour $n=0$. De même pour $n=1$, $P_1 : x\mapsto 2x-2$ et $Q_1 : x\mapsto 2x+2$ sont bien des polynômes de degré 1 dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{Z}$, et :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f_1(x)=(2x-2)e^x+(2x+2)e^{-x}=P_1(x)+Q_1(x).$$

Donc le résultat est aussi vrai pour $n=1$.
Hérédité. On fixe $n\in\mathbb{N}$ et on suppose que le résultat est vrai aux rangs n et $n+1$. Donc on sait que

P_n est un polynôme de degré n à coefficients entiers, et que P_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$ à coefficients entiers. Or on a :

$$P_{n+2}(x) = \underbrace{-2(2n+3)P_{n+1}(x))}_{\text{degré } n+1} + \underbrace{4x^2P_n(x)}_{\text{degré } 2+n}.$$

On en déduit que P_{n+2} est bien un polynôme (comme somme et produits de polynômes) dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{Z}$ (par somme et produits de coefficients entiers) dont le degré est égal à $\max(n+1, 2+n) = n+2$. On raisonne de même pour prouver que Q_{n+2} est bien un polynôme de degré $n+2$ dont les coefficients appartiennent à $\mathbb{Z}$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{n+2}(x) &= -2(2n+3)f_{n+1}(x) + 4x^2 f_n(x) \\
&\qquad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= -2(2n+3)\left(P_{n+1}(x)e^x + Q_{n+1}(x)e^{-x}\right) + 4x^2\left(P_n(x)e^x + Q_n(x)e^{-x}\right) \\
&\qquad \text{d'après les hypothèses de récurrence} \\
&= \left(-2(2n+3)P_{n+1}(x) + 4x^2P_n(x)\right)e^x + \left(-2(2n+3)Q_{n+1}(x) + 4x^2Q_n(x)\right)e^{-x} \\
&\qquad \text{en développant et regroupant les expressions} \\
&= P_{n+2}(x)e^x + Q_{n+2}(x)e^{-x} \\
&\qquad \text{par définition des suites } (P_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (Q_n(x))_{n\in\mathbb{N}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien montré que le résultat est vrai au rang $n+2$ dès qu'il est vrai aux rangs n et $n+1$. Conclusion. D'après le principe de récurrence double, on en déduit que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, P_n \text{ et } Q_n}$ $\boxed{\text{sont des polynômes de degré } n \text{ dont les coefficients appartiennent à } \mathbb{Z} \text{ et que :}}$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = P_n(x)e^x + Q_n(x)e^{-x}}.$$

5. ***[Info.]*** *Écrire chaque fonction demandée en Python. On pourra appeler les fonctions des questions précédentes même si elles n'ont pas été écrites. On représentera un polynôme par la liste de ses coefficients. Par exemples, le polynôme $x \mapsto 3x^2 - 1$ est représenté par la liste* `[-1,0,3]` *et la liste* `[2,-1,0,1]` *représente le polynôme $x \mapsto x^3 - x + 2$.*

   (a) *Écrire une fonction* `multiplication(a,L)` *qui prend en arguments un réel a et une liste représentant un polynôme $R : x \mapsto R(x)$, puis qui renvoie la liste représentant $x \mapsto aR(x)$.*

   ▶ Par exemple :

```
def multiplication(a,L):
    deg=len(L)-1
    aL=[]
    for k in range(deg+1):
        aL.append(a*L[k])
    return aL
```

   (b) *Écrire une fonction* `somme(L1,L2)` *qui prend en arguments deux listes (pas nécessairement de même longueur) représentant deux polynômes $R_1 : x \mapsto R_1(x)$ et $R_2 : x \mapsto R_2(x)$, puis qui renvoie la liste représentant $x \mapsto R_1(x) + R_2(x)$.*

   ▶ Par exemple :

```
def somme(L1,L2):
    deg1=len(L1)-1
    deg2=len(L2)-1
    deg=max(deg1,deg2)
    L=[]
    for k in range(deg+1):
        if k>deg1:
            L.append(L2[k])
        elif k>deg2:
            L.append(L1[k])
        else:
            L.append(L1[k]+L2[k])
    return L
```

On peut aussi commencer par compléter la liste la moins longue (c'est-à-dire correspondant au polynôme de plus petit degré) avec des 0 *(c'est-à-dire des coefficients nuls) pour obtenir des listes de même longueur. Par exemple :*

```
def somme(L1,L2):
    deg1=len(L1)-1
    deg2=len(L2)-1
    if deg1<deg2:
        for i in range(deg2-deg1)]:
            L1.append(0)
    if deg2<deg1:
        for i in range(deg1-deg2)]:
            L2.append(0)
    deg=max(deg1,deg2)
    L=[]
    for k in range(deg+1):
        L.append(L1[k]+L2[k])
    return L
```

(c) *Écrire une fonction* `produit(L1,L2)` *qui prend en arguments deux listes représentant deux polynômes, puis qui renvoie la liste représentant le produit de ces deux polynômes.*

▶ Par exemple :

```
def produit(L1,L2):
    deg1=len(L1)-1
    deg2=len(L2)-1
    deg=deg1+deg2
    L=[]
    for k in range(deg+1):
        S=0
        for i in range(k+1):
            if i<=deg1 and k-i<=deg2:
                S=S+L1[i]*L2[k-i]
        L.append(S)
    return L
```

(d) *Écrire deux fonctions* `calculeP(n)` *et* `calculeQ(n)` *qui prend en argument l'entier $n \in \mathbb{N}$, puis qui renvoie les listes représentant les polynômes P_n et Q_n respectivement.*

▶ Par exemple :

```python
def calculeP(n):
    P0=[1]
    P1=[-2,2]
    if n==0:
        return P0
    elif n==1:
        return P1
    else:
        for k in range(n-1):
            a=-2*(2*k+3)
            L1=multiplication(a,P1)
            L2=produit([0,0,4],P0)
            P2=somme(L1,L2)
            P0=P1
            P1=P2
        return P2
```

```python
def calculeQ(n):
    Q0=[-1]
    Q1=[2,2]
    if n==0:
        return Q0
    elif n==1:
        return Q1
    else:
        for k in range(n-1):
            a=-2*(2*k+3)
            L1=multiplication(a,Q1)
            L2=produit([0,0,4],Q0)
            Q2=somme(L1,L2)
            Q0=Q1
            Q1=Q2
        return Q2
```

6. *Dans cette question, on fixe $p \in \mathbb{N}^*$ et on suppose qu'il existe $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $e^p = a/b$.*

   (a) *D'après les résultats précédents, montrer que $abf_n(p) \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

   ▶ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} abf_n(p) &= ab\left(P_n(p)e^p + Q_n(p)e^{-p}\right) && \text{d'après le résultat de la question 4} \\ &= ab\left(P_n(p)\frac{a}{b} + Q_n(p)\frac{b}{a}\right) && \text{car } e^p = a/b \text{ et } e^{-p} = 1/e^p = b/a \\ &= a^2P_n(p) + b^2Q_n(p). \end{aligned}$$

   Puisque a, b et p sont des entiers et que les coefficients de P_n et Q_n appartiennent à $\mathbb{Z}$ d'après le résultat de la question 4, on en déduit que $abf_n(p)$ est un entier. D'autre part, $f_n(p) > 0$ d'après le résultat de la question 1(a) ($p > 0$ car $p \in \mathbb{N}^*$) donc $abf_n(p) > 0$ ($a > 0$ et $b > 0$ car $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$). Ainsi, $abf_n(p)$ est un entier strictement positif. On en déduit bien que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad abf_n(p) \geqslant 1}.$$

   (b) *En déduire que $e^p \notin \mathbb{Q}$ si $p \in \mathbb{N}^*$.*

   ▶ On sait que $\lim_{n\to+\infty} f_n(p) = 0$ d'après le résultat de la question 1(b). En passant à la limite dans le résultat de la question précédente, on en déduit donc que :

$$0 = \lim_{n\to+\infty} abf_n(p) \geqslant 1 \quad \text{ce qui est absurde.}$$

   Par l'absurde, on a montré qu'il n'existe pas $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $e^p = a/b$, donc que $\boxed{e^p \notin \mathbb{Q}}$.

7. (a) *En vous inspirant des raisonnements précédents, montrer que $e^r \notin \mathbb{Q}$ si $r \in \mathbb{Q}^*$. Indication : commencer par le cas où $r = \alpha/\beta \in \mathbb{Q}_+^*$ et montrer que $ab\beta^n f_n(r) \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

   ▶ On raisonne par disjonction de cas.
   <u>1er cas : $r > 0$</u>. Soit $r = \alpha/\beta \in \mathbb{Q}_+^*$ où $(\alpha,\beta) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Par l'absurde, on suppose qu'il existe $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $e^r = a/b$. En raisonnant comme à la question 6(a), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad abf_n(r) = a^2P_n(r) + b^2Q_n(r) > 0.$$

   Mais $P_n(r)$ et $Q_n(r)$ ne sont plus nécessairement des entiers puisque $r \in \mathbb{Q}$. Or on sait que P_n est un polynôme de degré n à coefficients entiers d'après le résultat de la question 4. Si on note ses coefficients $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$, on a :

$$P_n(r) = \sum_{k=0}^{n} a_k r^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k = \frac{1}{\beta^n}\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k \beta^{n-k} \quad \text{en mettant au même dénominateur}$$

$$\text{donc} \quad \beta^n P_n(r) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k \beta^{n-k} \in \mathbb{Z} \quad \text{comme somme et produits d'entiers.}$$

On raisonne de même pour prouver que $\beta^n Q_n(r) \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $ab\beta^n f_n(r)$ est un entier strictement positif. On en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad ab\beta^n f_n(r) \geqslant 1}.$$

On a $\lim_{n\to+\infty} \beta^n = +\infty$ dès que $\beta \geqslant 2$, donc on obtient une forme indéterminée si on raisonne comme à la question précédente. Mais on a d'après le résultat de la question 1(a) :

$$0 < \beta^n f_n(r) \leqslant \overbrace{\beta^n \frac{r^{2n}}{n!}}^{(\beta r^2)^n} \left(e^r - e^{-r}\right).$$

Puisque $(\beta r^2)^n = o_{n\to+\infty}(n!)$ d'après le théorème des croissances comparées, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \beta^n f_n(r) = 0$ d'après le théorème de limite par encadrement. On peut reprendre le raisonnement de la question précédente pour en déduire par l'absurde que $\boxed{e^r \notin \mathbb{Q}}$.

2e cas : $r < 0$. Soit $r = -\alpha/\beta \in \mathbb{Q}_-^*$ où $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On raisonne comme dans le 1er cas pour prouver que $ab\beta^n f_n(r)$ est un entier, mais cette fois il est strictement négatif d'après le résultat de la question 1(c). On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad ab\beta^n f_n(r) \leqslant -1.$$

De plus, on a d'après le résultat de la question 1(c) :

$$\frac{(\beta r^2)^n}{n!} \left(e^r - e^{-r}\right) \leqslant \beta^n f_n(r) < 0.$$

Donc on peut raisonner comme dans le 1er cas pour prouver que $\lim_{n\to+\infty} \beta^n f_n(r) = 0$ puis pour conclure par l'absurde que $\boxed{e^r \notin \mathbb{Q}}$.

Conclusion. Dans tous les cas, on a montré que $\boxed{e^r \notin \mathbb{Q} \text{ si } r \in \mathbb{Q}^*}$.

(b) *Que peut-on en déduire pour $\ln(r)$ si $r \in \mathbb{Q}_+^* \setminus \{1\}$?*

▶ Soit $r \in \mathbb{Q}_+^* \setminus \{1\}$. On suppose par l'absurde que $\ln(r) \in \mathbb{Q}$, donc que $\ln(r) \in \mathbb{Q}^*$ car $r \neq 1$. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit que $r = e^{\ln(r)} \notin \mathbb{Q}$ ce qui est absurde. Par conséquent, $\boxed{\ln(r) \notin \mathbb{Q} \text{ si } r \in \mathbb{Q}_+^* \setminus \{1\}}$.

Problème (Modélisation)

Le climat des régions tempérées est caractérisé par une alternance de périodes de beau temps et de mauvais temps, entrecoupées par des périodes plus brèves et plus extrêmes de froid intense ou de forte chaleur.

Ce problème propose d'étudier un modèle (très) simplifié de ce type de climat comportant quatre états : gel (noté G), pluie (noté P), soleil (noté S) et canicule (noté C). On suppose que ces états évoluent quotidiennement selon les règles suivantes :

- *s'il gèle un jour, alors, le lendemain, ou bien il continue de geler avec probabilité $1/7$ ou bien il pleut avec probabilité $6/7$;*
- *s'il pleut un jour, alors, le lendemain, ou bien il gèle avec probabilité $1/7$, ou bien il continue de pleuvoir avec probabilité $3/7$, ou bien le soleil succède à la pluie avec probabilité $3/7$;*
- *s'il fait soleil un jour, alors, le lendemain, ou bien le temps se dégrade à la pluie avec probabilité $3/7$, ou bien il reste ensoleillé avec probabilité $3/7$, ou bien il devient caniculaire avec probabilité $1/7$;*
- *si un jour est caniculaire, alors, le lendemain, ou bien le temps redevient simplement ensoleillé avec probabilité $6/7$, ou bien il reste caniculaire avec probabilité $1/7$.*

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note G_n (respectivement P_n, S_n et C_n) l'événement «il gèle (respectivement il pleut, il fait soleil, c'est caniculaire) le jour n», et $g_n = \mathbb{P}(G_n)$ (respectivement $p_n = \mathbb{P}(P_n)$, $s_n = \mathbb{P}(S_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$) sa probabilité. On suppose qu'il fait soleil au jour initial $n = 0$, ainsi $s_0 = 1$ et $g_0 = p_0 = c_0 = 0$.

1. ***[Info.]** Écrire chaque fonction demandée en Python. On pourra appeler les fonctions des questions précédentes même si elles n'ont pas été écrites. Pour rappel, l'instruction* `random.randint(a,b)` *de la bibliothèque* `random` *renvoie un entier aléatoire compris entre* `a` *inclus et* `b` *inclus.*

   (a) *Écrire une fonction* `lendemain(etat)` *qui prend en argument l'état d'un jour sous la forme d'une chaîne de caractères* `'G'`, `'P'`, `'S'` *ou* `'C'`, *qui choisit un entier aléatoire entre 1 et 7, puis qui renvoie l'état du lendemain sous la même forme. Indication : utiliser plusieurs instructions* `if`.

   ▶ Par exemple :

```
import random
def lendemain(etat):
    alea=random.randint(1,7)
    if etat=='G':
        if alea==1:
            return 'G'
        else:
            return 'P'
    elif etat=='P':
        if alea==1:
            return 'G'
        elif alea<=4:
            return 'P'
        else:
            return 'S'
    elif etat=='S':
        if alea<=3:
            return 'P'
        elif alea<=6:
            return 'S'
        else:
            return 'C'
    else:
        if alea<=6:
            return 'S'
        else:
            return 'C'
```

   (b) *Écrire une fonction* `simulation(n)` *qui prend en argument l'entier $n \in \mathbb{N}$, qui simule le modèle jusqu'au jour n en partant de l'état initial* `etat='S'`, *puis qui renvoie l'état du jour n.*

   ▶

```
def simulation(n):
    etat='S'
    for jour in range(n):
        etat=lendemain(etat)
    return etat
```

   (c) *Écrire une fonction* `frequences(n,nbSimul)` *qui prend en argument deux entiers, qui simule le modèle* `nbSimul` *fois, puis qui renvoie la liste* `F=[F[0],F[1],F[2],F[3]]` *des fréquences d'apparition des événements G_n, P_n, S_n et C_n parmi ces simulations. Par exemple,* `F[2]` *est égal au rapport du nombre de fois où du soleil est observé le jour n par le nombre de simulations.*

   ▶

```
def frequences(n,nbSimul):
    F=[0,0,0,0]
    for simul in range(nbSimul):
        etat=simulation(n)
        if etat=='G':
            F[0]=F[0]+1
        elif etat=='P':
            F[1]=F[1]+1
        elif etat=='S':
            F[2]=F[2]+1
        else:
            F[3]=F[3]+1
    for i in range(4):
        F[i]=F[i]/nbSimul
    return F
```

On peut aussi incrémenter les fréquences directement par `1/nbSimul` *au lieu de* `1` *afin de ne pas avoir besoin de diviser par* `nbSimul` *à la fin. Par exemple :*

```
def frequences(n,nbSimul):
    F=[0,0,0,0]
    for simul in range(nbSimul):
        etat=simulation(n)
        if etat=='G':
            F[0]=F[0]+1/nbSimul
        elif etat=='P':
            F[1]=F[1]+1/nbSimul
        elif etat=='S':
            F[2]=F[2]+1/nbSimul
        else:
            F[3]=F[3]+1/nbSimul
    return F
```

2. *Calculer g_1, p_1, s_1 et c_1.*

▶ D'après l'énoncé, puisqu'il fait soleil au jour initial $n = 0$, alors le lendemain, au jour $n = 1$:

— il n'est pas possible qu'il gèle, donc $\boxed{g_1 = 0}$;

— il pleut avec probabilité $\boxed{p_1 = 3/7}$;

— il fait soleil avec probabilité $\boxed{s_1 = 3/7}$;

— c'est caniculaire avec probabilité $\boxed{c_1 = 1/7}$.

3. *On fixe $n \in \mathbb{N}$ dans cette question.*

(a) *Que peut-on dire des événements G_n, P_n, S_n et C_n ?*

▶ Les événements G_n, P_n, S_n et C_n sont deux à deux incompatibles car deux états ne peuvent pas se produire le même jour (selon ce modèle) et leur union forme l'univers car il n'existe que quatre états possibles (selon ce modèle). On en déduit qu'$\boxed{\text{ils forment un système complet d'événements}}$.

(b) *Justifier que $7g_{n+1} = g_n + p_n$ en citant précisément la formule utilisée.*

▶ Puisque G_n, P_n, S_n et C_n forment un système complet d'événements d'après le résultat de la question précédente, on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$\underbrace{\mathbb{P}(G_{n+1})}_{=g_{n+1}} = \underbrace{\mathbb{P}(G_n)}_{=g_n}\mathbb{P}_{G_n}(G_{n+1}) + \underbrace{\mathbb{P}(P_n)}_{=p_n}\mathbb{P}_{P_n}(G_{n+1}) + \underbrace{\mathbb{P}(S_n)}_{=s_n}\mathbb{P}_{S_n}(G_{n+1}) + \underbrace{\mathbb{P}(C_n)}_{=c_n}\mathbb{P}_{C_n}(G_{n+1}).$$

Or on a d'après l'énoncé :

- s'il gèle alors il gèle le lendemain avec probabilité $\mathbb{P}_{G_n}(G_{n+1}) = 1/7$;
- s'il pleut alors il gèle le lendemain avec probabilité $\mathbb{P}_{P_n}(G_{n+1}) = 1/7$;
- s'il fait soleil alors il n'est pas possible qu'il gèle le lendemain, donc $\mathbb{P}_{S_n}(G_{n+1}) = 0$;
- si c'est caniculaire alors il n'est pas possible qu'il gèle le lendemain, donc $\mathbb{P}_{C_n}(G_{n+1}) = 0$.

En remplaçant ces probabilités conditionnelles par leur valeur dans la formule des probabilités totales, on obtient :

$$g_{n+1} = \frac{1}{7}g_n + \frac{1}{7}p_n + 0s_n + 0c_n \quad \text{donc} \quad \boxed{7g_{n+1} = g_n + p_n}.$$

(c) Déterminer des expressions similaires pour $7p_{n+1}$ et $7s_{n+1}$ en fonction de g_n, p_n, s_n et c_n.

▶ On raisonne comme à la question précédente, en appliquant la formule des probabilités totales et en déterminant les probabilités conditionnelles à l'aide de l'énoncé. On obtient :

$$\underbrace{\mathbb{P}(P_{n+1})}_{=p_{n+1}} = \underbrace{\mathbb{P}(G_n)}_{=g_n}\underbrace{\mathbb{P}_{G_n}(P_{n+1})}_{=6/7} + \underbrace{\mathbb{P}(P_n)}_{=p_n}\underbrace{\mathbb{P}_{P_n}(P_{n+1})}_{=3/7} + \underbrace{\mathbb{P}(S_n)}_{=s_n}\underbrace{\mathbb{P}_{S_n}(P_{n+1})}_{=3/7} + \underbrace{\mathbb{P}(C_n)}_{=c_n}\underbrace{\mathbb{P}_{C_n}(P_{n+1})}_{=0}$$

$$\text{donc} \quad \boxed{7p_{n+1} = 6g_n + 3p_n + 3s_n}$$

et de même :

$$\underbrace{\mathbb{P}(S_{n+1})}_{=S_{n+1}} = \underbrace{\mathbb{P}(G_n)}_{=g_n}\underbrace{\mathbb{P}_{G_n}(S_{n+1})}_{=0} + \underbrace{\mathbb{P}(P_n)}_{=p_n}\underbrace{\mathbb{P}_{P_n}(S_{n+1})}_{=3/7} + \underbrace{\mathbb{P}(S_n)}_{=s_n}\underbrace{\mathbb{P}_{S_n}(S_{n+1})}_{=3/7} + \underbrace{\mathbb{P}(C_n)}_{=c_n}\underbrace{\mathbb{P}_{C_n}(S_{n+1})}_{=6/7}$$

$$\text{donc} \quad \boxed{7s_{n+1} = 3p_n + 3s_n + 6c_n}.$$

(d) Déduire des résultats précédents que $7X_{n+1} = AX_n + Y$ où :

$$X_n = \begin{pmatrix} g_n \\ p_n \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 3 \\ -6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}).$$

▶ On a :

$$AX_n + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 3 \\ -6 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_n \\ p_n \\ s_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_n + p_n \\ 6g_n + 3p_n + 3s_n \\ -6g_n - 3p_n - 3s_n + 6 \end{pmatrix}.$$

Or $g_n + p_n = 7g_{n+1}$ d'après le résultat de la question 3(b) et $6g_n + 3p_n + 3s_n = 7p_{n+1}$ d'après le résultat de la question précédente. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned}
&7s_{n+1} - \big(-6g_n - 3p_n - 3s_n + 6\big) \\
=&\big(3p_n + 3s_n + 6c_n\big) + 6g_n + 3p_n + 3s_n - 6 \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
=&6g_n + 6p_n + 6s_n + 6c_n - 6 = 6\underbrace{\big(g_n + p_n + s_n + c_n\big)}_{=1} - 6 \\
=&6 - 6 = 0 \quad \text{car } G_n,\ P_n,\ S_n \text{ et } C_n \text{ forment un système complet d'événements.}
\end{aligned}$$

Donc $-6g_n - 3p_n - 3s_n + 6 = 7s_{n+1}$. Finalement, on a :

$$AX_n + Y = \begin{pmatrix} g_n + p_n \\ 6g_n + 3p_n + 3s_n \\ -6g_n - 3p_n - 3s_n + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7g_{n+1} \\ 7p_{n+1} \\ 7c_{n+1} \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} g_{n+1} \\ p_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \boxed{X_{n+1}}.$$

4. *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ X_n = \left(\frac{1}{7}A\right)^n (X_0 - Z) + Z$, *où* $Z = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

► On raisonne par récurrence.
Initialisation. Pour $n = 0$, on a :

$$\underbrace{\left(\frac{1}{7}A\right)^0}_{=\mathrm{I}_3}(X_0 - Z) + Z = X_0 - Z + Z = X_0.$$

Donc le résultat est vrai pour $n = 0$.
Hérédité. On suppose que le résultat est vrai pour $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a :

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \frac{1}{7}\big(AX_n + Y\big) \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\ &= \frac{1}{7}\left(A\left(\left(\frac{1}{7}A\right)^n (X_0 - Z) + Z\right) + Y\right) \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \left(\frac{1}{7}A\right)^{n+1}(X_0 - Z) + \frac{1}{7}\big(AZ + Y\big). \end{aligned}$$

Or :

$$AZ + Y = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 3 \\ -6 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 7+0 \\ 42+0 \\ -42+84 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 7Z.$$

Par conséquent :

$$X_{n+1} = \left(\frac{1}{7}A\right)^{n+1}(X_0 - Z) + \frac{1}{7}\big(AZ + Y\big) = \left(\frac{1}{7}A\right)^{n+1}(X_0 - Z) + Z.$$

Ainsi, on a bien montré que le résultat est vrai pour $n+1$ dès qu'il est vrai pour n.
Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \left(\frac{1}{7}A\right)^n (X_0 - Z) + Z}.$$

5. *On considère la matrice* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

   (a) *Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.*

   ► On fixe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et on résout le système linéaire suivant d'inconnues $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en l'échelonnant à l'aide de la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 5 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b+3a \\ c-3a \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{matrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b+3a \\ c-3a+2b+6a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a un système linéaire de rang 3 maximal, donc il admet une unique solution. On en déduit que $\boxed{P \text{ est inversible}}$. De plus, l'unique solution est :

$$P\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} \iff \begin{cases} z = \frac{1}{5}(c-3a+2b+6a) = \frac{3}{5}a+\frac{2}{5}b+\frac{1}{5}c\\ y = \frac{1}{2}(b+3a-5z) = \frac{-1}{2}b-\frac{1}{2}c\\ x = a-y-z = \frac{2}{5}a+\frac{1}{10}b+\frac{3}{10}c\end{cases}$$
$$\iff \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}a+\frac{1}{10}b+\frac{3}{10}c\\ \frac{-1}{2}b-\frac{1}{2}c\\ \frac{3}{5}a+\frac{2}{5}b+\frac{1}{5}c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10}\\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2}\\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3\\ 0 & -5 & -5\\ 6 & 4 & 2\end{pmatrix}}.$$

(b) *Calculer $D = P^{-1}AP$ et vérifier que le résultat est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux appartiennent à $]-7,7[$.*

▶ On a :

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}AP\\ &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3\\ 0 & -5 & -5\\ 6 & 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 6 & 3 & 3\\ -6 & -3 & -3\end{pmatrix}P \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}\\ &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -8 & -2 & -6\\ 0 & 0 & 0\\ 18 & 12 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ -3 & -1 & 2\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -20 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 30\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}}.\end{aligned}$$

On obtient bien $\boxed{\text{une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux, qui sont égaux à } -2,\ 0 \text{ et } 3, \text{ appartiennent à }]-7,7[}$.

(c) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer A^n en fonction de P, P^{-1} et D^n.*

▶ On raisonne par récurrence pour montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
<u>Initialisation</u>. Pour $n = 0$, on a :

$$A^0 = \mathrm{I}_3 \quad \text{et} \quad PD^0P^{-1} = P\mathrm{I}_3P^{-1} = PP^{-1} = \mathrm{I}_3.$$

Donc le résultat est vrai pour $n = 0$.
<u>Hérédité</u>. On suppose que le résultat est vrai pour $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^nA \quad \text{par propriété de la puissance}\\ &= PD^nP^{-1}A \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}\\ &= PD^n\underbrace{P^{-1}AP}_{=D}P^{-1} \quad \text{car } PP^{-1} = \mathrm{I}_3\\ &= PD^nDP^{-1} \quad \text{par associativité et d'après le résultat de la question précédente}\\ &= PD^{n+1}P^{-1}.\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien montré que le résultat est vrai pour $n+1$ dès qu'il est vrai pour n.
<u>Conclusion</u>. D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}}.$$

(d) *En déduire que chaque coefficient de la matrice $\left(\frac{1}{7}A\right)^n$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(\frac{1}{7}A\right)^n = \frac{1}{7^n}A^n = \frac{1}{7^n}PD^nP^{-1} = P\left(\frac{1}{7}D\right)^n P^{-1}.$$

Or on a d'après le résultat de la question 5(b) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left(\frac{1}{7}D\right)^n = \left(\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\right)^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{-2}{7}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{3}{7}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Puisque les coefficients des matrices P et P^{-1} sont des constantes, les coefficients de la matrice $\left(\frac{1}{7}A\right)^n$ sont donc des sommes de $\left(\frac{-2}{7}\right)^n$ et de $\left(\frac{3}{7}\right)^n$ multipliés par des constantes. Or $\frac{-2}{7} \in]-1,1[$ et $\frac{3}{7} \in]-1,1[$, donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-2}{7}\right)^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^n = 0$. Par opérations usuelles sur les limites, on en déduit que $\boxed{\text{chaque coefficient de la matrice } \left(\frac{1}{7}A\right)^n \text{ tend vers 0 quand } n \to +\infty}$.

6. (a) *Déduire des résultats précédents les limites des suites $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

▶ On a d'après le résultat de la question 4 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} g_n \\ p_n \\ s_n \end{pmatrix} = X_n = \left(\frac{1}{7}A\right)^n (X_0 - Z) + Z.$$

Puisque les coefficients de la matrice $X_0 - Z$ sont des constantes, on déduit du résultat de la question précédente que chaque coefficient de la matrice $\left(\frac{1}{7}A\right)^n (X_0 - Z)$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, et donc que les coefficients de X_n tendent vers ceux de Z quand $n \to +\infty$. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix} g_n \\ p_n \\ s_n \end{pmatrix} = \lim_{n\to+\infty} X_n = Z = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \boxed{\lim_{n\to+\infty} g_n = \frac{1}{14}}, \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{3}{7}} \\ \text{et} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} s_n = \frac{3}{7}}. \end{cases}$$

D'autre part, on sait que $g_n + p_n + s_n + c_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car G_n, P_n, S_n et C_n forment un système complet d'événements. Par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} 1 - g_n - p_n - s_n = 1 - \frac{1}{14} - \frac{3}{7} - \frac{3}{7} = \frac{14-1-6-6}{14} \quad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{14}}.$$

(b) *Interpréter ces résultats.*

▶ Selon le modèle proposé dans l'énoncé, l'état d'un jour éloigné du jour initial (c'est-à-dire lorsque le climat est bien installé) est d'après le résultat de la question précédente : du gel avec probabilité d'environ 1/14, de la pluie avec probabilité d'environ 3/7, du soleil avec probabilité d'environ 3/7 ou bien une canicule avec probabilité d'environ 1/14. Ces résultats sont cohérents avec un climat tempéré, même si le modèle est très simplifié. Par exemple il ne prend pas en compte les jours de neige, ou les changements de temps durant la même journée.

Rapporté à une année d'environ 364 jours, on obtient environ $364/14 = 26$ jours de gel, $364 * 3/7 = 156$ jours de pluie, $364 * 3/7 = 156$ jours de soleil et $364/14 = 26$ jours de canicule.

On peut aussi vérifier ces probabilités avec la fonction `frequences` *de la question 1(c). Par exemple, après 10000 simulations de l'état de la 100e journée, on obtient :*

```
>frequences(100,10000)
            [0.0731, 0.4254, 0.435, 0.0665]
>frequences(100,10000)
            [0.0716, 0.4271, 0.4273, 0.074]
```

DS n$^{\text{o}}$ 8 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

Exercice 1

On considère une urne contenant r boules rouges et j boules jaunes (aux couleurs chinoises !) indiscernables au toucher. On pose $n = r + j$. On répète les opérations suivantes : on tire au hasard une boule puis on replace dans l'urne deux boules de la couleur obtenue.

On note R_k l'événement «la boule tirée lors du k-ième tirage est rouge».

À l'issue du premier tirage, l'urne contient donc $n + 1$ boules et on note r_1 le nombre d'entre elles qui sont rouges. Ainsi, $\mathrm{P}_{R_1}(r_1 = r + 1) = \mathrm{P}_{\overline{R_1}}(r_1 = r) = 1$. Plus généralement, on note r_k le nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue du k-ième tirage.

Simulation informatique

Écrire chaque fonction demandée en Python. On pourra appeler les fonctions des questions précédentes même si elles n'ont pas été écrites. Pour rappel, l'instruction `L.append(a)` ajoute l'élément `a` à la fin de la liste `L`, et l'instruction `random.randint(a,b)` de la bibliothèque `random` renvoie un entier aléatoire compris entre `a` inclus et `b` inclus.

1. Écrire une fonction `modeliser_urne` qui prend en arguments les entiers r et j, puis qui renvoie une liste de $n = r + j$ éléments, dont r sont égaux à la chaîne de caractères `'R'` et les j restants à `'J'`. Par exemple, `modeliser_urne(4,2)` peut renvoyer `['R','R','R','R','J','J']`.
2. Écrire une fonction `simuler_tirage` qui prend en argument une liste `L` modélisant l'urne, qui choisit au hasard un élément de `L`, puis qui ajoute un élément identique à la fin de `L` avant de la renvoyer. Par exemple, `simuler_tirage(['R','R','J'])` peut renvoyer `['R','R','J','R']` si l'un des deux premiers éléments a été choisi, ou bien `['R','R','J','J']` sinon.
3. Écrire une fonction `compter_rouges` qui prend en arguments les entiers r et j ainsi qu'un entier k, qui simule k tirages, puis qui renvoie la valeur de r_k.
4. Écrire une fonction `calculer_frequence` qui prend en arguments les entiers r et j ainsi que des entiers k et `nbSimul`, qui simule `nbSimul` fois l'expérience de k tirages, puis qui renvoie la fréquence d'apparition de l'événement R_k.

Étude mathématique

5. Déterminer la probabilité des événements R_1 et R_2 en fonction de r et n.
6. On fixe $k \in \mathbb{N}^*$ dans cette question.
   (a) Que peut-on dire des événements $(r_k = r)$, $(r_k = r + 1)$, $(r_k = r + 2)$, …, $(r_k = r + k)$?
   (b) Montrer que :
   $$\sum_{i=r}^{r+k} i\mathrm{P}(r_k = i) = (n + k)\mathrm{P}(R_{k+1}).$$
   (c) Soit $i \in [\![r, r + k]\!]$. Montrer que :
   $$\mathrm{P}\big((r_k = i) \cap R_{k+1} \cap R_{k+2}\big) = \frac{i(i + 1)}{(n + k)(n + k + 1)}\mathrm{P}(r_k = i)$$
   et déterminer une expression similaire pour $\mathrm{P}\left((r_k = i) \cap \overline{R_{k+1}} \cap R_{k+2}\right)$.
   (d) Déduire des résultats précédents une expression de $\mathrm{P}(R_{k+2})$ en fonction de $\mathrm{P}(R_{k+1})$.
7. En déduire la valeur de $\mathrm{P}(R_k)$ en fonction de r et n pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2

On considère les ensembles suivants :

$$E = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\right\}$$

$$F = \mathrm{Vect}\Big(\overrightarrow{u_1} = (1,3,0,2), \overrightarrow{u_2} = (2,7,-3,6), \overrightarrow{u_3} = (1,1,6,-2)\Big)$$

$$\text{et} \quad G = \left\{\overrightarrow{e} + \overrightarrow{\mathrm{f}} \;\middle|\; (\overrightarrow{e}, \overrightarrow{\mathrm{f}}) \in E \times F\right\}.$$

1. (a) Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Déterminer une base $\mathscr{B}_E$ de E. Quelle est la dimension de E ?
2. Déterminer une base $\mathscr{B}_F$ de F. Quelle est la dimension de F ?
3. On considère la famille de vecteurs $\mathscr{F}$ formée des vecteurs de $\mathscr{B}_E$ et de $\mathscr{B}_F$.
   (a) La famille $\mathscr{F}$ est-elle libre ou liée ?
   (b) Montrer que $G = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.
   (c) Déterminer une base et la dimension de G.
   (d) Déterminer une représentation cartésienne de G.

Exercice 3

Le but de cet exercice est de trouver les puissances $p \in [1, 2[$ telles que $n^p \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Soient $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et (x, h) un couple de réels strictement positifs. On pose :

$$g : t \mapsto \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

   (a) Montrer qu'il existe $a \in]x, x+h[$ tel que :

$$g'(a) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}.$$

   (b) En déduire qu'il existe $b \in]x, x+2h[$ tel que :

$$f''(b) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}.$$

2. On fixe $p \in [1, 2[$ tel que $n^p \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) À l'aide du résultat de la question précédente, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{p(p-1)}{(n+2)^{2-p}} \leqslant (n+2)^p - 2(n+1)^p + n^p \leqslant \frac{p(p-1)}{n^{2-p}}.$$

   (b) Justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$0 \leqslant (N+2)^p - 2(N+1)^p + N^p < 1.$$

   (c) En déduire la valeur de $(N+2)^p - 2(N+1)^p + N^p$, puis celle de p. Conclure.

Corrigé du DS n° 8 de mathématiques et d'informatique

Exercice 1

On considère une urne contenant r boules rouges et j boules jaunes (aux couleurs chinoises !) indiscernables au toucher. On pose $n = r + j$. On répète les opérations suivantes : on tire au hasard une boule puis on replace dans l'urne deux boules de la couleur obtenue.

On note R_k l'événement «la boule tirée lors du k-ième tirage est rouge».

À l'issue du premier tirage, l'urne contient donc $n+1$ boules et on note r_1 le nombre d'entre elles qui sont rouges. Ainsi, $\mathrm{P}_{R_1}(r_1 = r+1) = \mathrm{P}_{\overline{R_1}}(r_1 = r) = 1$. Plus généralement, on note r_k le nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue du k-ième tirage.

Simulation informatique

Écrire chaque fonction demandée en Python. On pourra appeler les fonctions des questions précédentes même si elles n'ont pas été écrites. Pour rappel, l'instruction `L.append(a)` ajoute l'élément `a` à la fin de la liste `L`, et l'instruction `random.randint(a,b)` de la bibliothèque `random` renvoie un entier aléatoire compris entre `a` inclus et `b` inclus.

1. *Écrire une fonction `modeliser_urne` qui prend en arguments les entiers r et j, puis qui renvoie une liste de $n = r + j$ éléments, dont r sont égaux à la chaîne de caractères `'R'` et les j restants à `'J'`. Par exemple, `modeliser_urne(4,2)` peut renvoyer `['R','R','R','R','J','J']`.*

   ▶ Par exemple :

```
def modeliser_urne(r,j):
    L=[]
    for i in range(r):
        L.append('R')
    for i in range(j):
        L.append('J')
    return L
```

2. *Écrire une fonction `simuler_tirage` qui prend en argument une liste `L` modélisant l'urne, qui choisit au hasard un élément de `L`, puis qui ajoute un élément identique à la fin de `L` avant de la renvoyer. Par exemple, `simuler_tirage(['R','R','J'])` peut renvoyer `['R','R','J','R']` si l'un des deux premiers éléments a été choisi, ou bien `['R','R','J','J']` sinon.*

   ▶ Par exemple :

```
import random
def simuler_tirage(L):
    n=len(L)
    a=L[random.randint(0,n-1)]
    L.append(a)
    return L
```

3. *Écrire une fonction `compter_rouges` qui prend en arguments les entiers r et j ainsi qu'un entier k, qui simule k tirages, puis qui renvoie la valeur de r_k.*

   ▶ Par exemple :

```
def compter_rouges(r,j,k):
    L=modeliser_urne(r,j)
    for i in range(k):
        simuler_tirage(L)
    nb=0
    for a in L:
        if a=='R':
            nb=nb+1
    return nb
```

4. *Écrire une fonction* `calculer_frequence` *qui prend en arguments les entiers r et j ainsi que des entiers k et* `nbSimul`, *qui simule* `nbSimul` *fois l'expérience de k tirages, puis qui renvoie la fréquence d'apparition de l'événement R_k.*

   ▶ Par exemple :

```
def calculer_frequence(r,j,k,nbSimul):
    nb=0
    for i in range(nbSimul):
        L=modeliser_urne(r,j)
        for ii in range(k):
            simuler_tirage(L)
            n=len(L)
            if L[n-1]=='R':
                nb=nb+1
    return nb/nbSimul
```

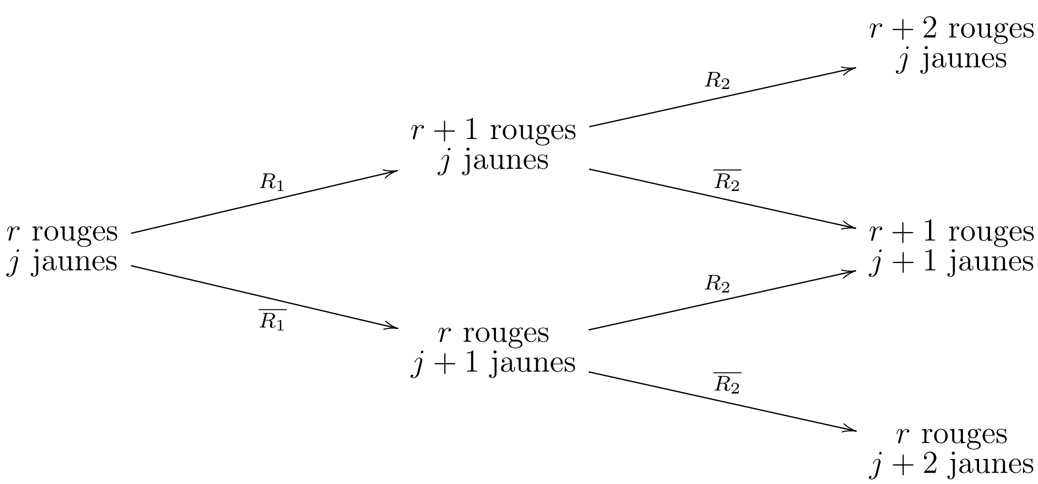
Étude mathématique

5. *Déterminer la probabilité des événements R_1 et R_2 en fonction de r et n.*

   ▶ On peut modéliser chaque tirage par la probabilité uniforme sur l'ensemble des boules dans l'urne car chaque boule est indiscernable au toucher et a ainsi la même probabilité d'être tirée. Pour le premier tirage, on a donc :

$$\mathrm{P}(R_1) = \frac{\text{nombre de boules rouges}}{\text{nombre total de boules dans l'urne}} = \frac{r}{r+j} = \boxed{\frac{r}{n}}.$$

Pour le deuxième tirage, on peut représenter les différents à l'aide d'un arbre de probabilités :



On en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(R_2) &= \mathrm{P}\big(R_1 \cap R_2\big) + \mathrm{P}\big(\overline{R_1} \cap R_2\big) && \text{d'après la formule des probabilités totales car } R_1 \text{ et } \overline{R_1} \text{ forment un système complet d'événements}\\
&= \mathrm{P}\big(R_1\big)\mathrm{P}_{R_1}\big(R_2\big) + \mathrm{P}\big(\overline{R_1}\big)\mathrm{P}_{\overline{R_1}}\big(R_2\big) && \text{d'après la formule des probabilités composées}\\
&= \frac{r}{r+j} \times \frac{r+1}{r+1+j} + \frac{j}{r+j} \times \frac{r}{r+j+1} && \text{d'après la probabilité uniforme}\\
&= \frac{r}{(r+j)(r+1+j)} \times (r+1+j) = \frac{r}{r+j} = \boxed{\frac{r}{n}}.
\end{aligned}$$

6. *On fixe $k \in \mathbb{N}^*$ dans cette question.*

   (a) *Que peut-on dire des événements $(r_k = r)$, $(r_k = r+1)$, $(r_k = r+2)$, $\ldots$, $(r_k = r+k)$?*

   ▶ Si on tire aucune boule rouge lors des k premiers tirages alors $r_k = r$ qui est la plus petite valeur possible de r_k. Inversement, si on tire seulement des boules rouges lors des k premiers tirages alors $r_k = r + k$ qui est la plus grande valeur possible de r_k. Ainsi, $r_k \in [\![r, r+k]\!]$ et donc l'union des événements $(r_k = r)$, $(r_k = r+1)$, $(r_k = r+2)$, $\ldots$, $(r_k = r+k)$ est égale à l'univers. De plus, ces événements sont deux à deux incompatibles (car r_k ne peut prendre deux valeurs en même temps). On en déduit qu'ils forment un $\boxed{\text{système complet d'événements}}$.

   (b) *Montrer que :*

   $$\sum_{i=r}^{r+k} i\mathrm{P}(r_k = i) = (n+k)\mathrm{P}(R_{k+1}).$$

   ▶ On applique la formule des probabilités totales à l'aide du système complet d'événements obtenu à la question précédente :

   $$\mathrm{P}(R_{k+1}) = \sum_{i=r}^{r+k} \mathrm{P}(r_k = i)\mathrm{P}_{r_k=i}(R_{k+1}).$$

   On remarque que le nombre total de boules dans l'urne est une suite arithmétique de terme initial n (avant le premier tirage) et de raison 1 (car on rajoute une boule dans l'urne à chaque tirage). À l'issue du k-ième tirage, l'urne contient donc $n+k$ boules. Si i d'entre elles sont rouges, on obtient d'après la probabilité uniforme :

   $$\mathrm{P}_{r_k=i}(R_{k+1}) = \frac{i}{n+k}.$$

   En reportant dans la formule des probabilités totales :

   $$\mathrm{P}(R_{k+1}) = \sum_{i=r}^{r+k} \mathrm{P}(r_k = i) \times \frac{i}{n+k} = \frac{1}{n+k}\sum_{i=r}^{r+k} i\mathrm{P}(r_k = i) \quad \text{par linéarité de la somme.}$$

   Finalement, on en déduit que :

   $$\boxed{\sum_{i=r}^{r+k} i\mathrm{P}(r_k = i) = (n+k)\mathrm{P}(R_{k+1})}.$$

   (c) *Soit $i \in [\![r, r+k]\!]$. Montrer que :*

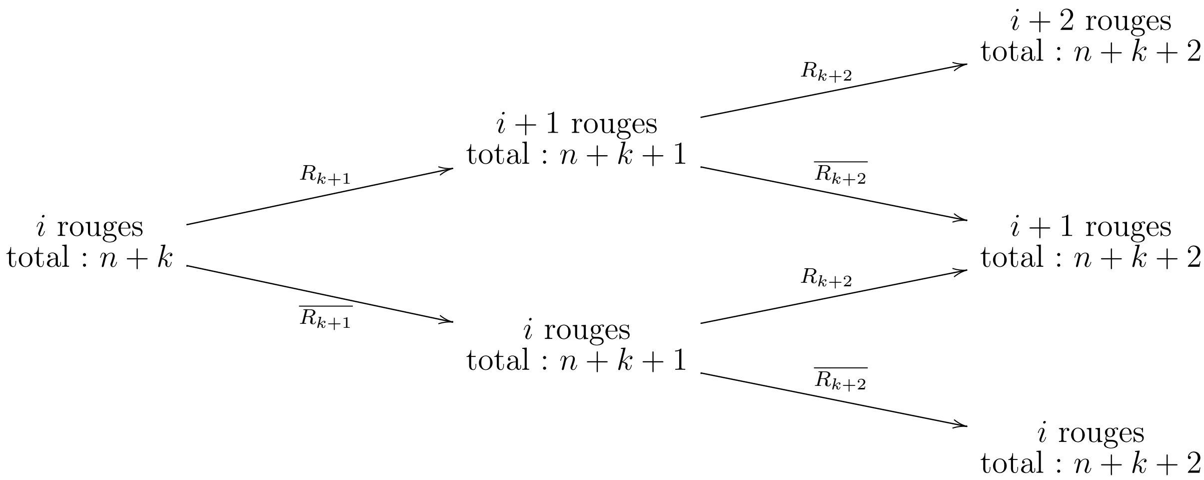
   $$\mathrm{P}\big((r_k = i) \cap R_{k+1} \cap R_{k+2}\big) = \frac{i(i+1)}{(n+k)(n+k+1)}\mathrm{P}(r_k = i)$$

   et déterminer une expression similaire pour $\mathrm{P}\left((r_k = i) \cap \overline{R_{k+1}} \cap R_{k+2}\right)$.

▶ On a d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathrm{P}\big((r_k = i) \cap R_{k+1} \cap R_{k+2}\big) = \mathrm{P}(r_k = i) \times \mathrm{P}_{r_k=i}\big(R_{k+1}\big) \times \mathrm{P}_{(r_k=i)\cap R_{k+1}}\big(R_{k+2}\big).$$

Si l'urne contient i boules rouges à l'issue du k-ième tirage, on peut représenter les différents cas des deux tirages suivants à l'aide d'un arbre de probabilités :



D'après la probabilité uniforme, on en déduit que :

$$\mathrm{P}_{r_k=i}\big(R_{k+1}\big) = \frac{i}{n+k} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_{(r_k=i)\cap R_{k+1}}\big(R_{k+2}\big) = \frac{i+1}{n+k+1}.$$

En reportant dans la formule des probabilités composées :

$$\mathrm{P}\big((r_k = i) \cap R_{k+1} \cap R_{k+2}\big) = \mathrm{P}(r_k = i) \times \frac{i}{n+k} \times \frac{i+1}{n+k+1} = \boxed{\frac{i(i+1)}{(n+k)(n+k+1)}\mathrm{P}(r_k = i)}.$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\big((r_k = i) \cap \overline{R_{k+1}} \cap R_{k+2}\big) &= \mathrm{P}(r_k = i) \times \mathrm{P}_{r_k=i}\big(\overline{R_{k+1}}\big) \times \mathrm{P}_{(r_k=i)\cap \overline{R_{k+1}}}\big(R_{k+2}\big)\\
&= \mathrm{P}(r_k = i) \times \frac{n+k-i}{n+k} \times \frac{i}{n+k+1}\\
&= \boxed{\frac{i(n+k-i)}{(n+k)(n+k+1)}\mathrm{P}(r_k = i)}.
\end{aligned}$$

(d) Déduire des résultats précédents une expression de $\mathrm{P}(R_{k+2})$ *en fonction de* $\mathrm{P}(R_{k+1})$*.*

▶ Chaque événement $(r_k = i)$ peut être partitionné en deux événements selon la couleur de la boule tirée lors du $(k+1)$-ième tirage : $(r_k = i) \cap R_{k+1}$ et $(r_k = i) \cap \overline{R_{k+1}}$. On obtient ainsi un nouveau système complet d'événements et on peut appliquer la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(R_{k+2}) &= \sum_{i=r}^{r+k} \mathrm{P}\big((r_k = i) \cap R_{k+1} \cap R_{k+2}\big) + \sum_{i=r}^{r+k} \mathrm{P}\big((r_k = i) \cap \overline{R_{k+1}} \cap R_{k+2}\big)\\
&= \sum_{i=r}^{r+k} \frac{i(i+1)}{(n+k)(n+k+1)}\mathrm{P}(r_k = i) + \sum_{i=r}^{r+k} \frac{i(n+k-i)}{(n+k)(n+k+1)}\mathrm{P}(r_k = i)\\
&\qquad \text{d'après les résultats de la question précédente}\\
&= \frac{1}{(n+k)(n+k+1)} \sum_{i=r}^{r+k} i\big[i+1+n+k-i\big]\mathrm{P}(r_k = i) \quad \text{par linéarité}\\
&= \frac{1}{n+k} \sum_{i=r}^{r+k} i\mathrm{P}(r_k = i) \quad \text{après simplification et par linéarité}\\
&= \frac{1}{n+k}(n+k)\mathrm{P}(R_{k+1}) = \boxed{\mathrm{P}(R_{k+1})} \quad \text{d'après le résultat de la question 6(b).}
\end{aligned}$$

7. *En déduire la valeur de $\mathrm{P}(R_k)$ en fonction de r et n pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.*

▶ D'après le résultat de la question précédente, on peut montrer par récurrence que $\mathrm{P}(R_k) = \mathrm{P}(R_2)$ pour tout $k \geqslant 2$.

Attention à l'initialisation : pour $k = 1$, le résultat de la question précédente donne seulement que $\mathrm{P}(R_3) = \mathrm{P}(R_2)$, mais a priori pas que $\mathrm{P}(R_2) = \mathrm{P}(R_1)$ (car $k \neq 0$ dans la question 6). Le fait que $\mathrm{P}(R_2) = \mathrm{P}(R_1)$ est une conséquence du résultat de la question 5, pas de ceux de la question 6. Soyez précis dans la justification de vos résultats.

D'après le résultat de la question 5, on en déduit que :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}(R_k) = \frac{r}{n}}.$$

Exercice 2

On considère les ensembles suivants :

$$E = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\right\}$$

$$F = \mathrm{Vect}\Big(\overrightarrow{u_1} = (1,3,0,2), \overrightarrow{u_2} = (2,7,-3,6), \overrightarrow{u_3} = (1,1,6,-2)\Big)$$

$$\text{et} \quad G = \left\{\overrightarrow{e} + \overrightarrow{f} \;\middle|\; (\overrightarrow{e}, \overrightarrow{f}) \in E \times F\right\}.$$

1. (a) *Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.*

▶ Tout d'abord, on remarque que $\overrightarrow{0} = (0,0,0,0) \in E$ car $-0+0+0 = 0$ et $4\times 0 - 2\times 0 + 0 = 0$. Soient $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E$, $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\overrightarrow{x} + \lambda\overrightarrow{y} = (x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2, x_3 + \lambda y_3, x_4 + \lambda y_4).$$

De plus :

$$\begin{aligned} -(x_1+\lambda y_1) + (x_2 + \lambda y_2) + (x_3 + \lambda y_3) &= \underbrace{(-x_1 + x_2 + x_3)}_{=0} + \lambda\underbrace{(-y_1 + y_2 + y_3)}_{=0} \\ &= 0 \quad \text{car } \overrightarrow{x} \in E \text{ et } \overrightarrow{y} \in E \\ \text{et} \quad 4(x_1 + \lambda y_1) - 2(x_2 + \lambda y_2) + (x_4 + \lambda y_4) &= \underbrace{(4x_1 - 2x_2 + x_4)}_{=0} + \lambda\underbrace{(4y_1 - 2y_2 + y_4)}_{=0} \\ &= 0 \quad \text{car } \overrightarrow{x} \in E \text{ et } \overrightarrow{y} \in E. \end{aligned}$$

On en déduit que $\overrightarrow{x} + \lambda\overrightarrow{y} \in E$ et donc que $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4}$.

On peut aussi remarquer que E est l'intersection de deux hyperplans de $\mathbb{R}^4$ puisqu'il est défini par deux équations cartésiennes. Or, d'après le cours, tout hyperplan est un sous-espace vectoriel et toute intersection de sous-espaces vectoriels et un sous-espace vectoriel. D'où le résultat.

(b) *Déterminer une base $\mathscr{B}_E$ de E. Quelle est la dimension de E ?*

▶ On résout le système linéaire suivant à l'aide de la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 4L_1$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient un système linéaire homogène échelonné de rang 2 qui admet une infinité de solutions qu'on peut exprimer à l'aide des inconnues auxiliaires x_3 et x_4 :

$$\left\{\begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2}(-4x_3 - x_4) = -2x_3 - \frac{1}{2}x_4 \\ x_1 = x_2 + x_3 = -x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{array}\right., (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} E &= \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\right\} \\ &= \left\{\left(-x_3 - \tfrac{1}{2}x_4, -2x_3 - \tfrac{1}{2}x_4, x_3, x_4\right) \;\middle|\; (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{x_3(-1, -2, 1, 0) + x_4\left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 0, 1\right) \;\middle|\; (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\Big(\underbrace{(-1, -2, 1, 0)}_{\times(-1)}, \underbrace{\left(-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 0, 1\right)}_{\times(-2)}\Big) \quad \text{par définition du sous-espace vectoriel engendré} \\ &= \mathrm{Vect}\Big((1, 2, -1, 0), (1, 1, 0, -2)\Big) \quad \text{par propriété du sous-espace vectoriel engendré.} \end{aligned}$$

Lorsque vous pouvez, choisissez les vecteurs les plus simples (avec le moins de signes négatifs et le moins de fractions possibles) afin de faciliter vos calculs futurs.

Ainsi, la famille $(\overrightarrow{e_1} = (1, 2, -1, 0), \overrightarrow{e_2} = (1, 1, 0, -2))$ est génératrice de E. De plus :

$$\begin{aligned} \mathrm{rang}\big(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\big) &= \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{à l'aide des coordonnées dans la base canonique de } \mathbb{R}^4 \\ &= \mathrm{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \\ &= \mathrm{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 \\ 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{array} \\ &= \mathrm{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 \\ 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2. \end{aligned}$$

On en déduit que la famille $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est libre. Finalement, on a montré que :

$$\boxed{\mathscr{B}_E = \big(\overrightarrow{e_1} = (1, 2, -1, 0), \overrightarrow{e_2} = (1, 1, 0, -2)\big) \text{ est une base de } E} \text{ et que } \boxed{\dim(E) = 2}.$$

2. *Déterminer une base $\mathscr{B}_F$ de F. Quelle est la dimension de F ?*

▶ Par définition, la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est génératrice de F. On a à l'aide des coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rang}\big(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\big) &= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix} \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{matrix} \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 3.
\end{aligned}$$

On en déduit que la famille $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3})$ n'est pas libre et n'est donc pas une base de F. Le système linéaire suivant admet donc une infinité de solutions :

$$\begin{aligned}
\lambda_1\overrightarrow{u_1}+\lambda_2\overrightarrow{u_2}+\lambda_3\overrightarrow{u_3}=\overrightarrow{0} &\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}\text{à l'aide des mêmes opérations}\\ \text{que l'échelonnage précédent}\end{matrix} \\
&\iff \begin{cases} \lambda_2 = 2\lambda_3 \\ \lambda_1 = -2\lambda_2 - \lambda_3 = -5\lambda_3 \end{cases}, \lambda_3 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

En particulier, pour $\lambda_3 = 1$, on obtient la solution suivante :

$$-5\overrightarrow{u_1}+2\overrightarrow{u_2}+\overrightarrow{u_3}=\overrightarrow{0} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{u_3}=5\overrightarrow{u_1}-2\overrightarrow{u_2}.$$

Par conséquent :

$$F = \operatorname{Vect}\big(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3}\big) = \operatorname{Vect}\big(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\big) \quad \text{par propriété du sous-espace vectoriel engendré.}$$

Ainsi, la famille $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$ est génératrice de F. De plus, elle est libre car :

$$\operatorname{rang}\big(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\big) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \\ 0 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad \begin{matrix}\text{à l'aide de toujours les mêmes opérations}\\ \text{que l'échelonnage précédent.}\end{matrix}$$

Finalement, on a montré que :

$$\boxed{\mathscr{B}_F = \big(\overrightarrow{u_1}=(1,3,0,2),\overrightarrow{u_2}=(2,7,-3,6)\big) \text{ est une base de } F} \text{ et que } \boxed{\dim(F)=2}.$$

3. *On considère la famille de vecteurs $\mathscr{F}$ formée des vecteurs de $\mathscr{B}_E$ et de $\mathscr{B}_F$.*

   (a) *La famille $\mathscr{F}$ est-elle libre ou liée ?*

► On a à l'aide des coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rang}(\mathscr{F}) &= \operatorname{rang}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{matrix} \\
&= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \neq 4.
\end{aligned}$$

On en déduit que $\boxed{\text{la famille } \mathscr{F} \text{ est liée}}$.

(b) *Montrer que $G = \operatorname{Vect}(\mathscr{F})$.*

► On raisonne par double inclusion.

1^re inclusion $\supset$. Puisque $\operatorname{Vect}(\mathscr{F})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ contenant les vecteurs de $\mathscr{F}$, il suffit de montrer que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ contenant les vecteurs de $\mathscr{F}$. Tout d'abord, puisque E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, on a $\overrightarrow{0} \in E$ et $\overrightarrow{0} \in F$, donc :

$$\overrightarrow{0} = \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in E} + \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F} \in G.$$

Soient $\overrightarrow{e} + \overrightarrow{f} \in G$, avec $(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{f}) \in E \times F$, $\overrightarrow{e}' + \overrightarrow{f}' \in G$, avec $(\overrightarrow{e}', \overrightarrow{f}') \in E \times F$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$(\overrightarrow{e} + \overrightarrow{f}) + \lambda(\overrightarrow{e}' + \overrightarrow{f}') = \underbrace{(\overrightarrow{e} + \lambda \overrightarrow{e}')}_{\in E} + \underbrace{(\overrightarrow{f} + \lambda \overrightarrow{f}')}_{\in F} \in G \qquad \text{car } E \text{ et } F \text{ sont des sous-espaces vectoriels de } \mathbb{R}^4.$$

On en déduit que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. De plus :

$$\overrightarrow{e_1} = \underbrace{\overrightarrow{e_1}}_{\in E} + \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F} \in G, \quad \overrightarrow{e_2} = \underbrace{\overrightarrow{e_2}}_{\in E} + \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in F} \in G, \quad \overrightarrow{u_1} = \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in E} + \underbrace{\overrightarrow{u_1}}_{\in F} \in G,$$

$$\text{et} \quad \overrightarrow{u_2} = \underbrace{\overrightarrow{0}}_{\in E} + \underbrace{\overrightarrow{u_2}}_{\in F} \in G.$$

Donc G contient les vecteurs de $\mathscr{F}$. On a bien montré que $\operatorname{Vect}(\mathscr{F}) \subset G$.

2^e inclusion $\subset$. Il suffit de montrer que chaque vecteur de G peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}$. Soit $\overrightarrow{e} + \overrightarrow{f} \in G$, avec $(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{f}) \in E \times F$. Puisque $\mathscr{B}_E$ est une base de E, on peut écrire $\overrightarrow{e}$ comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}_E = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$:

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{e} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \lambda_2 \overrightarrow{e_2}.$$

De même, puisque $\mathscr{B}_F$ est une base de F, on peut écrire $\overrightarrow{f}$ comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}_F = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$:

$$\exists(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{f} = \mu_1 \overrightarrow{u_1} + \mu_2 \overrightarrow{u_2}.$$

Finalement :

$$\overrightarrow{e} + \overrightarrow{f} = \lambda_1 \overrightarrow{e_1} + \lambda_2 \overrightarrow{e_2} + \mu_1 \overrightarrow{u_1} + \mu_2 \overrightarrow{u_2} \in \operatorname{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}).$$

On a bien montré que $G \subset \operatorname{Vect}(\mathscr{F})$.

Conclusion. Par double inclusion, on a bien montré que $\boxed{G = \operatorname{Vect}(\mathscr{F})}$.

(c) Déterminer une base et la dimension de G.

▶ D'après le résultat de la question précédente, $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de G. Mais elle n'est pas libre d'après le résultat de la question 3(a). En reprenant les calculs de la question 3(a), on a :

$$\lambda_1\overrightarrow{e_1}+\lambda_2\overrightarrow{e_2}+\mu_1\overrightarrow{u_1}+\mu_2\overrightarrow{u_2}=\overrightarrow{0} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \mu_1=-\mu_2 \\ \lambda_2=\mu_1+3\mu_2=2\mu_2 \\ \lambda_1=-\lambda_2-\mu_1-2\mu_2=-3\mu_2 \end{cases}, \mu_2\in\mathbb{R}.$$

En particulier, pour μ_2, on obtient la solution suivante :

$$-3\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}-\overrightarrow{u_1}+\overrightarrow{u_2}=\overrightarrow{0} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{u_2}=3\overrightarrow{e_1}-2\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{u_1}.$$

Par conséquent :

$$G=\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)=\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{u_1}\right) \quad \text{par propriété du sous-espace vectoriel engendré.}$$

Ainsi, la famille $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{u_1})$ est génératrice de G. De plus, elle est libre car :

$$\mathrm{rang}\left(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{u_1}\right)=\mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}=\mathrm{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=3.$$

Finalement, on a montré que :

$$\boxed{\left(\overrightarrow{e_1}=(1,2,-1,0),\overrightarrow{e_2}=(1,1,0,-2),\overrightarrow{u_1}=(1,3,0,2)\right) \text{ est une base de } G} \text{ et que } \boxed{\dim(G)=3}.$$

(d) Déterminer une représentation cartésienne de G.

▶ Puisque G est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ d'après le résultat de la question précédente, on cherche une équation cartésienne de la forme :

$$ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0 \quad \text{où } (a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\setminus\{(0,0,0,0)\}.$$

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{u_1}$ forment une base de G d'après le résultat de la question précédente, ils doivent satisfaire l'équation cartésienne de G. On résout donc :

$$\begin{cases} a+2b-c=0 \\ a+b-2d=0 \\ a+3b+2d=0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1 \end{matrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad L_3\leftarrow L_3+L_2$$

$$\iff \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient un système linéaire homogène échelonné de rang 3 qui admet une infinité de solutions qu'on peut exprimer à l'aide de l'inconnue auxiliaire d :

$$\begin{cases} c = 0 \\ b = -c - 2d = -2d \\ a = -2b + c = 4d \end{cases}, (c,d) \in \mathbb{R}^2.$$

Puisqu'on cherche une solution $(a,b,c,d) \neq (0,0,0,0)$, il suffit par exemple de prendre $d = 1$ ce qui donne $(a,b,c,d) = (4,-2,0,1)$. D'où une représentation cartésienne de G :

$$\boxed{G = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\right\}}.$$

Exercice 3

Le but de cet exercice est de trouver les puissances $p \in [1,2[$ telles que $n^p \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. *Soient $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et (x,h) un couple de réels strictement positifs. On pose :*

$$g : t \mapsto \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

(a) *Montrer qu'il existe $a \in]x, x+h[$ tel que :*

$$g'(a) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}.$$

▶ On remarque que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée et combinaison linéaire de fonctions qui le sont par hypothèse. En particulier, g est continue sur $[x, x+h]$ et dérivable sur $]x, x+h[$. D'après le théorème des accroissements finis, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \exists a \in]x,x+h[, \quad g'(a) &= \frac{g(x+h) - g(x)}{(x+h) - x} \\ &= \frac{\frac{f((x+h)+h) - f(x+h)}{h} - \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}{h} \\ &= \frac{f(x+2h) - f(x+h) - f(x+h) + f(x)}{h^2} \\ &= \boxed{\frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}}. \end{aligned}$$

(b) *En déduire qu'il existe $b \in]x, x+2h[$ tel que :*

$$f''(b) = \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}.$$

▶ On a d'après les formules de dérivation :

$$g'(a) = \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \frac{f'(a+h) - f'(a)}{(a+h) - a}.$$

On reconnaît un taux d'accroissement de f'. Puisque $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+^*)$, on a $f' \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$. En particulier, f' est continue sur $[a, a+h]$ et dérivable sur $]a, a+h[$. D'après le théorème des accroissements finis, on en déduit que :

$$\exists b \in]a, a+h[, \quad f''(b) = \frac{f'(a+h) - f'(a)}{(a+h) - a} = g'(a).$$

Puisque $a \in]x, x+h[$, on a $a > x$ et $a < x+h$ donc $a+h < x+2h$. Ainsi, $]a, a+h[\subset]x, x+2h[$. Finalement, on a bien prouvé l'existence de $b \in]x, x+2h[$ tel que :

$$f''(b) = g'(a) = \boxed{\frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente.}$$

2. *On fixe $p \in [1,2[$ tel que $n^p \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
   (a) *À l'aide du résultat de la question précédente, montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{p(p-1)}{(n+2)^{2-p}} \leqslant (n+2)^p - 2(n+1)^p + n^p \leqslant \frac{p(p-1)}{n^{2-p}}.$$

► Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On applique le résultat de la question précédente à la fonction $f : t \mapsto t^p$ et au couple $(x,h) = (n,1)$. La fonction usuelle f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc en particulier de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on a bien $x = n > 0$ et $h = 1 > 0$.

Pensez bien à vérifier les hypothèses d'un théorème avant de l'appliquer, même si ce théorème n'est pas dans le cours. Le résultat de la question précédente a été prouvé seulement en supposant les hypothèses de l'énoncé.

D'après le résultat de la question précédente, on sait qu'il existe $b \in]n, n+2[$ tel que :

$$f''(b) = \frac{f(n+2) - 2f(n+1) + f(n)}{1^2} = (n+2)^p - 2(n+1)^p + n^p.$$

De plus, on a :

$$f : t \mapsto t^p, \quad f' : t \mapsto pt^{p-1}, \quad f'' : t \mapsto p(p-1)t^{p-2} \quad \text{donc} \quad f''(b) = \frac{p(p-1)}{b^{2-p}}.$$

Or $n < b < n+2$ donc $n^{2-p} < b^{2-p} < (n+2)^{2-p}$ par stricte croissance de la fonction $t \mapsto t^{2-p}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ car $2-p > 0$ (puisque $p \in [1,2[$). Comme la fonction $t \mapsto 1/t$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $p(p-1) \geqslant 0$, on en déduit que :

$$\frac{p(p-1)}{(n+2)^{2-p}} \leqslant \underbrace{\frac{p(p-1)}{b^{2-p}}}_{=f''(b)} \leqslant \frac{p(p-1)}{n^{2-p}}.$$

Finalement, on obtient bien que :

$$\boxed{\frac{p(p-1)}{(n+2)^{2-p}} \leqslant (n+2)^p - 2(n+1)^p + n^p \leqslant \frac{p(p-1)}{n^{2-p}}}$$

et cet encadrement est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

   (b) *Justifier qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que :*

$$0 \leqslant (N+2)^p - 2(N+1)^p + N^p < 1.$$

► Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{p(p-1)}{(n+2)^{2-p}} \geqslant 0$ donc la minoration s'obtient directement du résultat de la question précédente par transitivité. Il reste à montrer la majoration. On remarque que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{p(p-1)}{n^{2-p}} = 0 < 1 \quad \text{car } 2-p > 0 \text{ (puisque } p \in [1,2[).$$

Donc on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ suffisamment grand tel que

$$\forall n \geqslant N, \quad \frac{p(p-1)}{n^{2-p}} < 1.$$

En particulier pour $n = N$, on a $\dfrac{p(p-1)}{N^{2-p}} < 1$. D'après le résultat de la question précédente, on en déduit par transitivité que :

$$\boxed{0 \leqslant (N+2)^p - 2(N+1)^p + N^p < 1}.$$

On peut aussi raisonner par analyse-synthèse pour trouver une valeur explicite de N :

$$\frac{p(p-1)}{N^{2-p}} < 1 \iff N^{2-p} > p(p-1) \iff N > \big(p(p-1)\big)^{1/(2-p)}.$$

Il suffit par exemple de prendre $N = \left\lfloor \big(p(p-1)\big)^{1/(2-p)} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}^*$.

(c) *En déduire la valeur de $(N+2)^p - 2(N+1)^p + N^p$, puis celle de p. Conclure.*

► Par hypothèse, on sait que $n^p \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier, $(N+2)^p \in \mathbb{N}$, $(N+1)^p \in \mathbb{N}$ et $N^p \in \mathbb{N}$. Donc $(N+2)^p - 2(N+1)^p + N^p \in \mathbb{Z}$ comme somme et différence d'entiers. Or $(N+2)^p - 2(N+1)^p + N^p \in [0,1[$ d'après le résultat de la question précédente et 0 est le seul entier appartenant à $[0,1[$. On en déduit que :

$$\boxed{(N+2)^p - 2(N+1)^p + N^p = 0}.$$

En reportant ce résultat dans le résultat de la question 2(a) pour $n = N$, on obtient que :

$$\underbrace{\frac{p(p-1)}{(N+2)^{2-p}}}_{\geqslant 0} \leqslant \underbrace{(N+2)^p - 2(N+1)^p + N^p}_{=0} \leqslant \frac{p(p-1)}{N^{2-p}}.$$

En particulier, on en déduit que $\dfrac{p(p-1)}{(N+2)^{2-p}} = 0$ donc que $p(p-1) = 0$. Ainsi, $p = 0$ ou $p = 1$. Or $p \in [1,2[$ donc $\boxed{p = 1}$. Finalement, on a démontré que la seule puissance $p \in [1,2[$ telle que $n^p \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est $p = 1$.