Feuille de TD n° 1

Le langage mathématique

Exercice 1

Un élevage de lapin est touché par la myxomatose. On considère les assertions suivantes :

P : «Tous les mâles de l'élevage sont infectés.»
Q : «Dans l'élevage, il existe un mâle sain et une femelle saine.»

1. Écrire la négation de P et la négation de Q.
2. Réécrire P en utilisant une tournure «Si... alors...». Donner la contraposée et la réciproque de P.
3. Dire pour chacune des assertions suivantes si elle est vraie ou fausse :
   — «Pour prouver que P est vraie, il suffit de vérifier que tous les lapins sains sont des femelles.»
   — «Pour prouver que P est vraie, il est nécessaire de vérifier que toutes les femelles sont saines.»
   — «Pour prouver que P est fausse, il suffit de trouver un mâle sain.»
   — «Pour prouver que P est fausse, il est nécessaire de vérifier que tous les mâles sont sains.»
   — «Pour prouver que Q est vraie, il suffit de trouver une femelle saine.»
   — «Pour prouver que Q est vraie, il est nécessaire de trouver une femelle saine.»
   — «Pour prouver que Q est fausse, il suffit de vérifier que toutes les femelles sont infectées.»
   — «Pour prouver que Q est fausse, il est nécessaire de vérifier que tous les lapins sont infectés.»

Exercice 2

La disjonction exclusive de deux assertions P et Q est définie comme l'assertion, notée «P ou bien Q», qui est vraie lorsque l'une des deux assertions P ou Q est vraie alors que l'autre est fausse, et fausse lorsque P et Q sont vraies ou fausses en même temps.

1. Donner la table de vérité de la disjonction exclusive.
2. La disjonction exclusive est-elle symétrique ? associative ?
3. Écrire la négation de l'assertion «P ou bien Q» à l'aide des connecteurs logiques de négation, de conjonction et de disjonction (inclusive).
4. Montrer que les assertions suivantes sont vraies quelles que soient les valeurs de vérité des assertions P et Q (ce sont donc des tautologies) :
   — «$(P$ ou bien $Q) \iff ((P$ ou $Q)$ ou bien $(P$ et $Q))$»
   — «$((P$ ou bien $Q)$ ou bien $Q) \iff P$»

Exercice 3

Que pensez-vous de l'histoire suivante :

Un crocodile s'empare d'un bébé et dit à la mère :
«Si tu devines ce que je vais faire, je te rends ton bébé, sinon je le dévore !».

Exercice 4

L'implication logique est-elle associative ?

Exercice 5

On considère les ensembles suivants :

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\} \qquad B = \{n \in \mathbb{N} \mid 3n + 2 \leqslant 100\} \qquad C = \{n^2 + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Décrire les ensembles $E = (A \cap B) \setminus C$ et $F = B \setminus (A \cup C)$.

Exercice 6

La différence symétrique de deux parties A et B d'un ensemble E est définie comme l'ensemble, noté $A\Delta B$, des éléments de E qui appartiennent à A ou B mais pas aux deux à la fois.

1. Montrer que l'intersection est distributive sur la différence symétrique.
2. Montrer l'équivalence suivante pour toutes parties A, B, C de E :

$$A\Delta B = A\Delta C \iff B = C.$$

Exercice 7

Montrer que les deux ensembles suivants sont égaux :

$$\big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 1\big\} = \{(5b - a, 1 + a + b, 1 + a - b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Exercice 8

Pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on définit l'ensemble suivant :

$$\mathcal{E}_g = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ dérivable et } f' + f = g\}.$$

Soient $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de $\mathcal{E}_g$. Montrer que :

$$\mathcal{E}_g = \{f + h \mid f \in \mathcal{E}_0\}.$$

Exercice 9

Donner la liste de tous les éléments de $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$, puis ceux de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0, 1\}))$.

Exercice 10

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Écrire la négation de chacune des assertions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 0$
2. $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$

3. $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = y$
4. $\exists M > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant M$
5. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ x \geqslant a \Longrightarrow |f(x)| \leqslant \varepsilon$
6. $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Exercice 11

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels. A l'aide de quantificateurs, traduire les assertions suivantes en langage mathématique :

1. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ne s'annule jamais.
2. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas la suite constante égale à 0.
3. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.
4. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ ne prend jamais deux fois la même valeur.
5. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée.
6. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas minorée.
7. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est constante.
8. La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est stationnaire (c'est-à-dire constante à partir d'un certain rang).

Exercice 12

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Interpréter chacune des assertions suivantes :

P_1 : «$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$» $\qquad$ P_2 : «$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$»

P_3 : «$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$» $\qquad$ P_4 : «$\exists x \in \mathbb{R},\ \forall M \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$»

Exercice 13

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels. Prouver l'équivalence suivante :

$$(\exists M > 0,\ \forall n \geqslant 0,\ u_n \leqslant M) \Longleftrightarrow (\exists M > 0,\ \forall n \geqslant 0,\ u_n < M).$$

Exercice 14

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite continue si elle vérifie l'assertion suivante :

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

1. Montrer que la fonction $x \mapsto 42x + \pi$ est continue.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ est continue.
3. Montrer que la fonction $x \mapsto (0 \text{ si } x < 0 \text{ et } 1 \text{ si } x \geqslant 0)$ n'est pas continue.

Exercice 15

Démontrer que $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ est un entier pair pour tout entier $n \geqslant 0$.
(*Indication* : considérer aussi le nombre $\sqrt{5}[(3 + \sqrt{5})^n - (3 - \sqrt{5})^n]$.)

Exercice 16

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$. Démontrer que $u_n = 2^n \cos(n\pi/3)$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

Exercice 17

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 7$ et la relation de récurrence $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n$. Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $u_n = a + 2^n b + 3^n c$ pour tout entier $n \geqslant 0$.