

Feuille de TD n° 10

Calcul infinitésimal

Exercice 1

Etudier la dérivabilité et calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 4}{x^3 - x^2 - 2x} \qquad f_2 : x \mapsto \ln(\sin(x)) + \sin(\ln(x))$$

$$f_3 : x \mapsto (1 + \sqrt{x})^{\cos(x)} \qquad f_4 : x \mapsto x^2 e^{3x} \tan(4x)$$

$$f_5 : x \mapsto \left(\frac{\ln(x)}{x^2 + 2} \right)^{x^2 + x + 1} \qquad f_6 : x \mapsto \arctan\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)$$

Exercice 2

Calculer les dérivées partielles (sans justifier la dérivabilité) de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : (x, y) \mapsto (x^2 - y^3)^4 \qquad f_2 : (x, y) \mapsto e^x \cos(y) + e^{-x} \sin(y)$$

$$f_3 : (x, y) \mapsto x^3 y^2 - 5x y^2 + 3x^2 - y + 1 \qquad f_4 : (x, y) \mapsto \ln\left(\sqrt{\frac{x}{y-x}} \right)$$

$$f_5 : (x, y) \mapsto \frac{x}{y} \tan\left(\frac{y}{x} \right) \qquad f_6 : (x, y, z) \mapsto \frac{xyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Exercice 3

Etudier le domaine de définition et déterminer des primitives de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \sin(x) \cos^3(x) \qquad f_2 : x \mapsto \frac{(\ln(x))^2}{x}$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{\sqrt{\sqrt{x} + 1}}{\sqrt{x}} \qquad f_4 : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$$

$$f_5 : x \mapsto \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{\sqrt{x}} \qquad f_6 : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2}$$

Exercice 4

Etudier le domaine de définition et déterminer des primitives de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto (5x - 3)e^{2x} \qquad f_2 : x \mapsto x^2 \sin(x)$$

$$f_3 : x \mapsto (x^3 - x^2 + x - 1)e^x \qquad f_4 : x \mapsto x^2 2^x$$

$$f_5 : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^3} \qquad f_6 : x \mapsto (\ln(x))^3$$

Exercice 5

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(E1) \quad y' = 3y$$

$$(E2) \quad y' + 4y = 0$$

$$(E3) \quad y' - 5y = 1$$

$$(E4) \quad 6y' + 7y = 8$$

$$(E5) \quad y = 2y' + 1$$

Exercice 6

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(E1) \quad y'' - 5y' + 6y = 0$$

$$(E2) \quad y'' - 2y' + 5y = 0$$

$$(E3) \quad y'' - 4y' + 5y = 1$$

$$(E4) \quad 4y + 4y' = 2 - y''$$

$$(E5) \quad y' = 2y'' + 1$$

Exercice 7

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes qui satisfont les conditions initiales données :

1. $2y + 3y' = 4$ et $y(1) = 5$

2. $\frac{1}{2}(y'' + 5y) = y' + 5$ et $y(0) = y'(0) = 0$

3. $y'' = 5 + 3y$ et $y(0) = \frac{1}{3}$, $y\left(\frac{1}{3}\right) = 0$

4. $y'' + 6y' + 9y = 1$ et $y(0) = y'(0) = 0$

5. $y'' + y' + y = 1$ et $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$

Exercice 8

Déterminer des primitives de chacune des fonctions suivantes à l'aide d'un changement de variable.

$$f_1 : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2}$$

$$f_2 : \theta \mapsto \frac{1}{\cos(\theta) + 1} \quad \text{en posant } t = \tan(\theta/2)$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{x}{x^2 + x + 1}$$