

Calculs de dérivées, de primitives et d'intégrales

Exercice 1

Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \frac{x^2 - 3x + 4}{x^3 - x^2 - 2x}$$

$$f_2 : x \mapsto \ln(\sin(x)) + \sin(\ln(x))$$

$$f_3 : x \mapsto (1 + \sqrt{x})^{\cos(x)}$$

$$f_4 : x \mapsto x^2 e^{3x} \tan(4x)$$

$$f_5 : x \mapsto \left(\frac{\ln(x)}{x^2 + 2} \right)^{x^2 + x + 1}$$

$$f_6 : x \mapsto \arctan\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)$$

Exercice 2

Calculer les dérivées partielles (sans justifier la dérivabilité) de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : (x, y) \mapsto (x^2 - y^3)^4$$

$$f_2 : (x, y) \mapsto e^x \cos(y) + e^{-x} \sin(y)$$

$$f_3 : (x, y) \mapsto x^3 y^2 - 5xy^2 + 3x^2 - y + 1$$

$$f_4 : (x, y) \mapsto \ln\left(\sqrt{\frac{x}{y-x}}\right)$$

$$f_5 : (x, y) \mapsto \frac{x}{y} \tan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$f_6 : (x, y, z) \mapsto \frac{xyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Exercice 3

Étudier l'ensemble de définition et déterminer des primitives de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \sin(x) \cos^3(x)$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{(\ln(x))^2}{x}$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{\sqrt{\sqrt{x} + 1}}{\sqrt{x}}$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$$

$$f_5 : x \mapsto \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{\sqrt{x}}$$

$$f_6 : x \mapsto \frac{1}{x^2 + 2}$$

Exercice 4

Étudier l'ensemble de définition et déterminer des primitives de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto (5x - 3)e^{2x}$$

$$f_2 : x \mapsto x^2 \sin(x)$$

$$f_3 : x \mapsto (x^3 - x^2 + x - 1)e^x$$

$$f_4 : x \mapsto x^2 2^x$$

$$f_5 : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^3}$$

$$f_6 : x \mapsto (\ln(x))^3$$

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} \quad \text{et} \quad I_3 = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^2}.$$

Exercice 6

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Simplifier $\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ puis calculer l'intégrale suivante :

$$\int_a^b \frac{dt}{(t+a)(t+b)}.$$

Exercice 7

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 x^3 3^x dx, \quad I_2 = \int_1^e x^2 \ln(x) dx \quad \text{et} \quad I_3 = \int_{-1/2}^{1/2} \cos(\pi t) e^t dt.$$

Exercice 8

Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué :

$$I_1 = \int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{x}) dx \quad \text{en posant } x = t^2$$

$$I_2 = \int_1^e \sin(\pi \ln(x)) dx \quad \text{en posant } x = e^t$$

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 + \sin(\theta)} \quad \text{en posant } t = \tan(\theta/2).$$