# Corrigé de la feuille de TD n° 11

# Matrices

## Exercice 1

Les produits qui ont un sens :

$$AC = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix},\ AE = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$BD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ CF = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 12 & 6 \\ 16 & 8 \end{pmatrix},\ DC = \begin{pmatrix} 22 \\ 31 \end{pmatrix},$$

$$DE = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix},\ EC = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix},\ E^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$FB = \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix},\ FD = \begin{pmatrix} 2 & 14 & 26 \end{pmatrix}.$$

## Exercice 2

On a $A = bU + a\mathrm{I}_3$ avec $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Or $\forall k \geqslant 1,\ U^k = 3^{k-1}U$ (par récurrence), donc on obtient avec la formule du binôme de Newton :

$$\forall p \geqslant 1,\ A^p = a^p\mathrm{I}_3 + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} 3^{k-1} b^k a^{p-k} U = a^p \mathrm{I}_3 + \frac{1}{3}\left[(a+3b)^p - a^p\right] U.$$

On a $B = N + 2\mathrm{I}_3$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Or $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0_3$, donc on obtient avec la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \forall p \geqslant 1,\ B^p &= 2^p\mathrm{I}_3 + \binom{p}{1} 2^{p-1} N + \binom{p}{2} 2^{p-2} N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 2^p & 3p2^{p-1} & 4p2^{p-1} + \frac{9}{2}p(p-1)2^{p-2} \\ 0 & 2^p & 3p2^{p-1} \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a $C = M + \mathrm{I}_3$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Or $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^4 = 0_4$, donc on obtient avec la formule du binôme de Newton :

$$\forall p \geqslant 1,\ C^p = \mathrm{I}_4 + \binom{p}{1} M + \binom{p}{2} M^2 + \binom{p}{3} M^3 = \begin{pmatrix} 1 & ip & -\frac{p(p-1)}{2} & -i\frac{p(p-1)(p-2)}{6} \\ 0 & 1 & ip & -\frac{p(p-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & ip \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Exercice 3

$\mathrm{rang}(A) = 3$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Si $a = 2$ alors $\mathrm{rang}(B) = 2$, si $a = -1$ alors $\mathrm{rang}(B) = 3$ et si $b \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ alors $\mathrm{rang}(B) = 4$.

$$\forall X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}),\ \mathrm{rang}(C) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

## Exercice 4

Si $a = b = 0$ alors $\mathrm{rang}(A) = 0$, si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors $\mathrm{rang}(A) = 1$, si $a = -3b$ et $b \neq 0$ alors $\mathrm{rang}(A) = 2$. Dans tous les autres cas ($a \neq 0$, $a \neq -3b$ et $b \neq 0$) $\mathrm{rang}(A) = 3$ et donc $A$ est inversible avec :

$$A^{-1} = \frac{1}{a(a+3b)} \begin{pmatrix} a+2b & -b & -b \\ -b & a+2b & -b \\ -b & -b & a+2b \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{rang}(B) = 4$ donc $B$ est inversible avec :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $c = 1$ alors $\mathrm{rang}(C) = 2$, si $c \neq 1$ alors $\mathrm{rang}(C) = 3$ et donc $C$ est inversible avec :

$$C = \frac{1}{c^3 - 1} \begin{pmatrix} c^2 & 1-2c & -c \\ -1-2c & 4-c & 2+c^2 \\ c & c^2-2 & -1 \end{pmatrix}.$$

## Exercice 5

On a :

1. $\mathrm{rang}(P) = 3$ donc $P$ est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. On a pour tout $p \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned} A^p &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 5(-1)^p - 4 & 3(-1)^p - 3 & -(-1)^p + 1 \\ -10(-1)^p + 2 \times 2^p + 8 & -6(-1)^p + 2^p + 6 & 2(-1)^p - 2 \\ -10(-1)^p + 6 \times 2^p + 4 & -6(-1)^p + 3 \times 2^p + 3 & 2(-1)^p - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## Exercice 6

On a :

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -4 & 9 \\ -7 & -1 & 2 & -9 \\ -6 & -3 & 7 & -9 \\ -5 & -1 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 41 & 12 & -21 & 54 \\ -3 & 2 & -3 & 0 \\ -18 & -9 & 17 & -27 \\ -33 & -12 & 21 & -46 \end{pmatrix}$.

2. $A^3 = 3A + 2\mathrm{I}_4$.

3. $A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 3\mathrm{I}_4) = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{9}{2} \\ -\frac{7}{2} & -2 & 1 & -\frac{9}{2} \\ -3 & -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{9}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

## Exercice 7

$B = \begin{pmatrix} x & y \\ \frac{3}{2}y & x + \frac{3}{2}y \end{pmatrix}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.