Feuille de TD n° 12

Convergence de suites réelles

Exercice 1

Etudier la nature des suites suivantes et déterminer leur limite si elles existent.

1. $\forall n \geqslant 1,\ u_n = \frac{(-2)^n}{n!}$.
2. $\forall n \geqslant 1,\ v_n = \frac{n!}{n^n}$.
3. $\forall n \geqslant 1,\ x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+n}}$.
4. $\forall n \geqslant 1,\ w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$.
5. $\forall n \geqslant 0,\ y_n = 10^{-n}\lfloor 10^n x\rfloor$ où $x \in \mathbb{R}$ est fixé.

Exercice 2

Donner un équivalent simple de chacune des suites suivantes.

1. $\forall n \geqslant 1,\ u_n = (2n^4 - 3n^2 + 4 - 5\ln(n))\left(-\frac{1}{6}\right)^n$.
2. $\forall n \geqslant 0,\ v_n = \ln\left(\frac{n^3+n^2+n+1}{n^3+1}\right)$.
3. $\forall n \geqslant 0,\ w_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$.
4. $\forall n \geqslant 1,\ x_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\sqrt{n}} - 1$.
5. $\forall n \geqslant 1,\ y_n = \sqrt{\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)} - 1$.

Exercice 3

Calculer chacune des limites suivantes.

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2^n+4n^5}{5\ln(n)-3^n}$.
2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n^3+1)}{n+1}$.
3. $\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{4n^2+1} - 2n\right)$.
4. $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+3n+4} - \sqrt{n^2+2}$.
5. $\lim_{n\to+\infty} n^5\ln(1+e^{-n})$.
6. $\lim_{n\to+\infty} n^2\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.
7. $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ où $x \in \mathbb{R}$ est fixé.
8. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{3n}$.
9. $\lim_{n\to+\infty} \frac{(e^{2/n^2}-1)\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-1\right)}{\sin\left(\frac{3}{n^3}\right)}$.
10. $\lim_{n\to+\infty} n^3\left(\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Exercice 4

Étudier la nature des suites suivantes et déterminer leur limite si elles existent.

1. $u_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n+3}$.
2. $v_0 = 2$ et $\forall n \geqslant 0,\ v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(v_n + \frac{3}{v_n}\right)$.
3. $w_0 = 1$ et $\forall n \geqslant 0,\ w_{n+1} = \frac{1}{1+w_n}$ (on pourra étudier les suites extraites d'indices pairs $(w_{2k})_{k\geqslant 0}$ et d'indices impairs $(w_{2k+1})_{k\geqslant 0}$).

Exercice 5

Soit $(u_k)_{k\geqslant 0}$ une suite réelle telle que la suite $(\sum_{k=0}^{n} u_k)_{n\geqslant 0}$ converge. Montrer que $(u_k)_{k\geqslant 0}$ converge vers 0.