

Matrices

$$C = \begin{pmatrix} c & 1 & 2 \\ -1 & 0 & c \\ 2 & c & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } c \in \mathbb{R}.$$

Exercice 1

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, F = (42).$$

Calculer tous les produits de deux matrices parmi $\{A, B, C, D, E, F\}$ qui ont un sens.

Exercice 2

Pour chacune des matrices suivantes, calculer ses puissances successives.

$$A = \begin{pmatrix} a+b & b & b \\ b & a+b & b \\ b & b & a+b \end{pmatrix} \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Pour chacune des matrices suivantes, calculer son rang.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ 3 & 3 & a \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ avec } a \in \mathbb{R}, B = \begin{pmatrix} b & 3 & -1 & 0 \\ 1 & b & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } b \in \mathbb{R},$$

$$C = X^t X \text{ avec } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}).$$

Exercice 4

Pour chacune des matrices suivantes, déterminer si elle est inversible. Si oui, calculer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} a+b & b & b \\ b & a+b & b \\ b & b & a+b \end{pmatrix} \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Exercice 5

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -9 & -6 & 2 \\ 22 & 14 & -4 \\ 26 & 15 & -3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer $P^{-1}AP$.
3. En déduire A^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 6

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 13 & 4 & -7 & 18 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -6 & -3 & 5 & -9 \\ -11 & -4 & 7 & -16 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 et A^3 .
2. Exprimer A^3 en fonction de A et de I_4 .
3. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 7

Déterminer l'ensemble des matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$