

Matrices

Exercice 1

Les produits qui ont un sens :

$$AC = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, AE = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$BD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, CF = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 12 & 6 \\ 16 & 8 \end{pmatrix}, DC = \begin{pmatrix} 22 \\ 31 \end{pmatrix},$$

$$DE = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}, EC = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, E^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$FB = \begin{pmatrix} -2 & 2 \end{pmatrix}, FD = \begin{pmatrix} 2 & 14 & 26 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

On a $A = bU + aI_3$ avec $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Or $\forall k \geq 1, U^k = 3^{k-1}U$ (par récurrence),

donc on obtient avec la formule du binôme de Newton :

$$\forall p \geq 1, A^p = a^p I_3 + \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} 3^{k-1} b^k a^{p-k} U = a^p I_3 + \frac{1}{3} [(a+3b)^p - a^p] U.$$

On a $B = N + 2I_3$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Or $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0_3$, donc

on obtient avec la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \forall p \geq 1, B^p &= 2^p I_3 + \binom{p}{1} 2^{p-1} N + \binom{p}{2} 2^{p-2} N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 2^p & 3p2^{p-1} & 4p2^{p-1} + \frac{9}{2}p(p-1)2^{p-2} \\ 0 & 2^p & 3p2^{p-1} \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a $C = M + I_3$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Or $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $M^4 = 0_4$, donc on obtient avec la formule du binôme de Newton :

$$\forall p \geq 1, C^p = I_4 + \binom{p}{1} M + \binom{p}{2} M^2 + \binom{p}{3} M^3 = \begin{pmatrix} 1 & ip & -\frac{p(p-1)}{2} & -i\frac{p(p-1)(p-2)}{6} \\ 0 & 1 & ip & -\frac{p(p-1)}{2} \\ 0 & 0 & 1 & ip \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

$\text{rang}(A) = 3$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Si $a = 2$ alors $\text{rang}(B) = 2$, si $a = -1$ alors $\text{rang}(B) = 3$ et si $b \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ alors $\text{rang}(B) = 4$.

$$\forall X \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}), \text{rang}(C) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exercice 4

Si $a = b = 0$ alors $\text{rang}(A) = 0$, si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors $\text{rang}(A) = 1$, si $a = -3b$ et $b \neq 0$ alors $\text{rang}(A) = 2$. Dans tous les autres cas ($a \neq 0, a \neq -3b$ et $b \neq 0$) $\text{rang}(A) = 3$ et donc A est inversible avec :

$$A^{-1} = \frac{1}{a(a+3b)} \begin{pmatrix} a+2b & -b & -b \\ -b & a+2b & -b \\ -b & -b & a+2b \end{pmatrix}.$$

$\text{rang}(B) = 4$ donc B est inversible avec :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $c = 1$ alors $\text{rang}(C) = 2$, si $c \neq 1$ alors $\text{rang}(C) = 3$ et donc C est inversible avec :

$$C = \frac{1}{c^3 - 1} \begin{pmatrix} c^2 & 1 - 2c & -c \\ -1 - 2c & 4 - c & 2 + c^2 \\ c & c^2 - 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5

On a :

- $\text{rang}(P) = 3$ donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$2. P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. On a pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A^p &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^p & 0 \\ 0 & 0 & 2^p \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 5(-1)^p - 4 & 3(-1)^p - 3 & -(-1)^p + 1 \\ -10(-1)^p + 2 \times 2^p + 8 & -6(-1)^p + 2^p + 6 & 2(-1)^p - 2 \\ -10(-1)^p + 6 \times 2^p + 4 & -6(-1)^p + 3 \times 2^p + 3 & 2(-1)^p - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 6

On a :

$$1. A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -4 & 9 \\ -7 & -1 & 2 & -9 \\ -6 & -3 & 7 & -9 \\ -5 & -1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} 41 & 12 & -21 & 54 \\ -3 & 2 & -3 & 0 \\ -18 & -9 & 17 & -27 \\ -33 & -12 & 21 & -46 \end{pmatrix}.$$

$$2. A^3 = 3A + 2I_4.$$

$$3. A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 3I_4) = \begin{pmatrix} 3 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{9}{2} \\ -\frac{7}{2} & -2 & 1 & -\frac{9}{2} \\ -3 & -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{9}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ \frac{3}{2}y & x + \frac{3}{2}y \end{pmatrix} \text{ avec } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$