Feuille de TD n° 13

Équations différentielles linéaires simples

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{llll} (E1) & y' = 3y & (E2) & y' + 4y = 0 \\ (E3) & y' - 5y = 1 & (E4) & 6y' + 7y = 8 \\ (E5) & y = 2y' + 1 & & \end{array}$$

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{llll} (E1) & y'' - 5y' + 6y = 0 & (E2) & y'' - 2y' + 5y = 0 \\ (E3) & y'' - 4y' + 5y = 1 & (E4) & 4y + 4y' = 2 - y'' \\ (E5) & y' = 2y'' + 1 & & \end{array}$$

Exercice 3

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes qui satisfont les conditions initiales données :

1. $2y + 3y' = 4$ et $y(1) = 5$
2. $\frac{1}{2}(y'' + 5y) = y' + 5$ et $y(0) = y'(0) = 0$
3. $y'' = 5 + 3y$ et $y(0) = \frac{1}{3}$, $y\left(\frac{1}{3}\right) = 0$
4. $y'' + 6y' + 9y = 1$ et $y(0) = y'(0) = 0$
5. $y'' + y' + y = 1$ et $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$

Exercice 4

Déterminer une solution particulière pour chacune des équations différentielles suivantes :

1. $x'(t) - 2x(t) = t^3 e^{2t}$.
2. $x''(t) + x(t) = \cos(t)$.
3. $x'''(t) - x''(t) + x(t) = t^4$.

Exercice 5

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$tx'(t) + 2x(t) = te^t.$$

Exercice 6

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[,\ f'(x) + \tan(x)f(x) = \sin(x)$.
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f'(x) + f(x) = x^2$.
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - 2f'(x) + f(x) = xe^{2x}$.
4. $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) - 4f'(x) + 3f(x) = x\cos(2x)$.

Pour la dernière équation différentielle, on cherchera une solution particulière de la forme $f : x \mapsto P_1(x)\cos(2x) + P_2(x)\sin(2x)$ où P_1 et P_2 sont deux fonctions polynomiales.

Exercice 7

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$ty' + y = 3t^2\cos(t) + 2t\sin(t) + 1.$$

Exercice 8

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f(x)^2 + (1 + e^x)f(x). \tag{$\star$}$$

1. Montrer que si f est une fonction vérifiant l'énoncé, alors $g : x \mapsto \frac{e^x}{f(x)}$ est solution d'une équation différentielle linéaire à déterminer.
2. Conclure.
3. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to]-\infty, 0[$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifient $(\star)$.

Exercice 9

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $\forall t \in]0, 1[,\ x'(t) = x(t)^2$ avec $x :]0, 1[\to]0, +\infty[$.
2. $\forall t \in]0, +\infty[,\ x(t)x'(t) = t + 1$ avec $x :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$.
3. $\forall t \in]0, +\infty[,\ x'(t) = (1 + x(t)^2)e^{-t}$.

Exercice 10

On considère l'équation différentielle suivante :

$$f'' - 2f' + 2f = 2x^2. \tag{E}$$

1. Résoudre (E).
2. Déterminer l'unique solution f de (E) qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = f^{(n)}(0)$. Montrer que :

$$\forall n \geqslant 3, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n.$$

5. Déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.